دگردیسی در خمینه‌ها

محمدرضا رزوان

در بن بسیاری از دستاوردهای علمی، اندیشه‌ای روشن و ساده نهفته است. ریاضیات نیز با تمام پیچیدگیهایش این‌چنین است. البته درک جزئیات این دستاوردها چندان ساده نیست، ولی اندیشه‌های بنیادی آن برای همگان قابل فهم و سودمند است. در این نوشته می‌کوشیم به نوبهٔ خود یکی از این مفاهیم ساده را که بطور طبیعی در نظریهٔ نقاط بحرانی ظاهر می‌شود با زبانی آشنا و آسان بیان کنیم. این کار را با یک مسألهٔ قدیمی آغاز می‌کنیم.

تقریباً هر دانشجوی ریاضی می‌داند که هیچ دگردیسی از یک خمینهٔ فشرده به لبه‌اش وجود ندارد [M]. حالت خاص دیسک D^n معروفتر و قدیمی‌تر است، یعنی دیسک nـبعدی را نمی‌توان به لبه‌اش یعنی S^{n-1} جمع کرد. ولی در این حالت خاص یک چیز ممکن است و آن اینکه اگر یک نقطه از درون دیسک برداریم یک دگردیسی از فضای حاصل به S^{n-1} یافت می‌شود. اکنون سؤالی که بطور طبیعی به ذهن می‌رسد این است که از یک خمینهٔ دلخواه چه زیرمجموعه‌ای باید حذف شود تا یک دگریسی از فضای حاصل به لبهٔ خمینه موجود باشد؟ پیش از پرداختن به این پرسش نوعی از دگردیسی را که در اینجا مورد نظر است بطور دقیق تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید M خمینه‌ای با لبهٔ ∂M و $A \subset M$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد. یک دگردیسی از A در M نگاشتی مانند $H : A \times [0,1] \longrightarrow M$ است که $H(x,0) = x$ و برای هر $t \in [0,1]$ و $x \in A \cap \partial M$ داشته باشیم $H(x,t) = x$. نگاشت H را یک دگردیسی به ∂M گوییم هرگاه $H(A \times \{1\}) \subset \partial M$.

مثال. فرض کنید $I = [0,1]$ و $M = S^1 \times I$، یعنی استوانه را بعنوان اولین مثال نابدیهی در نظر بگیرید. در این‌حالت با حذف هر تعداد متناهی نقطه هم نمی‌توان یک دگردیسی از فضای حاصل به لبهٔ استوانه یعنی $S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$ یافت. در واقع در فضای حاصل خمی وجود دارد که دو مؤلفهٔ لبه را به هم وصل می‌کند و تصویر آن در $H_1(S^1 \times I, S^1 \times \partial I)$ ناصفر است. بنابراین هیچ دگردیسی از این خم به لبه در M موجود نیست. ولی با حذف یک دایرهٔ مناسب که ارتباط دو مؤلفهٔ لبه را قطع کند این کار ممکن می‌شود. همچنین اگر $f : S^1 \longrightarrow M$ نگاشتی پیوسته باشد که تصویر آن لبهٔ M را قطع نکند و $f_* : H_1(S^1) \longrightarrow H_1(M)$ ناصفر باشد، در این‌صورت یک دگردیسی از $M - f(S^1)$ به لبهٔ M در M موجود است.

در واقع در بیشتر مواقع با حذف تعداد متناهی نقطه نمی‌توان فضای حاصل را به لبه جمع کرد. قضیهٔ زیر تا حدی مانع موجود برای وجود دگردیسی به لبه را نمایان می‌سازد و شاهد خوبی بر این مدعاست.

قضیه. فرض کنید M یک خمینهٔ فشردهٔ لبه‌دار و جهت‌پذیر و $A \subset M - \partial M$ زیرمجموعه‌ای فشرده باشد بطوری که یک دگردیسی از $M - A$ به ∂M در M موجود باشد. در این صورت برای هر همسایگی U از A نگاشت $i^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(U)$ یک‌به‌یک و $i_* : H_*(U) \longrightarrow H_*(M)$ پوشاست ($i' : U \hookrightarrow M$ نگاشت جزئیت است).

برهان. ابتدا همسایگی $V \subset U$ حول A را طوری می‌گیریم که V خود یک خمینهٔ لبه‌دار باشد و $W = M - V$ نیز یک خمینهٔ لبه‌دار باشد. چون برای $M - A$ یک دگردیسی به ∂M موجود است، با تحدید این دگردیسی به $W \times [\circ, \mathsf{1}]$ می‌توان یک دگردیسی از W به ∂M یافت. پس جزئیت $j : (W, \partial M) \hookrightarrow (M, \partial M)$ در هموتوپی بدیهی است و در همولوژی یا کوهمولوژی نگاشت صفر القاء می‌کند. حال دنبالهٔ دقیق سه‌تایی $(\partial M, W, M)$ را در نظر بگیرید. مثلاً برای همولوژی دنبالهٔ زیر را داریم:

$$H_*(W, \partial M) \longrightarrow H_*(M, \partial M) \longrightarrow H_*(M, W)$$

از صفر بودن نگاشت اول و دقیق بودن دنبالهٔ بالا نتیجه می‌شود که نگاشت $H_*(M, \partial M) \longrightarrow H_*(M, W)$ یک‌به‌یک است از طرفی بنابر excision داریم $H_*(M, W) \cong H_*(V, \partial V)$. حال قضیهٔ دوگانی لفشتز [SP] یکسانیهای زیر را می‌دهد: $H_*(M, \partial M) \simeq H^*(M)$ و $H_*(V, \partial V) \cong H^*(V)$. بنابراین از طبیعی بودن دوگانی لفشتز نگاشت طبیعی $H^*(M) \longrightarrow H^*(V)$ یک‌به‌یک خواهد بود. به‌ویژه نگاشت $i^* : H^*(M) \longrightarrow H^*(U)$ نیز یک‌به‌یک است. برای کوهمولوژی نیز دنبالهٔ دقیق زیر را داریم:

$$H^*(M, W) \longrightarrow H^*(M, \partial M) \longrightarrow H^*(W, M)$$

که در آن نگاشت دوم صفر است پس نگاشت اول پوشاست. مشابهاً از دوگانی لفشتز نتیجه می‌شود که نگاشت طبیعی $H_*(V) \longrightarrow H_*(M)$ پوشاست. به‌ویژه $i_* : H_*(U) \longrightarrow H_*(M)$ نیز پوشا خواهد بود. □

مثال. فرض کنید A در قضیهٔ بالا تعداد متناهی نقطه باشد. در این‌صورت می‌توان همسایگی U را گویهای بستهٔ مجزا حول این نقاط گرفت. در این‌صورت از قضیهٔ بالا داریم $H_k(M) \simeq H^k(M) \simeq \{\circ\}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$.

توضیح. قضیهٔ بالا تعمیمی از نتایج [CZ,F1,F2] می‌دهد که البته از نگاهی دیگر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین توجه کنید که شرط جهت‌پذیری تنها برای دوگانی لفشتز لازم است. بنابراین اگر ضرایب همولوژی یا کوهمولوژی را در $\mathbb{Z}_{\mathsf{2}}$ بگیریم قضیهٔ بالا برای خمینه‌های جهت‌ناپذیر هم برقرار است. ما از این واقعیت در گزارهٔ بعد استفاده می‌کنیم که در واقع بررسی یک مثال جالب است. این مثال نشان می‌دهد که حکم قضیهٔ بالا در برخی موارد بهترین چیزی است که دربارهٔ مجموعهٔ A می‌توان گفت!

گزاره. فرض کنید N یک خمینهٔ بستهٔ nـبعدی، $M = N \times I$، $\partial_{\circ} M = N \times \{\circ\}$، $\partial_{\backslash} M = M \times \{\backslash\}$ و $A \subset M - \partial M$ زیرمجموعه‌ای فشرده باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند:

الف) $\partial_{\circ} M$ و $\partial_{\backslash} M$ در دو مؤلفهٔ همبندی متفاوت از $M - A$ قرار دارند. به‌عبارت دیگر A آنها را از هم جدا می‌کند.

ب) یک دگردیسی از $M - A$ به ∂M موجود است.

ج) برای هر همسایگی U از A، نگاشت $H_*(U;\mathbb{Z}_۲) \longrightarrow H_*(M;\mathbb{Z}_۲)$ پوشاست.

د) برای هر همسایگی U از A، خمینهٔ بستهٔ nـبعدی N' و نگاشت $f : N' \longrightarrow M$ وجود دارد بطوری که تصویر f کاملاً در U واقع باشد و $\deg_۲ \pi \circ f = ۱$. ($\pi : M \longrightarrow N$ افکنش طبیعی است.)

برهان. الف $\Longleftarrow$ ب). فرض کنید $M - A = V_{\circ} \cup V_{\backslash}$ که در آن $V_{\circ}$ و $V_{\backslash}$ بازهای جدا از هم هستند که $\partial_{\circ} M \subset V_{\circ}$ و $\partial_{\backslash} M \subset V_{\backslash}$. براحتی دیده می‌شود که یک دگردیسی از $V_{\circ}$ به $\partial_{\circ} M$ و از $V_{\backslash}$ به $\partial_{\backslash} M$ در M موجود است. چون دو باز جدا از هم هستند این دو دگردیسی، یک دگردیسی از $M - A$ به ∂M در M به ما می‌دهد.

(ب $\Longleftarrow$ ج). از قضیه و توضیح بالا به‌دست می‌آید.

(ج $\Longleftarrow$ د). از آنجاکه مسألهٔ Steenrod برای همولوژی به پیمانهٔ دو درست است و $H_*(U) \longrightarrow H_*(M)$ پوشاست، خمینهٔ بستهٔ nـبعدی N' و نگاشت $f : N' \longrightarrow M$ یافت می‌شود که تصویر f کاملاً در U واقع باشد و مولد $H_n(N';\mathbb{Z}_۲)$ تحت نگاشت $\pi \circ f$ به مولد $H_n(N;\mathbb{Z}_۲)$ برود. حال طبق تعریف درجه به پیمانهٔ دو داریم: $\deg_۲ \pi \circ f = ۱$. (برای جزئیات [N] را ببینید.)

(د $\Longleftarrow$ الف). فرض کنید A، $\partial_{\circ} M$ و $\partial_{\backslash} M$ را جدا نکند. پس خم پیوستهٔ $\gamma : [\circ, ۱] \longrightarrow M$ وجود دارد که $\gamma(\circ) \in \partial_{\circ} M$، $\gamma(۱) \in \partial_{\backslash} M$ و تصویر γ در $M - A$ واقع است. چون A فشرده است همسایگی U از A موجود است که خم γ را قطع نمی‌کند. حال بنابر فرض خمینهٔ بستهٔ nـبعدی N' و نگاشت $f : N' \longrightarrow U$ یافت می‌شود که $\deg_۲ \pi \circ f \overset{۲}{\equiv} ۱$. توجه کنید که $\gamma \in H_۱(M, \partial M;\mathbb{Z}_۲)$ یک مولد است و تحت دوگانی لفشتز به مولد $\gamma^* \in H^n(M;\mathbb{Z}_۲) \cong H^n(N;\mathbb{Z}_۲)$ می‌رود. بنابراین $\gamma^*(f_*[N']) \overset{۲}{\equiv} ۱$ و از آنجا عدد تقاطعی f و γ به پیمانهٔ دو ناصفر خواهد بود. پس تصویر f حتماً γ را قطع می‌کند که این با فرض تناقض دارد. □

مثال. بار دیگر استوانهٔ $M = S' \times I$ را در نظر بگیرید. در این حالت مسألهٔ Steenrod بخاطر پوشا بودن $H : \pi_۱(M) \longrightarrow H_۱(M)$ برای همولوژی با ضرایب صحیح نیز درست است. پس می‌توان گزارهٔ بالا را برای ضرایب صحیح بیان کرد و شرط (د) را نیز با وجود تابع $\alpha : S^۱ \longrightarrow M$ با $\deg(\pi \circ \alpha) = ۱$ جایگزین کرد. اما در این حالت درجه ردهٔ هموتوپی را تعیین می‌کند. پس نگاشت $\pi \circ \alpha$ با همانی هموتوپ است. پس در این حالت نگاشتی مانند $\alpha : S^۱ \longrightarrow M$ موجود است که تصویرش در U واقع است و با مقطع صفر هموتوپ است.

این نتیجه تنها برای $\dim N = 1$ برقرار است. مثلاً فرض کنید $N = S^2$ و $M = S^2 \times I \subset \mathbb{R}^3$. حال A را چنبره‌ای داخل M بگیرید که $\partial_0 M$ و $\partial_1 M$ را از هم جدا کند. (چون چنبره جهت‌پذیر است در $\mathbb{R}^3$ درون و برون دارد. چنین چنبره‌ای را می‌توان با جراحی روی مقطع صفر هم به‌دست آورد.) اگر U یک همسایگی حلقوی A باشد هر نگاشت از S^2 به U با نگاشت ثابت هموتوپ است. (چون $\pi_2(S^1 \times S^1) = 0$.) بنابراین درجهٔ صفر دارد و نمی‌تواند با مقطع صفر هموتوپ باشد. در واقع در این حالت نمی‌توان N' را خود S^2 انتخاب کرد.

مثال. در مثال قبل دیدیم که وقتی M یک استوانه باشد اطلاعات بهتری بدست می‌آید. در واقع مسألهٔ کلی وقتی که M یک رویه باشد ($\dim M = 2$) ساده است و ایدهٔ [ST] engulfing در اینجا کار می‌کند. (برای دیدن حالتی از engulfing که به مسألهٔ ما شباهت دارد به [B] مراجعه کنید.) فرض کنید M یک رویهٔ فشرده و $A \subset M - \partial M$ زیرمجموعه‌ای فشرده باشد بطوری که یک دگردیسی از $M - A$ به ∂M در M موجود باشد. حال V را خمینه‌ای فشرده و لبه‌دار حول A در M بگیرید بطوری که $W = \overline{M - V}$ نیز یک خمینهٔ فشردهٔ لبه‌دار باشد. در این‌صورت برای کبردیسم دوبعدی $(W; \partial M, \partial V)$ نگاشت طبیعی زیر صفر است.

$$H_*(W, \partial M) \longrightarrow H_*(M, \partial M)$$

بنابراین کبردیسم W' شامل W در M یافت می‌شود که $H_*(W', \partial M) = 0$. برای چنین حالتی قضیهٔ کبردیسم نتیجه می‌دهد که $W' \cong \partial M \times I$. پس $M - V$ را می‌توان در یک همسایگی یقه‌ای ∂M انداخت.

به کمک این واقعیت می‌توان شاره‌ای پیوسته تعریف کرد که روی ∂M برونگرا باشد و بزرگترین مجموعهٔ ناوردای آن نیز در A بیفتد. بعبارت دیگر می‌توان دگردیسی را به کمک یک شارهٔ پیوسته بدست آورد! مثال قبل نشان می‌دهد که این واقعیت در ابعاد بالا درست نیست.

قدردانی. در هنگام تهیه این نوشته، نگارنده از حمایت‌های IPM و ICTP برخوردار بوده است و از این مراکز کمال تشکر را دارد.

مراجع

[B] Buoncristiano, S., Handel-theory and engulfing, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975), 111-116.

[CZ] Conley, C. and Zehnder, E., The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, Invent. Math., 73 (1988), 33-49.

[F1] Floer, A., A refinement of the conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets, Ergodic Theory Dynam. Systems **7** (1987), 93-103.

[F2] Floer, A., A topological persistence theorem for normally hyperbolic manifolds via Conley index, Trans. Ames. Math. Soc. 321 (1990), 647-657.

[M] Milnor, J., Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press, Va, Charlottesiville, 1965.

[N] Novikov, S.P., Topology I, Encyclopedia of Math. Sciences 12, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, 1996.

[ST] Stallings, J. R., Polyhedral homotopy-spheres, Bull. Ames. Math. Soc. 66 (1960), 485-488.

[SP] Spanier, E., Algebraic Topology, McGrow-Hill, 1966.