دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن — ۳۰ اردیبهشت ۹۳

جلسه‌ی ۲۳: متغیر تصادفی مخلوط، مجموع متغیرهای تصادفی، تابع مولد گشتاور

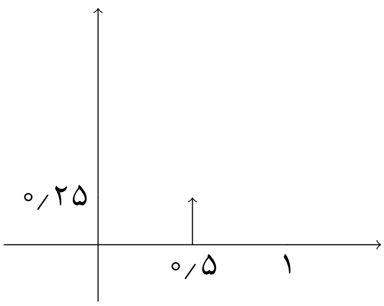
مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارنده: مهرداد تحویلیان ـ فرنوش فرهادی*

در این جلسه ابتدا به معرفی متغیر تصادفی مخلوط می‌پردازیم. سپس مجموع یک متغیر تصادفی پیوسته و یک متغیر تصادفی گسسته را بررسی می‌کنیم. پس از آن به صورت مختصر مفهوم متوسط و واریانس نمونه‌ای را خواهیم داشت و در نهایت تابع مولد گشتاورهای یک متغیر تصادفی را مطالعه می‌کنیم.

۱ متغیر تصادفی مخلوط

تا کنون با متغیرهای تصادفی گسسته و پیوسته آشنا شدیم، حال متغیر تصادفی را در نظر بگیرید که تابع توزیع تجمعی آن به صورت قطعه قطعه پیوسته باشد، به این نوع متغیرهای تصادفی، متغیرهای مخلوط گویند. این متغیرها به جای تابع چگالی احتمال، شبه تابع چگالی دارند. در مثال ۲ با چگونگی محاسبه شبه تابع چگالی احتمال آنها آشنا می‌شوید.

تعریف ۱ ***تابع دلتا دیراک:***
این تابع که با حرف یونانی δ نمایش داده می‌شود، در نقطه ۰ مقداری برابر بی‌نهایت و در دیگر نقاط مقداری برابر با صفر دارد به طوریکه انتگرال آن نیز روی بازه منفی بی‌نهایت تا مثبت بی‌نهایت برابر یک خواهد بود. باید توجه داشت که تابع دلتا با وجود اینکه با عنوان تابع خوانده می‌شود، در مفهوم، تابع نیست و برای ساده کردن نمادها و بسط تابع چگالی احتمال به توزیع‌های گسسته و مخلوط بکار می‌رود.
تابع دلتا مشتق تابع پله (تابعی که برای مقادیر منفی صفر است و برای مقادیر نامنفی یک است) محسوب می‌گردد.



شکل ۱: تابع $\frac{1}{4}\delta(x-\frac{1}{2})$

نکته ۱ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$

نکته ۲ $f(x) * \delta(x) = f(x)$

نکته ۳ $f(x) * \delta(x - x_\circ) = f(x - x_\circ)$

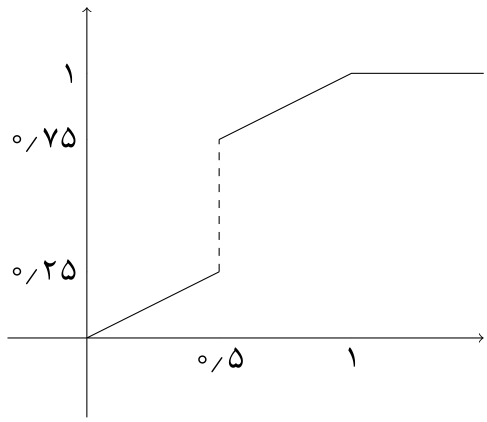
مثال ۱ *تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X با تابع جرم احتمال زیر را با استفاده از تابع دلتا دیراک نشان دهید.*

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳} & x = \circ \\ \frac{۲}{۳} & x = ۱ \\ \circ & oth. \end{cases}$$

پاسخ

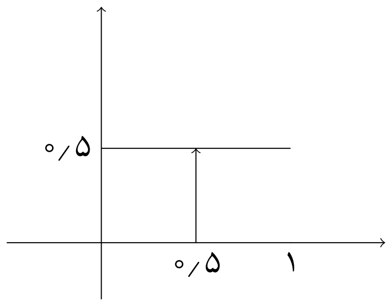
$$f_X(x) = \frac{۱}{۳}\delta(x) + \frac{۲}{۳}\delta(x - ۱)$$

مثال ۲ *شبه تابع چگالی احتمال توزیع تجمعی زیر را بدست آورید.*



شکل ۲: تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی X

پاسخ *باید از تابع احتمال تجمعی مشتق گرفت. ولی در نقطه ۰/۵ یک پله ۰/۵ داریم که مشتق آن نصف تابع دلتا دیراک است.*
پس شبه تابع چگالی احتمال مطابق با نمودار زیر است.



شکل ۳: شبه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X

۲ متوسط متغیر تصادفی در حالت کلی

در این قسمت به بررسی روشی برای بدست آوردن امید ریاضی یک متغیر تصادفی با استفاده تابع توزیع تجمعی احتمال می‌پردازیم. قضیه زیر این موضوع را روشن می‌سازد. دقت کنید که $\Pr\{X \geqslant x\} = ۱ - F_X(x)$.

قضیه ۱ *امید ریاضی متغیر تصادفی X در حالت‌های گسسته، پیوسته و مخلوط به صورت زیر قابل محاسبه است:*

۱. *اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی باشد آنگاه:* $E[X] = \sum_{i=۱}^{\infty} \Pr\{X \geqslant i\}$

۲. *اگر X متغیر تصادفی پیوسته با مقادیر مثبت باشد آنگاه:* $E[X] = \int_{\circ}^{\infty} \Pr\{X \geqslant x\}dx$

۳. *اگر X متغیر تصادفی پیوسته و یا مخلوط باشد آنگاه:* $E[X] = \int_{\circ}^{\infty} \Pr\{X \geqslant x\}dx - \int_{\circ}^{\infty} \Pr\{X \leqslant -x\}dx$

برهان. در حالت گسسته خواهیم داشت:

$$\Pr\{X \geqslant i\} = \Pr\{X = i\} + \Pr\{X = i + ۱\} + \cdots$$

پس

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{\infty} \Pr\{X \geqslant i\} &= \sum_{i=۱}^{\infty} \Pr\{X = i\} + \Pr\{X = i + ۱\} + \cdots \\
&= \sum_{i=۱}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \Pr\{X = j\} \\
&= \sum_{j=۱}^{\infty} \sum_{i=۱}^{j} \Pr\{X = j\} \\
&= \sum_{j=۱}^{\infty} j \Pr\{X = j\} = E[X]
\end{aligned}$$

■

قضیه ۲ *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با شبه‌تابع چگالی احتمال $f(x) = g(x) + \sum_i p_i \delta(x - x_i)$ باشد که $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \sum_i p_i = ۱$. در اینصورت*

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx + \sum_i x_i p_i$$

.

مثال ۳ *فرض کنید X یک متغیر تصادفی با شبه‌تابع چگالی احتمال $f(x) = g(x) + \frac{۱}{۶}\delta(x) + \frac{۱}{۲}\delta(x - ۱)$ باشد، به طوریکه:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳} & ۱ \leq y \leq ۲ \\ \circ & oth. \end{cases}$$

در این صورت:

$$E[X] = \int_{۱}^{۲} f(x)dx + \circ \cdot \frac{۱}{۶} + ۱ \cdot \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱ + ۲}{۲} + \circ + \frac{۱}{۲} = ۱$$

۳ مجموع یک متغیر تصادفی پیوسته و یک متغیر تصادفی گسسته

قبلا داشتیم اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $Z = X + Y$ آنگاه:

۱. اگر X و Y هر دو گسسته باشند با توابع جرم احتمال p_X و p_Y، آنگاه تابع چگالی احتمال Z به صورت زیر است:

$$p_Z(k) = p_X(k) * p_Y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i) p_Y(k-i)$$

۲. اگر X و Y هر دو پیوسته باشند با توابع چگالی احتمال f_X و f_Y، آنگاه تابع جرم احتمال Z به صورت زیر است:

$$f_Z(t) = f_X(t) * f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx$$

۳. اگر X گسسته با تابع جرم احتمال f_X و Y پیوسته با تابع چگالی احتمال f_Y باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال Z به صورت زیر است:

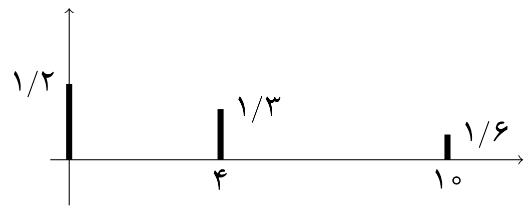
$$f_Z(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(i) f_Y(t-i)$$

در حالت کلی قضیه زیر را داریم:

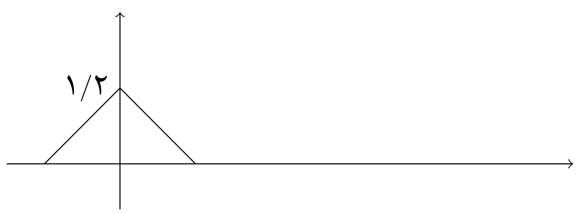
قضیه ۳ *اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با شبه‌توابع چگالی احتمال f_X و f_Y باشند، شبه‌تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X + Y$ برابر است با:*

$$f_Z(t) = f_X(t) * f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx$$

مثال ۴ *فرض کنید نمودارهای زیر به ترتیب نمودار جرم احتمال و چگالی احتمال متغیرهای X و Y باشند.*

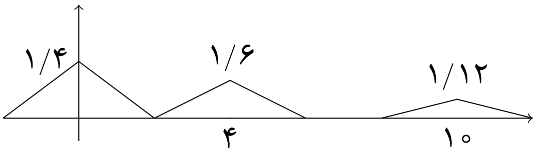


شکل ۴: تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X



شکل ۵: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y

در این صورت برای متغیر $X + Y$ خواهیم داشت:
همچنین دقت کنید می‌توان تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را با استفاده از تابع δ بیان نمود، در این صورت:



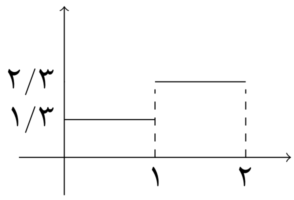
شکل ۶: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $X+Y$

$$f_X(x) = \tfrac{1}{2}\delta(x) + \tfrac{1}{3}\delta(x-4) + \tfrac{1}{6}\delta(x-10)$$

از طرفی می‌دانیم تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X + Y$ از پیچش تابع چگالی احتمال X و Y بدست می‌آید،یعنی:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= f_X(t) * f_Y(t) \\ &= (\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{3}\delta(t-4) + \frac{1}{6}\delta(t-10)) * f_Y(t) \\ &= \frac{1}{2}\delta(t) * f_Y(t) + \frac{1}{3}\delta(t-4) * f_Y(t) + \frac{1}{6}\delta(t-10) * f_Y(t) \\ &= \frac{1}{2} f_Y(t) + \frac{1}{3} f_Y(t-4) + \frac{1}{6} f_Y(t-10) \end{aligned}$$

مثال ۵ *متوسط و واریانس متغیر تصادفی Z با تابع چگالی زیر را بدست آورید:*



شکل ۷: تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Z

به وضوح متغیر تصادفی بالا از حاصل جمع دو متغیر تصادفی مستقل زیر بدست می‌آید.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0 \\ \frac{2}{3} & x = 1 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \le y \le 1 \\ 0 & oth. \end{cases}$$

حال دقت کنید که :

$$E[X] = \tfrac{1}{3} \times 0 + \tfrac{2}{3} \times 1 = \tfrac{2}{3}$$

$$Var[X] = \tfrac{1}{3} \times (0 - \tfrac{2}{3})^2 + \tfrac{2}{3} \times (1 - \tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{9}$$

و چون Y متغیر تصادفی یکنواخت است می‌دانیم:

$$E[Y] = \tfrac{1}{2} \text{ و } Var[Y] = \tfrac{1}{12}$$

پس خواهیم داشت:

$$E[Z] = E[X] + E[Y] = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۶}$$
$$Var[Z] = Var[X] + Var[Y] = \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱۱}{۳۶}$$

۴ متوسط و واریانس نمونه‌ای

در این قسمت می‌خواهیم به صورت مختصر با مفاهیم متوسط و واریانس نمونه‌ای آشنا شویم.

تعریف ۲ *فرض کنید $X_۱, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند،*

۱. *متوسط نمونه‌ای $\bar{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\bar{X} = \frac{X_۱ + X_۲ + ... + X_n}{n}$$

۲. *واریانس نمونه‌ای $S^۲$ به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$$

که داریم:

$$E[\bar{X}] = \mu,\ Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^۲}{n}$$
$$E[S^۲] = \sigma^۲,\ Var(S^۲) = ?$$

مثال ۶ *اگر $X_۱, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس μ و $\sigma^۲$ باشند، آنگاه متوسط نمونه‌ای نیز دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس μ و $\frac{\sigma^۲}{n}$ است.*

نکته ۴ *اگر $X_۱, ..., X_n$ متغیرهای نرمال استاندارد باشند، $\frac{n-۱}{\sigma^۲}S^۲$ دارای توزیع خی با درجه آزادی n خواهد بود:*

$$\frac{n-۱}{\sigma^۲}S^۲ \sim X_۱^۲ + X_۲^۲ + ... + X_n^۲$$

۵ تابع مولد گشتاورها

$E[X]$ و $E[X^۲]$ گشتاورهای اول و دوم متغیر تصادفی X نامیده می‌شوند که اهمیت آن‌ها مشخص است. در حالت کلی برای n نیز گشتاور مرتبه nام تعریف می‌شود که چه از لحاظ نظری و چه از لحاظ عملی، حائز اهمیت است. در این بخش، توابع مولد گشتاورهای متغیرهای تصادفی مختلف را مطالعه می‌کنیم. تابع مولد گشتاور در صورت وجود یکتاست. یعنی هیچ دو متغیر تصادفی متفاوتی وجود ندارند که دارای یک تابع مولد گشتاورها باشند.

تعریف ۳ *برای متغیر تصادفی X تابع زیر را در نظر بگیرید:*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

اگر $M_X(t)$ برای همه مقادیر t در بازه $(-\sigma, \sigma)$ ، برای یک $\sigma > 0$ ، تعریف شده باشد، آن‌گاه آن را تابع مولد گشتاورهای X می‌نامیم.

در حالت خاص داریم:

۱. اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع جرم احتمال ρ_X باشد:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_i e^{tx_i} \rho_X(x_i)$$

۲. اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال f_X باشد:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

مثال ۷ *فرض کنید X یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p باشد، $M_X(t)$ را تعیین کنید.*

پاسخ *داریم:*

$$M_X(t) = (1-p)e^{t\times 0} + pe^{t\times 1} = (1-p) + pe^t$$

مثال ۸ *فرض کنید X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای (n,p) است. $M_X(t)$ را تعیین کنید.*

پاسخ *داریم:*

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

پس:

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t + 1 - p)^n$$

در جدول زیر تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X، برای توزیع‌های دیگر نمایش داده شده است.

توزیع متغیر تصادفی X	$M_t(X)$
پواسون با پارامتر λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
نمایی با پارامتر λ	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$
نرمال استاندارد	$e^{\frac{t^2}{2}}$

جدول ۱: تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X برای توزیع‌های مختلف

مثال ۹ *فرض کنید X متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. $M_X(t)$ را تعیین کنید.*

پاسخ *فرض کنید Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. می‌دانیم:*

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^۲}{۲}}$$

از طرفی می‌توانیم بنویسیم:

$$X = \sigma Z + \mu$$

پس:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= E[e^{t\sigma Z + t\mu}] \\ &= E[e^{t\sigma Z} e^{t\mu}] \\ &= e^{t\mu} E[e^{t\sigma Z}] \\ &= e^{t\mu} M_Z(t\sigma) \\ &= e^{t\mu} e^{\frac{(t\sigma)^۲}{۲}} \\ &= e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^۲}{۲}} \end{aligned}$$

۶ نکاتی در مورد مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

قضیه ۴ *اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توابع مولد گشتاورهای $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ باشند، آنگاه:*

$$M_{X+Y}(t) = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} e^{tY}] = M_X(t) M_Y(t)$$

نتیجه ۱ *جمع متغیرهای تصادفی پواسون با پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ یک متغیر تصادفی پواسون است با پارامتر $\lambda_۱ + \lambda_۲$.*

نتیجه ۲ *جمع متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای $(n_۱, p)$ و $(n_۲, p)$ یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای است با پارامترهای $(n_۱ + n_۲, p)$.*

نتیجه ۳ *جمع متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگین و واریانس به ترتیب $(\mu_۱, \sigma_۱^۲)$ و $(\mu_۲, \sigma_۲^۲)$ یک متغیر تصادفی نرمال است با میانگین و واریانس $(\mu_۱ + \mu_۲, \sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲)$.*

۷ محاسبه گشتاورهای یک متغیر تصادفی

می‌توان از تابع مولد گشتاورهای یک متغیر تصادفی X برای محاسبه گشتاورهای X استفاده کرد. داریم:

$$\begin{aligned} E[X^۰] &= M_X(۰) = ۱ \\ E[X] &= M'_X(۰) \\ E[X^۲] &= M''_X(۰) \end{aligned}$$

و درنهایت:

$$E[X^n] = M_X^{(n)}(\circ)$$

که $M_X^{(n)}(t)$ مشتق مرتبه nام تابع $M_X(t)$ است.