دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد   ۷ اردیبهشت ۹۳

جلسه‌ی هفدهم: متغیرهای تصادفی مستقل

مدرّس: دکتر شهرام خزائی   *نگارنده: احمدرضا رحیمی*

۱ مقدمه

در این جلسه به بررسی متغیرهای تصادفی مستقل، مجموع آن‌ها، توزیع‌های شرطی در حالت پیوسته و خواص آن‌ها می‌پردازیم. در پایان مسأله سوزن بوفون[1] را بررسی می‌کنیم.

یادآوری

ابتدا لازم است فرمول‌های احتمالی را که در جلسات قبل فراگرفتیم یادآوری کنیم. در حالت گسسته فرمول‌های زیر را داریم:

$$p_X(X) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) \qquad (۱)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \qquad (۲)$$

و همچنین در حالت پیوسته داریم:

$$f_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \qquad (۳)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (۴)$$

مثال ۱ *فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی یکنواخت $\mathcal{U}[۰,۱]$ و مستقل باشند. مطلوب است محاسبه متوسط متغیر تصادفی $Z = \frac{Y}{X}$.*

پاسخ *سرراست‌ترین روش برای محاسبه $\mathrm{E}[Z]$ استفاده از تابع چگالی احتمال Z است. بنابراین ابتدا $f_Z(z)$ را محاسبه می‌کنیم. تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر است:*

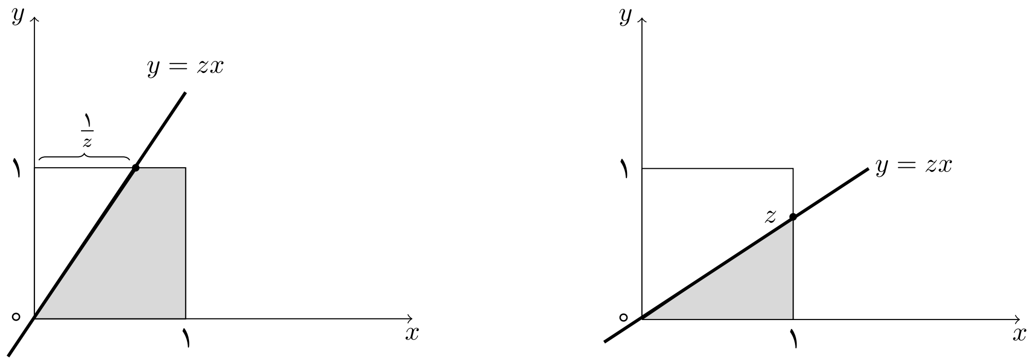
[1] Buffon's needle

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

برای محاسبه تابع چگالی احتمال Z ابتدا تابع توزیع تجمعی $F_Z(z)$ را محاسبه می‌کنیم و سپس از آن مشتق می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \Pr\{Z \le z\} \\ &= \Pr\left\{\frac{Y}{X} \le z\right\} \\ &= \iint_{\frac{y}{x} \le z} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} \frac{z}{2} & 0 \le z \le 1 \\ 1 - \frac{1}{2z} & z \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

که انتگرال دوگانه فوق با استفاده از نواحی انتگرال‌گیری که در شکل زیر نشان داده شده است، بدست آمده است.



(ب) $z \ge 1$

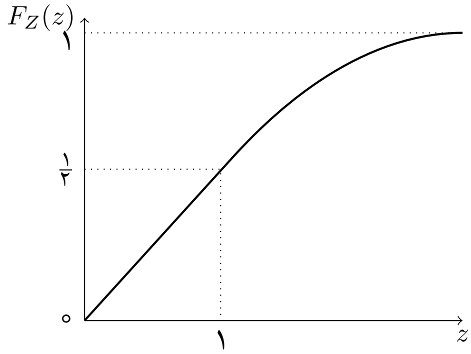
(آ) $0 \le z \le 1$

شکل ۱: شکل‌های بالا نواحی انتگرال‌گیری را نشان می‌دهند

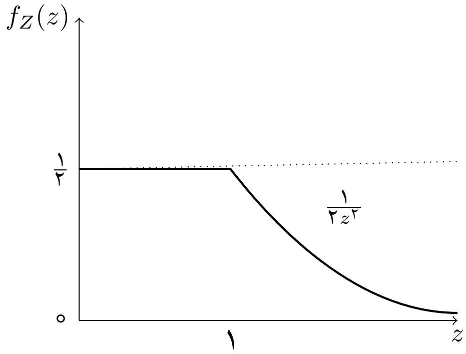
بنابراین:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} & z \ge 1 \end{cases}$$

در شکل‌های زیر نمودار توابع نشان داده شده‌اند:



(آ) نمودار $F_Z(z)$



(ب) نمودار $f_Z(z)$

در نهایت برای محاسبه $\mathrm{E}[Z]$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z] &= \mathrm{E}[\frac{Y}{X}] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)\mathrm{d}z \\
&= \int_{۰}^{۱} z\frac{۱}{۲}\mathrm{d}z + \int_{۱}^{+\infty} z\frac{۱}{۲z^۲}\mathrm{d}z \\
&= \frac{z^۲}{۴}\Big|_{۰}^{۱} + \frac{۱}{۲}\ln z\Big|_{۱}^{\infty} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

نکته ۱ *در حالت کلی لزوماً رابطه زیر صحیح نیست.*

$$\mathrm{E}[\frac{Y}{X}] = \frac{\mathrm{E}[Y]}{\mathrm{E}[X]}$$

قضیه ۱ *اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه برای همه توابع g و h داریم:*

$$\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)] \tag{۵}$$

برهان. *فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y دارای تابع چگالی توأم $f(x,y)$ باشند، آنگاه:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(X)h(Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)]
\end{aligned}$$

■

مثال ۲ *با استفاده از قضیه فوق متوسط* $\mathrm{E}[Z]$ *در مثال ۱ را می‌توان به روش دیگری نیز حل کرد.*

پاسخ چون X و Y *متغیرهای تصادفی مستقل هستند، بنابر قضیه داریم:*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\frac{X}{Y}] &= \mathrm{E}[X\frac{1}{Y}] \\ &= \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[\frac{1}{Y}]\end{aligned}$$

پس

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2},\ \mathrm{E}[\frac{1}{Y}] = \int_0^1 \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \infty \Longrightarrow \mathrm{E}[\frac{X}{Y}] = \infty$$

۲ مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

مثال ۳ *متغیرهای* X *و* Y *گسسته و مستقل‌اند و توابع جرم احتمال آن‌ها با شکل‌های زیر نشان داده شده‌است. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی* $Z = X + Y$ *را حساب کنید.*

(د) تابع جرم احتمال Y (ج) تابع جرم احتمال X

پاسخ *داریم:*

$$\begin{aligned}p_Z(z) &= \Pr\{Z = z\} \\ &= \Pr\{X + Y = z\} \\ &= \sum_x \Pr\{X = x, Y = z - x\} \\ &= \sum_x \Pr\{X = x\}\Pr\{Y = z - x\} \\ &= \sum_x p_X(x)p_Y(z - x)\end{aligned}$$

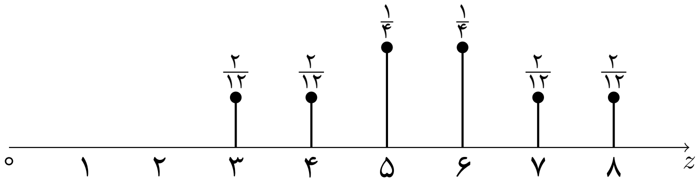
نکته ۲ *اگر* X *و* Y *دو متغیر تصادفی مستقل باشند، برای متغیر تصادفی* $Z = X + Y$ *داریم:*

$$\boxed{p_Z(z) = \sum_x p_X(x)p_Y(z - x)}$$

به رابطه بالا رابطه پیچش گسسته [۲] می‌گویند.

پس با توجه به روابط بالا تابع جرم احتمال متغیر تصادفی Z *به صورت زیر است.*

[۲] Convolution



شکل ۲: تابع جرم احتمال Z

مثال ۴ *اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و پیوسته باشند، برای متغیر تصادفی $Z = X + Y$، $f_Z(z)$ را بدست آورید.*

پاسخ *داریم:*

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= \Pr\left\{X+Y \leq z\right\} \\
&= \iint_{x+y\leq z} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) \mathrm{d}x \right) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{۶}$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۶) می‌توانیم $f_Z(z)$ را بدست آوریم.

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\
&\boxed{f_{X,Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y}
\end{aligned}$$

به رابطه بالا پیچش پیوسته می‌گویند.

مثال ۵ *متغیرهای تصادفی مستقل $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^۲)$ و $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^۲)$ را در نظر بگیرید. مجموع این دو متغیر تصادفی دارای چه توزیعی است؟*

پاسخ *توابع f_X و f_Y به صورت زیر اند:*

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^۲}{۲\sigma_X^۲}} \\
f_Y(y) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^۲}{۲\sigma_Y^۲}}
\end{aligned}$$

متغیر تصادفی $Z = X + Y$ را در نظر می‌گیریم و f_Z را بدست می‌آوریم. با قرار دادن f_X و f_Y در رابطه پیچش داریم:

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(z-x-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X+\mu_Y))^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}} \exp\left[-\frac{\left(x-\frac{\sigma_X^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right)^2}\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X+\mu_Y))^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}} \exp\left[-\frac{\left(x-\frac{\sigma_X^2(z-\mu_Y)+\sigma_Y^2\mu_X}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_X\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}\right)^2}\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

پس

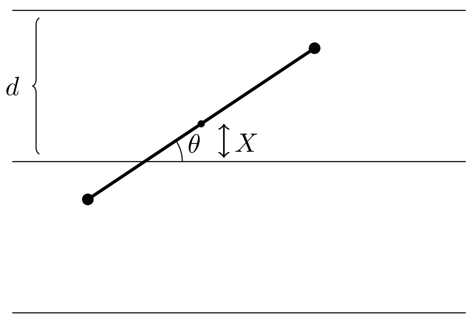
$$
f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}} \exp\left[-\frac{(z-(\mu_X+\mu_Y))^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right]
$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$
X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)
$$

۳ مسأله سوزن بوفون

مثال ۶ *سطح یک میز بوسیله خطوط موازی و با فاصله یکسان از هم به طول d تقسیم‌بندی شده است. سوزنی به طول ℓ ($\ell \leq d$) به تصادف روی میز پرتاب می‌شود. احتمال این‌که سوزن یکی از خطوط موازی را قطع کند چقدر است؟*



شکل ۳: سوزن و خطوط موازی

پاسخ *متغیر تصادفی X را برابر فاصله وسط سوزن از نزدیک‌ترین خط به آن و Θ را برابر زاویه حاده‌ای که راستای سوزن با خط‌ها می‌سازد در نظر می‌گیریم. به وضوح:*

$$
0 \leq X \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}
$$

می‌توان فرض کرد X و Θ مستقل‌اند و دارای توزیع یکنواخت هستند. سوزن در صورتی یکی از خطوط را قطع می‌کند که $X \le \frac{\ell}{2}\sin\Theta$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\Pr\left\{X \le \tfrac{\ell}{2}\sin\Theta\right\} &= \iint_{x\le\frac{\ell}{2}\sin\theta} f_{X,\Theta}(x,\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\ell}{2}\sin\theta}\left(\tfrac{1}{\frac{d}{2}}\cdot\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{\pi d}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ell}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\ell}{\pi d}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\ell}{\pi d}
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه مقدار احتمال نهایی بر حسب عدد π است، این مسأله می‌تواند مبنایی برای محاسبه تقریبی عدد π با استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری قرار گیرد. بدین ترتیب که تعداد بسیار زیادی آزمایش تصادفی برای محاسبه نسبت تعداد حالات مطلوب به کل حالت‌ها صورت می‌گیرد. به چنین روش‌هایی در اصطلاح روش مونته‌کارلو[3] گفته می‌شود که می‌تواند برای محاسبه تقریبی مسائل پیچیده‌ای که حل تحلیلی آنها دشوار می‌باشد، به‌کار رود. این روش اولین بار در سال ۱۹۴۶ توسط استنی‌سواف اولام[4]، ریاضی‌دان معروف لهستانی-امریکایی، ابداع شد و این نام را به خاطر علاقه عمویش به کازینوی مونته‌کارلو در موناکو بر آن نهاد. در مورد مسأله سوزن بوفون حتی بدون استفاده از شبیه‌سازی کامپیوتری و با آزمایش دستی می‌توان تقریب مناسبی برای عدد π بدست آورد[5]

[3] Monte Carlo Method

[4] Stanislaw Ulam

[5] به وبسایت زیر مراجعه کنید: http://mste.illinois.edu/activity/buffon/.