دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن	۲ اردیبهشت ۹۳

جلسه‌ی ۱۶: ادامه متغیر تصادفی پیوسته

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارنده: امیر شعبان جولا و محمدصالح یاشیخ‌اکبری*

۱ یادآوری

متغیر تصادفی گسسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع جرم احتمال	$p_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$P\{X \in A\} = \sum_{x \in A} p_X(x)$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \sum_{x \leq t} p_X(x)$

متغیر تصادفی پیوسته	
تابع توزیع تجمعی	$F_X(t)$
تابع چگالی احتمال	$f_X(x)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک بازه	$\Pr\{X \in A\} = \int_A f_X(x)dx$
محاسبه‌ی تابع توزیع تجمعی	$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$

۲ توزیع نرمال

در ادامه‌ی بحث جلسه‌ی گذشته، $\phi(x)$ را به عنوان تابع توزیع تجمعی متغیر نرمال $N(0,1)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

در حالت کلی برای $N(\mu, \sigma)$ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} dx$$

با تغییر متغیر $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ داریم:

$$= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{y^۲}{۲}} dy$$
$$= \phi(\frac{t-\mu}{\sigma})$$

البته با توجه به اینکه متغیر تصادفی $\frac{X-\mu}{\sigma}$ متغیر نرمال استاندارد است، این محاسبه را می‌توانستیم به صورت سریع‌تری و بدون وارد شدن به محاسبات انتگرالی جدید انجام دهیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ *X متغیری تصادفی با تابع توزیع نرمال $N(\mu, \sigma)$ است. داریم:*

$$\Pr\{a \leq X \leq b\} = \Pr\{\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\} = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

$$\Pr\{X \geq \mu + \sigma\} = ۱ - \Pr\{X \leq \mu + \sigma\} = ۱ - \Phi(۱) = ۰/۱۵۸۷$$

$$\Pr\{X \leq \mu - \sigma\} = \phi(-۱) = ۰/۱۵۸۷$$

$$\Pr\{|X-\mu| > \sigma\} = ۲\phi(-۱) = ۲ \times ۰/۱۵۸۷$$

$$\Pr\{|X-\mu| > ۲\sigma\} = ۲\phi(-۲) = ۲ \times ۰/۰۲۲۸$$

$$\Pr\{|X-\mu| > ۳\sigma\} = ۲\phi(-۳) = ۲ \times ۰/۰۰۱۳$$

۳ تقریب نرمال توزیع دوجمله‌ای

شکل ظاهری تابع جرم احتمال متغیر تصادفی دوجمله‌ای و تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال (با میانگین و واریانس برابر) تقریباً منطبق به نظر می‌رسد. با توجه به اینکه تابع چگالی و تابع جرم احتمال برای مقایسه کردن مناسب نیستند، بهتر است بگوییم تابع توزیع احتمال تجمعی متغیر تصادفی نرمال تقریب خوبی برای تابع توزیع احتمال تجمعی متغیر تصادفی دوجمله‌ای (با میانگین و واریانس برابر) است. قضیه زیر استفاده از چنین تقریبی را برای ما مجاز می‌کند.

قضیه ۱ (قضیه‌ی دو مواور-لاپلاس) *اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشد، برای هر دو عدد a و b با شرط $a < b$، داریم:*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left\{a \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(۱-p))}} \leq b\right\} \simeq \phi(b) - \phi(a)$$

نکته ۱ *اگر تعداد زیادی متغیر تصادفی مستقل از هم داشته باشیم، توزیع تجمعی احتمال متغیر تصادفی مجموع آن‌ها به میزان خوبی به توزیع تجمعی احتمال متغیر تصادفی نرمال نزدیک می‌شود. این موضوع، با عنوان قضیه‌ی حد مرکزی شناخته می‌شود که در آینده به بررسی آن خواهیم پرداخت. از آنجا که می‌توان متغیر تصادفی با توزیع دو جمله‌ای را به صورت مجموع متغیرهای تصادفی برنولی مستقل در نظر گرفت، قضیه‌ی بالا را می‌توان با این دیدگاه نیز مورد توجه قرار داد.*

۴ توزیع نمایی

تابع توزیع تجمعی احتمال برای توزیع نمایی بدین شکل است:

$$F_X(x) = \begin{cases} ۱ - e^{-\lambda x} & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

با مشتق گرفتن از تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی احتمال به دست می‌آید:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

طبق تعریف متوسط و واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته:

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{۰}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{۱}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(x) = \mathrm{E}[X^۲] - (\mathrm{E}[X])^۲ = \sigma_X^۲ = \frac{۱}{\lambda^۲}$$

نکته ۲ *توزیع نمایی، بدون حافظه است.*

برهان. *برای هر* $s, t \geq ۰$

$$\begin{aligned} \Pr\{X > s + t | X > t\} &= \frac{\Pr\{X > s + t, X > t\}}{\Pr\{X > t\}} \\ &= \frac{۱ - \Pr\{X \leq t + s\}}{۱ - \Pr\{X \leq t\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= \Pr\{X \geq s\} \end{aligned}$$

■

۵ توزیع احتمال توأم X و Y

متغیرهای تصادفی گسسته	
تابع جرم احتمال توأم X و Y	$p_{X,Y}(x,y)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک مجموعه	$\Pr\{(x,y)\in A\} = \sum\sum_{(x,y)\in A} p_{X,Y}(x,y)$
تابع توزیع کناری	$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$
احتمال شرطی	$p_{X\|Y}(x\|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

متغیرهای تصادفی پیوسته	
تابع چگالی احتمال توأم X و Y	$f_{X,Y}(x,y)$
محاسبه‌ی احتمال روی یک سطح	$\Pr\{(x,y)\in A\} = \iint\limits_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
تابع توزیع کناری	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$
احتمال شرطی	$f_{X\|Y}(x\|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

نکته ۳ *به یاد آورید که تابع چگالی احتمال یک متغیره را به کمک عبارت زیر، تفسیر احتمالی کردیم:*

$$\Pr\{x \le X \le x+dx\} \simeq f_X(x)dx$$

به طور مشابه با استفاده از بسط زیر، می‌توان تابع چگالی احتمال توأم را تفسیر احتمالی نمود:

$$\Pr\{x \le X \le x+dx, y \le Y \le y+dy\} \simeq f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

همچنین، رابطه‌ی احتمال شرطی را به صورت زیر می‌توان تفسیر کرد:

$$\begin{aligned}\Pr\{x \le X \le x+dx | y \le Y \le y+dy\} &= \frac{\Pr\{x \le X \le x+dx\,,\, y \le Y \le y+dy\ \}}{\Pr\{y \le Y \le y+dy\}}\\ &= \frac{f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}{f_Y(y)\,dy}\\ &= f_{X|Y}(x|y)\,dx\end{aligned}$$

تعریف ۱ (تابع توزیع تجمعی توأم)

$$\begin{aligned}F_{X,Y}(t,u) &= \Pr\{X \le t, Y \le u\}\\ &= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{u} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

مثال ۲ *تابع دو متغیره‌ی زیر را در نظر بگیرید.*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & x^۲ + y^۲ \le ۱ \\ ۰ & oth. \end{cases}$$

برای این که این تابع، یک تابع چگالی احتمال توأم باشد باید احتمال کل برابر ۱ باشد.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy &= \iint_{x_۲+y^۲\le ۱} c\,dx\,dy \\ &= \int_{-۱}^{۱}\int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} c\,dx\,dy \\ &= \int_{-۱}^{۱} ۲c\sqrt{۱-x^۲}dx = c\pi = ۱ \\ &\Rightarrow c = \frac{۱}{\pi} \end{aligned}$$

تابع توزیع کناری:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{۱-x^۲}}^{\sqrt{۱-x^۲}} \frac{۱}{\pi}dy = \frac{۲}{\pi}\sqrt{۱-x^۲} & |x| < ۱ \\ ۰ & |x| > ۱ \end{cases}$$

نکته ۴ *مثال فوق یک روش برای انتخاب یک عدد تصادفی بین ۱− و ۱ ارائه می‌کند: انتخاب یک نقطه به طور کاملا تصادفی (یکنواخت) در دایره واحد و اندازه‌گیری طول آن. دقت کنید با اینکه این روش عددی تصادفی بین ۱− و ۱ برای ما تولید می‌کند، اما عدد حاصل دیگر کاملاً تصادفی (یکنواخت) نیست و تابع چگالی احتمال آن به صورتی است که محاسبه کردیم. شایسته است که توجه شود منظور از یک متغیر کاملاً تصادفی، متغیری است که تابع چگالی احتمال آن روی برد آن ثابت (یکنواخت) است. همچنین وقتی گفته می‌شود از یک بازه (سطح یا فضا) یک نقطه به تصادف انتخاب می‌شود، باز هم منظور توزیع یکنواخت است.*

گزاره ۱ *برای هر تابع $g(x,y)$ با مقدار حقیقی، داریم:*

$$\mathrm{E}[g(x,y)] = \iint g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

مثال ۳ *به طور متوسط، فاصله‌ی نقاط روی دایره‌ی به شعاع واحد از مبدأ چقدر است؟*
راه حل اول:

$$\mathrm{E}[\sqrt{X^۲+Y^۲}] = \iint_{x^۲+y^۲\le ۱} \sqrt{x^۲+y^۲}\,\frac{۱}{\pi}\,dx\,dy = \frac{۲}{۳}$$

راه حل دوم:
با استفاده از تغییر متغیر $Z = \sqrt{X^۲ + Y^۲}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} ۰ \le z \le ۱ \quad \Rightarrow \quad F_Z(z) &= \Pr\{Z \le z\} \\ &= \Pr\{\sqrt{X^۲ + Y^۲} \le z\} \\ &= \iint\limits_{x^۲+y^۲ \le z} \frac{۱}{\pi}\, dx\, dy \\ &= \frac{\pi z^۲}{\pi} = z^۲ \end{aligned}$$

پس تابع توزیع تجمعی Z بدین شکل خواهد بود:

$$F_Z(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۰ \\ z^۲ & ۰ \le z \le ۱ \\ ۱ & z > ۱ \end{cases}$$

می‌دانیم تابع چگالی احتمال Z، با مشتق گرفتن از تابع توزیع تجمعی احتمال آن به دست می‌آید؛ سپس با استفاده از تعریف متوسط متغیرهای تصادفی پیوسته می‌توان نوشت:

$$\mathrm{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_{۰}^{۱} z(۲z) dz = \frac{۲}{۳}$$

سؤال ۱ احتمال اینکه وتری از دایره که به تصادف انتخاب شده است بزرگتر از ضلع مثلث محاطی متساوی الاضلاع آن دایره باشد، چقدر است؟