به نام خدا

دانشکده‌ی علوم ریاضی

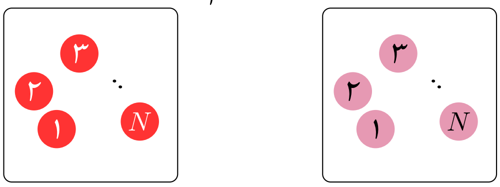
احتمال و کاربرد آن | ۳۱ فروردین ۱۳۹۳

جلسه‌ی ۱۵: متغیرهای تصادفی پیوسته

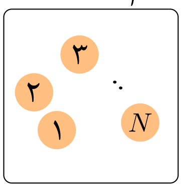
مدرّس: دکتر شهرام خزائی | *نگارنده: علی عاشوری، محمدحسن گل محمدیان طهرانی*

۱ مروری بر متغیر تصادفی گسسته

مثال ۱ *دو کیسه داریم که در هر کدام N گوی قرار دارد. از هر کیسه یک گوی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال این که (۱) شماره دو گوی با یکدیگر برابر باشد. (۲) شماره گوی اول دو برابر شماره گوی دوم باشد!*



مثال ۲ *یک کیسه داریم که حاوی N گوی است. دو گوی به طور متوالی از این کیسه بر می‌داریم. مطلوب است احتمال این که (۱) شماره دو گوی با یکدیگر برابر باشد. (۲) شماره گوی اول دو برابر شماره گوی دوم باشد!*



دو مثال بالا را برای $N = ۴$ حل می‌نماییم:

حل مثال ۱ دو متغیر تصادفی به نام‌های $X_۱$ و $X_۲$ تعریف می‌کنیم.

$$X_۱ := \text{شماره اولین گوی از کیسه اول}$$

$$X_۲ := \text{شماره اولین گوی از کیسه دوم}$$

مطلوب سؤال مقادیر زیرند:

$$P(X_۱ = X_۲) = ?$$
$$P(X_۱ = ۲X_۲) = ?$$

X_1 و X_2 مستقلند. چرا که ضرب توابع توزیع حاشیه‌ای (اعداد سرستون‌ها و سرردیف‌ها) برابر عددی است که در تقاطع آن‌ها آمده است.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = X_2) &= \frac{1}{N} = \frac{1}{4} \\
P(X_1 = 2X_2) &= P(X_1 = 2X_2 = 2) + P(X_1 = 2X_2 = 4) \\
&= P(X_1 = 2 \wedge X_2 = 1) + P(X_1 = 4 \wedge X_2 = 2) \\
&= P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 4)P(X_2 = 2) \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\frac{1}{16} = \frac{2}{16 \times 16} = \frac{1}{128}
\end{aligned}
$$

(آ) مثال ۱

$P(X_2)$	X_2 \ X_1	۱	۲	۳	۴
$\frac{1}{4}$	۴	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{4}$	۳	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{4}$	۲	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{4}$	۱	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
	$P(X_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(ب) مثال ۲

$P(X_2)$	X_2 \ X_1	۱	۲	۳	۴
$\frac{1}{4}$	۴	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$\frac{1}{4}$	۳	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{4}$	۲	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{4}$	۱	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
	$P(X_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

جدول ۱: توزیع احتمال توأم دو متغیر تصادفی

حل مثال ۲ برای حل این مثال نیز از دو متغیر تصادفی به نام‌های X_1 و X_2 استفاده می‌کنیم.

$$X_1 :=$$ شماره اولین گوی از کیسه

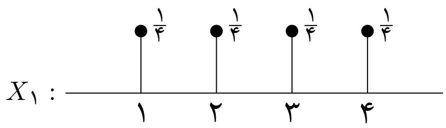
$$X_2 :=$$ شماره دومین گوی از کیسه

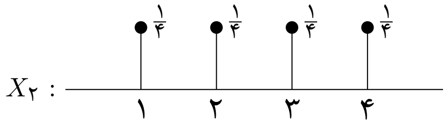
مطلوب این است که از مقدار احتمال‌های زیر با خبر شویم.

$$P(X_1 = X_2) = ?$$

$$P(X_1 = 2X_2) = ?$$

X_1 و X_2 مستقل نیستند. چون ضرب اعداد سرستون و ردیف‌ها باید خانه‌ی تقاطع را بدهد. در هر دو مثال تابع جرم احتمال هر یک از دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 به شرح زیر است، در حالیکه دیدیم تابع توزیع احتمال توأمشان با هم برابر نیست.





با توجه به جدول ۱ب داریم:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = X_2) &= 0 \quad \text{(قطر اصلی جدول مثال ۲)} \\
P(X_1 = 2X_2) &= P(X_1 = 2X_2 = 2) + P(X_1 = 2X_2 = 4) \\
&= P(X_1 = 2 \wedge X_2 = 1) + P(X_1 = 4 \wedge X_2 = 2) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

نتیجه ۱ *با داشتن احتمال X_1 و X_2 به تنهایی نمی‌توان احتمال توأم به دست آورد.*

۱.۱ مروری بر مباحث توزیع با دومتغیر تصادفی

۱. توزیع توأم: $P_{X,Y}(x,y)$ تابعی دومتغیره است.

۲. توزیع حاشیه ای: $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$.

۳. احتمال شرطی: $P_{X|Y}(x,y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y y}$.

۴. تعریف استقلال: $(\forall k_1, k_2)\ P_{X,Y}(k_1,k_2) = P_{X_1}(k_1)P_{X_2}(k_2)$.

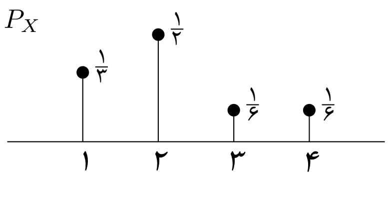
۲.۱ توسعه مفاهیم برای سه متغیر تصادفی و بیشتر

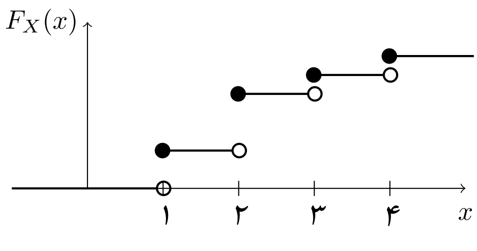
۱. $P_{XYZ}(x,y,z)$: احتمال این که $X = x$، $Y = y$ و $Z = z$ باشد.

۲. $P_{X|Y,Z}(x|y,z)$: احتمال این که x به شرط y اتفاق بیفتد و $Z = z$.

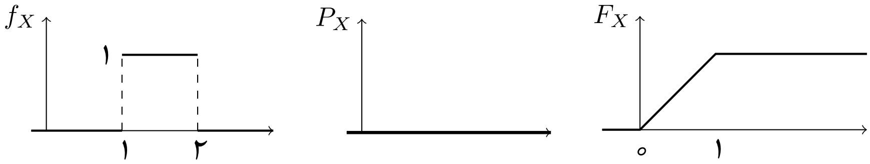
۲ متغیر تصادفی پیوسته

مثال ۳ *یادآوری یک متغیر تصادفی گسسته*





مثال ۴ متغیر تصادفی پیوسته *(توزیع یکنواخت [۱،۲])*



همین‌طور که مشاهده می‌کنید؛ تابع جرم احتمال برای همه مقادیر متغیرتصادفی X مقدار صفر را بدست می‌دهد. از این رو در حالت پیوسته، مفهوم جرم احتمال (P_X) معنای درستی پیدا نمی‌کند و به جای آن از تابع چگالی احتمال (f_X) استفاده می‌شود.

۱.۲ تابع چگالی احتمال

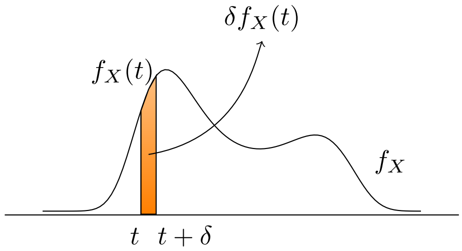
تعریف ۱ *تابعی که سه خاصیت زیر را داشته باشد، تابع چگالی احتمال*[1] نامیده می‌شود.

۱. $f_X(x) \geq 0$

۲. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

۳. *f_X انتگرال پذیر باشد. (عموما پیوسته)*

نکته ۱ *احتمال این که $x \leq X \leq x + \delta$ حدودا برابر است با: $f_X(x)\delta$.*



$$P(t \leq X \leq t + \delta) \simeq f_X(t)\delta = \int_t^{t+\delta} f_X(x)dx$$

۲.۲ تابع توزیع احتمال تجمعی پیوسته

یادآوری: تابع توزیع تجمعی[2] در حالت گسسته به صورت زیر تعریف شد.

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P_X(k)$$

تعریف ۲ (تعمیم تابع توزیع تجمعی در حالت پیوسته)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

[1] Probability Density Function (PDF)
[2] Cumulative Distribution Function (CDF)

نتیجه ۲

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a\leq x\leq b} P_X(x) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x = F_X(b) - F_X(a)$$

در حقیقت تابع احتمال (P)، از روی انتگرال تابع چگالی (f_X) تعریف می‌شود و به تبع آن تابع توزیع احتمال تجمعی (F_X) معنا می‌یابد.

خلاصه مباحث فوق:

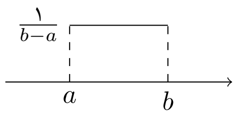
۱. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = ۱$

۲. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx$

۳. $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$

مثال ۵ توزیع یکنواخت $U[a,b]$

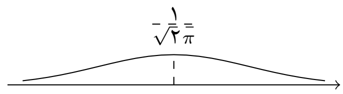
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{۱}{b-a} & a \leq x \leq b \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



مثال ۶ توزیع نرمال *(توزیع گوسی)*

توزیع نرمال استاندارد ($N(\mu,\sigma) \to N(۰,۱)$) از قرار زیر است:

$$f_X(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\dfrac{x^۲}{۲}}$$



منظور از $N(\mu,\sigma)$ متغیر تصادفی توزیع نرمال با متوسط μ و انحراف‌معیار σ است.

۳.۲ امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته

تعریف ۳

$$E[X] = \sum x P_x(x) \quad \text{(حالت گسسته)}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \quad \text{(حالت پیوسته)}$$

۴.۲ واریانس متغیر تصادفی پیوسته

تعریف واریانس در حالت پیوسته تغییری نیافته است:

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^۲\right] = E\left[X^۲\right] - E\left[X\right]^۲$$

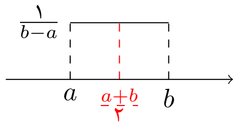
$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^۲ f_X(x)\mathrm{d}x$$

نکته ۲ $E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$

محاسبه متوسط و واریانس متغیرهای مثال‌های فوق:

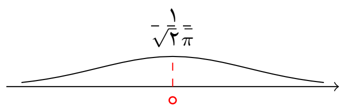
تکمله مثال ۵ (توزیع یکنواخت)

$$E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$$
$$Var(X) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}$$



تکمله مثال ۶ (توزیع نرمال)

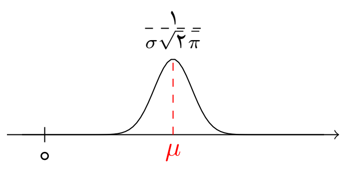
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x = 0$$
$$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - 0)^2 f_X(x) \mathrm{d}x = 1$$



سؤال ۱ *اگر X متغیر تصادفی توزیع نرمال $N(\mu, \sigma)$ باشد که μ مقدار متوسط متغیر تصادفی X و σ انحراف معیار آن است، تابع چگالی احتمال آن یعنی $f_X(x)$ چه خواهد بود؟*

پاسخ:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



در انتهای بخش آتی به اثبات این سؤال خواهیم پرداخت.

۵.۲ تغییر متغیر تصادفی

گاهی اوقات برای ساده شدن مسئله و محاسبه آن و گاهی به دلیل وجود وابستگی‌هایی که میان متغیرهای احتمالاتی ظاهر می‌شود لازم است که از هنر تعویض متغیرتصادفی بهره ببریم.
در ادامه ابتدا مثالی از تغییر متغیر می‌بینیم و سپس به تغییر متغیر خطی می‌پردازیم و پس از آن با ذکر قضیه و مثالی این مبحث را به پایان می‌بریم.

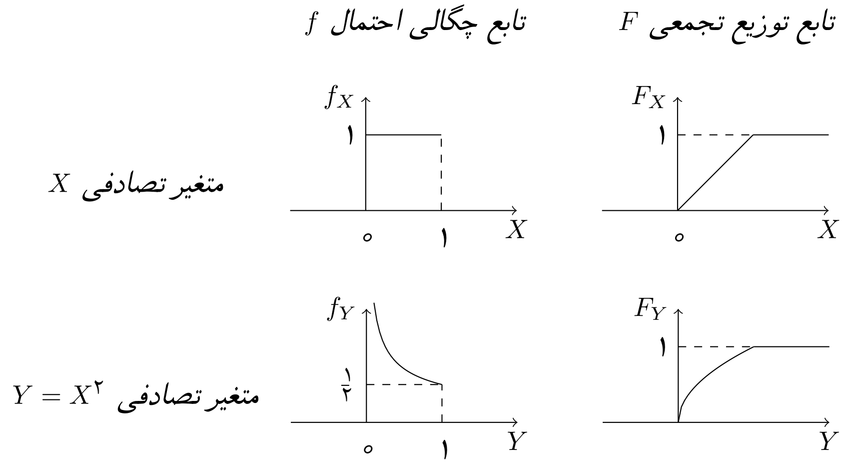
مثال ۷ *X متغیر تصادفی تابع توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. می‌خواهیم متغیر Y را وابسته به X تعریف کنیم و توابع چگالی و توزیع تجمعی دو متغیر را به دست آورده و آن‌ها را با یکدیگر مقایسه کنیم.*

$$X \sim \bigcup[0,1] \ , \quad Y = X^2$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(x^2 \le y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ P(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{\sqrt{y}-0}{1-0} = \sqrt{y} & 0 \le y \le 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

درنتیجه:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



۱.۵.۲ تغییر متغیر خطی

اولین تغییر متغیری که به ذهن متبادر می‌شود، تغییر متغیر خطی است. می‌خواهیم با دانستن متغیر تصادفی X و تابع چگالی آن (f_X) از کم و کیف متغیر تصادفی $Y = aX + b$ با خبر شویم (که در آن a و b ثابت‌اند). تابع چگالی آن

را (f_Y) با قضیه‌ای که اندکی جلوتر با آن رو به رو می‌شویم می‌توانیم بدست آوریم. نکته مهم در این تغییر متغیر این است که می‌توانیم امید ریاضی و واریانس آن را بر حسب امید ریاضی و واریانس متغیر X بنویسیم:

$$\begin{aligned} Y &= aX + b \\ E[Y] &= aE[X] + b \\ Var(Y) &= a^۲ Var(X) \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ای که در ادامه می‌آید می توان دید که با تغییر متغیر خطی، شکل تابع چگالی فقط در حد یک انبساط و انقباض و یک انتقال تغییر می‌کند.

۲.۵.۲ تغییر متغیر برای تابع چگالی دلخواه

قضیه ۱ *اگر X و $Y = h(X)$ دو متغیر تصادفی باشند و $h^{-۱}$ موجود و مشتق پذیر باشد داریم:*

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-۱}(y)\right)\left|\left(h^{-۱}(y)\right)'\right| \qquad (۱)$$

نکته ۳ *با استفاده از همین قضیه $N(۰,۱)$ (متغیر نرمال استاندارد) به $N(\mu,\sigma)$ (متغیر نرمال در حالت کلی) تبدیل می‌شود.*

برهان.

$$\begin{aligned} X &\sim N(۰,۱) \\ Y &\sim N(\mu,\sigma) \end{aligned}$$

از تغییر متغیر خطی استفاده می‌کنیم و چون متوسط و واریانس متغیر Y به ترتیب برابر با μ و $\sigma^۲$ است؛ عبارت زیر برای این کارکارساز خواهد بود:

$$\begin{aligned} h(X) &= Y = \sigma X + \mu \\ h^{-۱}(Y) &= X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \end{aligned}$$

اکنون بنابر رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^۲} \frac{۱}{\sigma} \\ &= \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} \end{aligned}$$

■