دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن — ۲۶ فروردین ۹۳

جلسه‌ی ۱۴: استقلال و توزیع احتمال توأم

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارنده: محمّدعلی اصفهانی*

۱ متغیرهای تصادفی مستقل

دیدیم که دو پیشامد مستقل اند، اگر و تنها اگر:

$$\Pr\{A, B\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\}$$

و به طور طبیعی استقلال دو متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کردیم:

تعریف ۱ *دو متغیر تصادفی X و Y مستقل‌اند، اگر و تنها اگر برای هر زوج بازه $I, J \subseteq \mathbb{R}$ پیشامدهای $X \in I$ و $Y \in J$ مستقل باشند.*

با اختیار کردن پیشامدهای $I = \{x\}$ و $J = \{y\}$ نتیجه می‌شود که اگر X و Y مستقل آنگاه داریم:

$$\Pr\{X = x, Y = y\} = \Pr\{X = x\}\Pr\{Y = y\} = p_X(x)p_Y(y)$$

در این جلسه می‌خواهیم با استفاده از مفهومی به نام توزیع توأم، تعریفی معادل اما ساده‌تر برای استقلال متغیرهای تصادفی ارائه دهیم که کار کردن با آن ساده‌تر است.

۲ احتمال توأم

آیا با صرف دانستن تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی گسسته X و Y می‌توان در مورد احتمال پیشامدهایی که به هر دو متغیر وابسته است مانند $\Pr\{X = Y\}$ اظهار نظر کرد؟ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ *فرض کنید Y و X، دو متغیر تصادفی گسسته هستند و توابع جرم احتمال آنها بدین شکل است:*

$$p_X(k) = \frac{۱}{۶},\ p_Y(k) = \frac{۱}{۶},\ k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

مقدار احتمال $\Pr\{X = Y\}$ را با انجام دو آزمایش متفاوت به دست می‌آوریم:

آزمایش ۱ *اگر در پرتاب دو تاس، X برآمد تاس اول و Y برآمد تاس دوم باشد، داریم:*

$$\Pr\{X = Y\} = \frac{۱}{۶}$$

آزمایش ۲ *اگر در پرتاب یک تاس، X برآمد وجه رویین و Y برآمد وجه زیرین تاس باشد، داریم:*

$$\Pr\{X = Y\} = ۰$$

مثال بالا نشان می‌دهد که تابع توزیع احتمال به تنهایی نمی‌تواند اطلاعی در مورد احتمال پیشامدهایی که به هر دو متغیر وابسته است به دست دهد مگر اینکه دو متغیر مستقل باشند.

تعریف ۲ *اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته روی مجموعه‌های A و B باشند که هر دو بر روی فضای نمونه‌ای یکسانی تعریف شده‌اند، تابع*

$$p_{X,Y}(x,y) = \Pr\{X=x,\, Y=y\}$$

تابع جرم احتمال توأم X و Y نامیده می‌شود.

توجه کنید که $p_{X,Y}(x,y) \geq ۰$ و نیز:

$$\sum_{x\in A,}\sum_{y\in B} p(x,y) = ۱$$

تعریف ۳ *تابع جرم احتمال کناری[1] X بدین شکل محاسبه می‌شود:*

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \Pr\{X=x\} = \Pr\{X=x,\, Y\in B\} \\ &= \sum_{y\in B} \Pr\{X=x,\, Y=y\} \\ &= \sum_{y\in B} p(x,y). \end{aligned}$$

به طور مشابه، داریم:

$$p_Y(y) = \sum_{x\in A} p(x,y).$$

مثال ۲ *فرض کنید تابع جرم احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته‌ی X و Y به صورت زیر باشد:*

$$p(x,y) = \begin{cases} c(x^۲+y^۲) & (x,y) = (۱,۱),(۱,۲),(-۱,۲) \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

مقدار ثابت c و توابع احتمال حاشیه‌ای X و Y را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود. داریم

$$c[(۱^۲+۱^۲)+(۱^۲+۲^۲)+((-۱)^۲+۲^۲)] = ۱۲c = ۱ \Longrightarrow c = \frac{۱}{۱۲}$$

دراین‌صورت جدول زیر توصیف کاملی از تابع جرم احتمال توأم به ما می‌دهد که منظور از خانه خالی مقدار صفر است.

جدول ۱: تابع جرم احتمال توأم مثال ۲

	$X=-۱$	$X=۱$
$Y=۱$		$\frac{۱}{۶}$
$Y=۲$	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۵}{۱۲}$

[1] Marginal probability mass function

حال به راحتی با جمع بستن روی ستون‌ها و سطرها می‌توان توابع جرم احتمال کناری را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$p_X(-۱) = \frac{۵}{۱۲},\ p_X(۱) = \frac{۱}{۶} + \frac{۵}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲}$$

$$p_Y(۱) = \frac{۱}{۶},\ p_Y(۲) = \frac{۵}{۱۲} + \frac{۵}{۱۲} = \frac{۵}{۶}$$

مثال ۳ *توابع جرم احتمال توأم مثال ۳، در جدول‌های زیر آمده است. در آزمایش اول چون برآمد تاس‌ها مستقلند همه درایه‌های جدول همگی یکسان و برابر با $\frac{۱}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶}$ است. اما در آزمایش دوم با توجه به اینکه همواره مجموع سطوح مقابل یک تاس هفت می‌شود، فقط برای این زوج‌ها احتمال توأم ناصفر و برابر $\frac{۱}{۶}$ است. در هر دو حالت، مقدار احتمال پیشامد مطلوب، یعنی $\Pr\{X = Y\}$، برابر با مجموع اعداد روی قطر اصلی جدول است.*

جدول ۲: آزمایش اول

	$X=۱$	$X=۲$	$X=۳$	$X=۴$	$X=۵$	$X=۶$
$Y=۱$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$Y=۲$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$Y=۳$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$Y=۴$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$Y=۵$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$Y=۶$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

جدول ۳: آزمایش دوم

	$X=۱$	$X=۲$	$X=۳$	$X=۴$	$X=۵$	$X=۶$
$Y=۱$	۰	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$
$Y=۲$	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰
$Y=۳$	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰
$Y=۴$	۰	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	۰
$Y=۵$	۰	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	۰	۰
$Y=۶$	$\frac{۱}{۶}$	۰	۰	۰	۰	۰

۳ تابع توزیع تجمعی توأم و ادامه استقلال

حال به بحث ابتدای جسله، یعنی استقلال دو متغیر تصادفی باز می‌گردیم. طبق تعریفی که قبلا از متغیرهای تصادفی مستقل ارائه کردیم، می‌توان نشان داد اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل گسسته باشند، آنگاه تابع جرم احتمال توأم آن‌ها را می‌توان به صورت حاصلضرب توزیع جرم احتمال متغیرهای تصادفی کناری نوشت. یعنی:

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)\, p_Y(y)$$

پیش از این، تابع توزیع تجمعی احتمال را برای یک متغیر تصادفی بدین شکل تعریف کردیم:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\}$$

برای دو متغیر تصادفی X و Y با تابع جرم احتمال توأم $p_{X,Y}(x,y)$، تابع توزیع تجمعی احتمال توأم به طور طبیعی بدین شکل تعریف می‌شود.

تعریف ۴ (تابع توزیع تجمعی احتمال توأم)

$$F_{XY}(t,u) = \Pr\{X \leq t,\, Y \leq u\} = \sum_{x \leq t} \sum_{y \leq u} p_{XY}(x,y).$$

می‌توان نشان داد اگر X و Y مستقل باشند، تجزیه ضربی برای تابع توزیع تجمعی احتمال توأم نیز برقرار است:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y)$$

خوشبختانه به راحتی می‌توان نشان داد اگر تابع جرم احتمال توأم و یا تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی به صورت ضربی تجزیه شوند، آن دو متغیر مستقل‌اند.