دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن — ۱۷ اسفند ۹۲

جلسه‌ی ۹: استقلال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — نگارنده: سیاوش ریاحی

۱ دو پیشامد مستقل

در جلسات قبل با احتمال شرطی و روابط آن آشنا شدیم. برای دو پیشامد A و B احتمال وقوع A به شرط وقوع B را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(AB)/\Pr(B)$$

احتمال وقوع A به شرط B در حالت کلی برابر با احتمال وقوع A نیست، ولی در صورتی که چنین باشد؛ یعنی:

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$$

می‌توان گفت وقوع B اطلاعات بیش‌تری در مورد وقوع A به ما نمی‌دهد و به عبارت دیگر B و A از یک‌دیگر **مستقل** هستند.

توجه کنید که **مستقل** بودن و **مجزا** بودن، کاملاً متفاوت هستند. بنابه تعریف، دو پیشامد مجزا با یک‌دیگر اشتراک ندارند. مثلاً اگر دو پیشامد A و B مجزا باشند که $\Pr(A), \Pr(B) \neq 0$؛ داریم:

$$\begin{cases} \Pr(A \mid B) = \Pr(AB)/\Pr(B) = 0 \neq \Pr(A) \\ \Pr(A \mid B^c) = \Pr(AB^c)/\Pr(B^c) = \Pr(A)/\Pr(B^c) \neq \Pr(A) \end{cases}$$

پس وقوع یا عدم وقوع B اطلاعاتی در باره‌ی وقوع A در اختیار ما قرار می‌دهد.

۱.۱ تعیین استقلال از روی احتمال

در بخش قبل، تعریفی شهودی از استقلال بیان کردیم که می‌تواند مبنایی برای تعریف استقلال دو پیشامد باشد. اما این تعریف برای پیشامدهای با احتمال صفر مناسب نیست. بنابر قسمت قبل داریم:

$$\Pr(A \mid B) = \Pr(AB)/\Pr(B) = \Pr(A)$$
$$\Rightarrow \Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$$

رابطه‌ی فوق را مبنای تعریف دو پیشامد مستقل قرار می‌دهیم.

تعریف دو پیشامد A و B را مستقل گویند، هرگاه رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$$

اگر دو پیشامد مستقل نباشند، به آن‌ها **وابسته** می‌گوییم.

مثال ۱ *دو پیشامد ناتهی مجزای A و B وابسته هستند، زیرا* $\Pr(AB) = 0$ *اما* $\Pr(A)\Pr(B) \neq 0$.

مثال ۲ *سکه‌ی سالمی را ۱۰۱ بار پرتاب می‌کنیم. اگر در ۱۰۰ بار اول شیر ظاهر شده‌باشد، احتمال آن که در پرتاب ۱۰۱ام نیز شیر بیاید، چقدر است؟*
فضای نمونه‌ای این آزمایش $|\Omega| = 2^{101}$ *برآمد هم احتمال دارد. پیشامدهای زیر را درنظر بگیرید:*

A: *پیشامد آن که در بار ۱۰۱ام شیر بیاید.*

B: *پیشامد آن که در ۱۰۰ بار اول شیر بیاید.*

داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \Pr(B) = 2/2^{101} \\ \Pr(A) = 2^{100}/2^{101} = 1/2 \\ \Pr(AB) = 1/2^{101} \end{array}\right\} \Rightarrow \Pr(A \mid B) = \Pr(AB)/\Pr(B) = \frac{1/2^{101}}{2/2^{101}} = \frac{1}{2} = \Pr(A)$$

پس دو پیشامد B و A مستقل هستند.

مثال ۳ *از دسته‌ای کارت بازی، یک کارت به تصادف انتخاب می‌کنیم. آیا پیشامدهای زیر مستقل هستند؟*

A: *کارت تک باشد.*

D: *خال کارت خشت باشد.*

برای بررسی باید $\Pr(A)$، $\Pr(D)$ *و* $\Pr(AD)$ *را محاسبه کنیم:*

$$\left.\begin{array}{l} \Pr(A) = 4/52 \\ \Pr(D) = 13/52 \\ \Pr(AD) = 1/52 \end{array}\right\} \Rightarrow \Pr(A) \times \Pr(D) = \frac{4}{52} \times \frac{13}{52} = \frac{1}{52} = \Pr(AD)$$

پس A و D مستقل هستند.

لم • اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، A و B^c نیز مستقل هستند.

اثبات • داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \Pr(A) = \Pr(AB) + \Pr(AB^c) \Rightarrow \Pr(AB^c) = \Pr(A) - \Pr(AB) \\ \Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B) \\ 1 - \Pr(B) = \Pr(B^c) \end{array}\right\} \Rightarrow \Pr(AB^c) = \Pr(A) - \Pr(A)\Pr(B)$$
$$= \Pr(A)[1 - \Pr(B)] = \Pr(A)\Pr(B^c)$$

نتیجه ۱ *اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، A^c و B^c نیز مستقل هستند.*

مثال ۴ *از یک دسته کارت بازی، کارتی را به تصادف و با جاگذاری، انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که تک، زودتر از صورت بیاید، چقدر است؟*
پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

E: *تک زودتر از صورت ظاهر شود.*

A_n: $n-۱$ کارت اول، شامل تک یا صورت نباشد و کارت nام تک باشد.

B_n: کارت nام تک یا صورت نباشد.

T_n: کارت nام تک باشد.

می‌توان A_n را به صورت زیر نوشت:

$$A_n = B_۱ B_۲ B_۳ \cdots B_{n-۱} T_n$$

چون $B_۱, \cdots, B_{n-۱}, T_n$ پیشامدهای مستقل هستند، می‌توان گفت:

$$\Pr(A_n) = (\frac{۳۶}{۵۲})^{n-۱} \times \frac{۴}{۵۲}$$

بنابر قاعده احتمال کل و با توجه به مجزا بودن A_nها داریم:

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} \Pr(A_n) \\ &= \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۹}{۱۳})^{n-۱} \frac{۱}{۱۳} \\ &= \frac{۱}{۱۳} \times \frac{۱}{۱ - \frac{۹}{۱۳}} \\ &= \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

یک روش خلاقانه‌ی حل این مثال، به صورت زیر است:
پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

E: تک زودتر از صورت ظاهر شود.

A: اولین کارت تک باشد.

B: کارت اول نه تک باشد نه صورت.

F: اولین کارت صورت باشد.

از قانون احتمال کل و استقلال پیشامدهای E و B داریم:

$$\begin{aligned} \Pr(E) &= \Pr(E \mid A)\Pr(A) + \Pr(E \mid F)\Pr(F) + \Pr(E \mid B)\Pr(B) \\ &= ۱ \times \frac{۴}{۵۲} + ۰ \times \frac{۱۲}{۵۲} + \Pr(E) \times \frac{۳۶}{۵۲} \\ \Rightarrow \Pr(E) &= \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

نکته ۱ با استدلالی مشابه در حالت کلی می‌توان نشان داد اگر A و B دو پیشامد جدا از هم یک آزمایش باشند و دنباله‌ای از آزمایش‌های مستقل را درنظر بگیریم، احتمال این که A زودتر از B اتفاق بیفتد برابر است با:

$$\frac{\Pr(A)}{\Pr(A) + \Pr(B)}$$

مثال ۵ *از یک دسته کارت بازی، کارتی را به تصادف و بدون جاگذاری، انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که تک زودتر از صورت بیاید، چقدر است؟*
پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

E: *تک زودتر از صورت ظاهر شود.*

A_n: *کارت nام تک باشد.*

B_n: n *کارت اول تک یا صورت نباشد.*

بنابر تعاریف فوق، داریم:

$$E = \bigcup_{n=۰}^{۳۶} B_n A_{n+۱}$$

چون $B_i A_{i+۱}$ها از هم مجزا هستند، پس:

$$\begin{aligned}
\Pr(E) &= \bigcup_{n=۰}^{۳۶} \Pr(B_n A_{n+۱}) \\
&= \sum_{n=۰}^{۳۶} \Pr(B_n A_{n+۱}) \\
&= \sum_{n=۰}^{۳۶} \Pr(B_n)\Pr(A_{n+۱} \mid B_n) \\
&= \sum_{n=۰}^{۳۶} \frac{\binom{۳۶}{n}}{\binom{۵۲}{n}} \times \frac{۴}{۵۲-n} = \frac{۱}{۴}
\end{aligned}$$

۱.۱.۱ استقلال شرطی دو پیشامد

تعریف • اگر A، B و C سه پیشامد باشند، می‌گوییم A، B به شرط C مستقل هستند اگر:

$$\Pr(AB \mid C) = \Pr(A \mid C)\Pr(B \mid C)$$

این تعریف با شهود ما از استقلال و پیشامد شرطی نیز سازگار است.

مثال ۶ *دو سکه‌ی ناسالم داریم که احتمال شیر آمدن در آن‌ها، به صورت زیر است:*

سکه‌ی اول: $\Pr(H) = ۰/۹$

سکه‌ی دوم: $\Pr(H) = ۰/۱$

آزمایش بدین صورت است که سکه‌ی سالمی را پرتاب می‌کنیم و در صورت شیر آمدن، سکه‌ی اول و در غیر این صورت سکه‌ی دوم را انتخاب کنیم (به عبارت دیگر با احتمال ۱/۲ یکی از سکه‌ها را انتخاب می‌کنیم).
حال می‌خواهیم احتمال توأم شیر آمدن در پرتاب‌های n و $n+۱$ام را بیابیم. پیشامدهای زیر را درنظر بگیرید:

E: *سکه‌ی سالم شیر بیاید (سکه‌ی اول انتخاب شود).*

H_n: *در پرتاب nام آزمایش شیر بیاید.*

داریم:

$$\begin{aligned}\Pr(H_n) &= \Pr(H_n \mid E)\Pr(E) + \Pr(H_n \mid E^c)\Pr(E^c)\\ &= 1/2\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\Pr(H_nH_{n+1}) &= \Pr(H_nH_{n+1} \mid E)\Pr(E) + \Pr(H_nH_{n+1} \mid E^c)\Pr(E^c)\\ &= (0/9)^2 \times \tfrac{1}{2} + (0/1)^2 \times \tfrac{1}{2}\\ &= 0/41\end{aligned}$$

دقت کنید که در این آزمایش پیشامدهای H_n و H_{n+1} از هم مستقل نیستند زیرا رابطه

$$\Pr(H_nH_{n+1}) = \Pr(H_{n+1})\Pr(H_{n+1})$$

برقرار نیست. درواقع این دو پیشامد به شرط E (و نیز E^c) مستقل هستند.

۲ پیشامدهای مستقل

حال که با تعریف دو پیشامد مستقل آشنا شدیم، می‌خواهیم استقلال را در حالت کلی تعریف کنیم. ممکن است تصور شود که استقلال دوبه‌دوی پیشامدها، استقلال تمام پیشامدها را تضمین می‌کند. استقلال دوبه‌دو اگرچه لازم است، ولی کافی نیست.

مثلاً اگر $A_1, A_1, \cdots, A_7$ مستقل باشند، انتظار داریم روابطی مانند رابطه‌ی زیر برقرار باشند:

$$\Pr(A_1A_2^c(A_5 \cup A_6^c)) \mid A_3A_4A_7^c) = \Pr(A_1A_2^c(A_5 \cup A_6^c))$$

اما چنین روابطی را از روی استقلال دوبه‌دوی پیشامدها نمی‌توان استنتاج کرد. بنا براین تعریفی که برای استقلال چند پیشامد در نظر می‌گیریم، به صورت زیر است.

تعریف پیشامدهای $\{A_1, A_1, \cdots, A_n\}$ را مستقل گویند، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ای مانند $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}\}$ از مجموعه‌ی فوق، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\Pr(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}) = \Pr(A_{i_1})\Pr(A_{i_2})\cdots\Pr(A_{i_r})$$

مثال ۷ *برای استقلال سه پیشامد A، B و C باید داشته باشیم:*

$$\begin{aligned}\Pr(ABC) &= \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)\\ \Pr(AB) &= \Pr(A)\Pr(B)\\ \Pr(AC) &= \Pr(A)\Pr(C)\\ \Pr(BC) &= \Pr(B)\Pr(C)\end{aligned}$$

مثال ۸ *سه پیشامد دوبه‌دو مستقل مثال بزنید که هر سه از هم مستقل نباشند.*
آزمایش دوبار پرتاب سکه‌ای سالم را درنظر بگیرید. پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

A: *حاصل اولین پرتاب شیر باشد.*

B: *حاصل دومین پرتاب شیر باشد.*

C: حاصل اولین و دومین پرتاب یکسان باشد.
داریم:

$$\Pr(A) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(B) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(C) = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Pr(AB) = \frac{۱}{۴} = \Pr(A)\Pr(B)$$
$$\Pr(BC) = \frac{۱}{۴} = \Pr(B)\Pr(C)$$
$$\Pr(AC) = \frac{۱}{۴} = \Pr(A)\Pr(C)$$

ولی برای $P(ABC)$ داریم:

$$\Pr(ABC) = \frac{۱}{۴} \neq \Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)$$

در واقع علت وابسته بودن A، B و C به هم، آن است که وقوع AB وقوع C را تضمین می‌کند، یعنی:

$$\Pr(C \mid AB) = ۱$$

مثال ۹ حال مسأله‌ای معروف به نام **قدم زدن تصادفی**[۱] را بیان می‌کنیم. فرض کنید شخصی روی محور یک بعدی ایستاده‌است. وی در هر مرحله به احتمال مساوی، ۱ واحد به سمت چپ یا راست حرکت می‌کند. احتمال رسیدن وی به نقطه‌ی ۱ چقدر است؟
پیشامدهای زیر را در نظر بگیرید:

A: رسیدن به نقطه‌ی ۱ با شروع از نقطه‌ی ۰.

B: رسیدن به نقطه‌ی ۰ با شروع از نقطه‌ی ۱−.

R_n: حرکت به راست در مرحله‌ی nام.

L_n: حرکت به چپ در مرحله‌ی nام.

با توجه به این که A و B مستقل هستند و $\Pr(A) = \Pr(B)$ داریم:

$$\begin{aligned}
p = \Pr(A) &= \Pr(A \mid R_۱)\Pr(R_۱) + \Pr(A \mid L_۱)\Pr(L_۱) \\
&= ۱ \times \frac{۱}{۲} + \Pr(BA) \times \frac{۱}{۲} \\
&= \frac{۱}{۲} + p^۲ \times \frac{۱}{۲} \\
&\Rightarrow p^۲ - ۲p + ۱ = ۰ \Rightarrow p = ۱
\end{aligned}$$

پس شخص با احتمال یک به نقطه‌ی ۱ می‌رسد.

[۱] RANDOM WALK

در حالت کلی می‌توان نشان داد که شخص به هر نقطه‌ی دلخواهی با احتمال یک می‌رسد.
ممکن است تصور کنید که رسیدن شخص به هر نقطه‌ای با احتمال یک بدیهی است. اما اگر بدانید که این مسأله برای حالت دو بعدی نیز صحیح است ولی در حالت سه بعدی نادرست است، تصور شما عوض می‌شود. پولیا[۲] نشان داده‌است که احتمال رسیدن از هر نقطه‌ی دلخواه به هر نقطه‌ی دیگر در یک شبکه‌ی d–بعدی، فقط به بعد شبکه بستگی دارد و این احتمال‌ها به صورت زیر می‌باشند که به نام اعداد قدم زدن تصادفی پولیا شناخته می‌شوند. این احتمال‌ها همچنین احتمال شروع از مبدأ و بازگشت به آن نیز هستند.

بعد	احتمال
۱	۱
۲	۱
۳	۰.۳۴۰۵۳۷
۴	۰.۱۹۳۲۰۶
۵	۰.۱۳۵۱۷۸
۶	۰.۱۰۴۷۱۵
۷	۰.۰۸۵۸۴۴۹
۸	۰.۰۷۲۹۱۲۶

[۲] Pólya (1887-1975)