دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن	۱۳ اسفند ۹۲

جلسه‌ی ۸: کاربرد احتمال شرطی

مدرّس: دکتر شهرام خزائی	*نگارنده: مریم حصادی و حسن قره‌داغی*

۱ احتمال شرطی

احتمال وقوع پدیده A در حالی که پدیده B اتفاق افتاده است را یک احتمال شرطی می‌نامند؛ در این حالت احتمال وقوع A به شرط [وقوع] B بدین شکل قابل محاسبه است:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

در این حالت می‌بایست شرط $\Pr(B) > 0$ برقرار باشد.

۱.۱ تعبیر تجربی (فرکانس نسبی) احتمال شرطی

اگر آزمایش تصادفی را n بار انجام دهیم و نسبت تعداد حالت‌های وقوع پیشامد A را به کل تعداد حالات یعنی n حساب کرده و حد مقادیر محاسبه شده را وقتی $n \to \infty$ به دست آوریم، خواهیم دید که این حد به سمت $\Pr(A)$ میل می‌کند.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = \Pr(A)$$

در نتیجه می‌توانیم احتمال شرطی را به این صورت تفسیر کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A\cap B)/n}{n(B)/n} = \frac{\lim_{n\to\infty} n(A\cap B)/n}{\lim_{n\to\infty} n(B)/n} = \frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)} = \Pr(A|B)$$

۲.۱ قانون ضرب

برای یافتن احتمال وقوع اشتراک چندین پیشامد که از نظر زمانی و یا منطقی به دنبال هم هستند، از این قانون استفاده می‌شود.

$$\Pr(AB) = \Pr(B)\Pr(A|B) = \Pr(A)\Pr(B|A)$$

حالت کلی این قانون به شکل زیر است:

$$\Pr(A_1A_2\cdots A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1A_2)\cdots\Pr(A_n|A_1\cdots A_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n}\Pr(A_i|A_1\cdots A_{i-1})$$

۳.۱ قانون احتمال کل

این قانون روشی است برای دسته بندی پدیده‌ها بر پایه احتمال وقوع یا عدم وقوع یک پدیده، که در نظریه احتمالات با اهمیت بوده و کاربرد فراوانی دارد.

اگر برای فضای نمونه‌ی مفروضی بتوانیم چنان افرازی انتخاب کنیم که با داشتن این که کدام یک از پیشامدهای افراز شده رخ داده است، بخش مهمی از عدم اطمینان تقلیل می‌یابد. این قضیه از آن جهت مهم است که می‌توان از طریق آن احتمال یک پیشامد را با مشروط کردن نسبت به عدم وقوع یک پیشامد دیگر محاسبه کرد. در بسیاری از حالت‌ها، محاسبه احتمال یک پیشامد به صورت مستقیم کاری دشوار است. با استفاده از این قضیه و مشروط کردن پیشامد مورد نظر نسبت به پیشامد دیگر، می‌توان آن احتمال را محاسبه کرد.

اگر فضای نمونه به زیرمجموعه‌های B_1 تا B_n افراز شده باشد، می‌توان از قانون زیر برای محاسبه $\Pr(A)$ استفاده کرد:

$$\Pr(A) = \Pr((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cdots\cup(A\cap B_n)) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(AB_i) = \sum_{i=1}^{n}\Pr(A|B_i)\Pr(B_i)$$

این رابطه بیان می‌دارد که چگونه می‌توان $P(A)$ را با مشروط کردن به پیشامدهای داده شده $B_1, B_2, \cdots, B_n$ محاسبه نمود. به طور کلی این رابطه حاکی از آن است که $P(A)$ برابر متوسط وزنی $P(A|B_i)$ خواهدبود به نحوی که وزن هر جمله برابر با احتمالی است که به آن مشروط شده است.

۴.۱ قانون بیز

فرض کنید پیشامد A اتفاق افتاده و می‌خواهیم احتمال وقوع یکی از پیشامدهای B_k را حساب کنیم. برای این‌کار از قانون بیز[1] که ترکیبی از قانون ضرب و قانون احتمال کل است، استفاده می‌کنیم:

$$\Pr(B_k|A) = \frac{\Pr(B_k)\Pr(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n}\Pr(B_i)\Pr(A|B_i)}$$

که فضای نمونه به زیرمجموعه‌های B_1 تا B_n افراز شده است.

۲ کاربرد احتمال شرطی

گاهی شهود ما با جواب صحیح نمی‌خواند، در نتیجه باید از قوانین بالا درحل مسائل استفاده کنیم. در زیر مثال‌هایی از کاربرد قوانین بالا آورده‌ایم.

مثال ۱ ***(مسأله شاه و ولیعهد)*** *پدر ولیعهد دو فرزند دارد، احتمال این که ولیعهد خواهر داشته باشد، چقدر است؟*

پاسخ *فضای نمونه‌ای در این مسأله عبارت است از:*

$$\Omega = \{bb, gb, bg, gg\}$$

که b نماینده پسر و g نماینده دختر است. می‌خواهیم احتمال داشتن فرزند دختر برای شاه را با شرط داشتن فرزند پسر بیابیم. فرض کنیم B پیشامد داشتن فرزند پسر و G پیشامد داشتن فرزند دختر باشد. پس:

$$B = \{bb, bg, gb\} \qquad G = \{gb, bg\}$$

طبق قانون احتمال شرطی:

$$\Pr(G|B) = \frac{\Pr(GB)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

[1] Bayes' rule

نکته ۱ *در مدل کردن یک مسأله جنبه‌هایی وجود دارد که ممکن است از ابتدا مورد توجه قرار نگرفته باشد. در این مساله فرض کردیم که شاه دو بچه دارد که یکی پسر است. علاوه بر این ما فرض پنهان دیگری نیز انجام دادیم. در واقع فرض کردیم که از بین همه خانواده‌های شاهنشاهی ما یک خانواده دو فرزندی را انتخاب کردیم. یک خانواده استراتژی‌های متفاوتی می‌تواند برای فرزنددار شدن در پیش گرفته باشد. یک استراتژی می‌تواند بدین صورت باشد که خانوده از قبل تعداد فرزندان خود را انتخاب کرده باشد. یک استراتژی دیگر می‌تواند بدین صورت باشد که خانواده تصمیم بگیرد آنقدر بچه‌دار شود تا وقتی پسر شود. استراتژی اول می‌تواند مدل خوبی برای بررسی آماری اکثر خانواده‌ها باشد و ما در واقع مسأله خود را تحت این مدل حل کردیم و به احتمال $\frac{۲}{۳}$ رسیدیم. استراتژی دوم می‌تواند برای مدل کردن خانواده‌های شاهنشاهی مدل مناسب‌تری باشد. تحت این مدل مقدار احتمال پاسخ مسأله برابر یک خواهد بود.*

دو مثال زیر، مسائلی از این دست هستند:

مثال ۲ *درب خانه یک خانواده را که دارای دو فرزند هستند می‌زنیم و پسری از آن خانواده در را باز می‌کند؛ احتمال این که هر دو فرزند خانواده پسر باشند، چقدر است؟*

مثال ۳ *به یک خانواده دو فرزندی تلفن می‌زنیم و متوجه می‌شویم که پسر دارند. احتمال این که این خانواده دو فرزند پسر داشته باشد، چقدر است؟*

مثال ۴ *(**مسأله جایزه و مجری**[۲]) در یک مسابقه تلویریونی شرکت می‌کنید و سه جعبه وجود دارد که درون یکی از آنها جایزه است. احتمال برد یک سوم است. یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کنید، مجری یکی از آنهایی را که انتخاب نشده و جایزه نیست مشخص می‌کند و باز می‌کند. آیا منطقی است که انتخاب اول را با آن جعبه‌ی دیگر عوض کرد؟*

مثال زیر مشابه مساله بالاست و به حل آن می‌پردازیم.

مثال ۵ *(**مسأله زندانبان**[۳]) سه زندانی به نام‌های بهرام، احمد و رضا و یک زندانبان داریم. از میان زندانیان یک نفر محکوم به اعدام است (در شرایط معمول احتمال این که هر کدام اعدامی باشد، یک سوم است). احمد که می‌خواهد نامه‌ای برای خانواده‌اش بفرستد، به زندانبان می‌گوید به من بگو بهرام آزاد می‌شود یا رضا که من نامه را به او بدهم؛ زندانبان شک دارد که آیا با این کار احتمال محکومیت احمد تغییر می‌کند یا نه. آیا شک زندانبان به جاست؟*

پاسخ *احتمال محکومیت احمد را پس از گفتن زندانبان به دست می‌آوریم. برآمدهای ممکن این مسأله به صورت زیر است:*

احمد محکوم باشد و زندانبان بهرام را معرفی کند که آن را با ab نمایش می‌دهیم.
احمد محکوم باشد و زندانبان رضا را معرفی کند که آن را با ar نمایش می‌دهیم.

[۲] Monty Hall problem
[۳] Prisoners problem

رضا محکوم باشد و زندانبان بهرام را معرفی کند که آن را با rb نمایش می‌دهیم.
بهرام محکوم باشد و زندانبان رضا را معرفی کند که آن را با br نمایش می‌دهیم.

پس فضای نمونه به شکل زیر است:

$$\Omega = \{ab, ar, rb, br\}$$

می‌دانیم :

$$\Pr(br) = \frac{۱}{۳}, \Pr(rb) = \frac{۱}{۳}$$
$$\Pr(ab) = \frac{۱}{۶}, \Pr(ar) = \frac{۱}{۶}$$

Z را پیشامد این در نظر می‌گیریم که زندانبان رضا را معرفی کند:

$$Z = \{br, ar\}$$

و A را پیشامد محکومیت احمد فرض می‌کنیم:

$$A = \{ab, ar\}$$

حال می‌خواهیم احتمال شرطی A را با فرض وقوع Z بیابیم. محاسبه این احتمال از طریق فضای نمونه به صورت زیر می‌باشد:

$$\Pr(A|Z) = \frac{\Pr(A \cap Z)}{\Pr(Z)} = \frac{\Pr(ar)}{\Pr(br, ar)} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{۳}$$

پس احتمال در این دو حالت تغییر نکرد. در واقع زندانبان صرفاً اطلاعاتی درباره محکومیت دو نفر دیگر می‌دهد. قبل از گفتن زندانبان احتمال برای بهرام یک سوم و برای رضا هم یک سوم بود؛ اما بعد از گفتن زندانبان، احتمال اعدام بهرام صفر و رضا دو سوم یا بهرام دو سوم و رضا صفر می‌باشد.

مثال ۶ (مسأله سه کارت [۴]**)** سه کارت داریم که تنها تفاوتشان در رنگ آنهاست. یک کارت در دوطرف به رنگ سیاه، یک کارت در دو طرف به رنگ قرمز و یک کارت در یک طرف سیاه و یک طرف قرمز است. از درون کیسه یک کارت بیرون می‌کشیم و روی میز می‌گذاریم؛ رنگ روی این کارت قرمز است. احتمال این که طرف دیگر آن سیاه باشد، چقدر

[۴] Three Cards problem

است؟

پاسخ حل مناسب برای این مسأله با استفاده از قضیه بیز است. اول سه پیشامد محتمل را تعریف می‌کنیم.

$A_{rr} =$ پیشامد انتخاب کارت دو طرف قرمز

$A_{bb} =$ پیشامد انتخاب کارت دو طرف سیاه

$A_{br} =$ پیشامد انتخاب کارت یک طرف سیاه و یک طرف قرمز

در شرایط معمولی:

$$\Pr(A_{rr}) = \Pr(A_{bb}) = \Pr(A_{br}) = \frac{۱}{۳}$$

پیشامد R را پیشامد این رخداد در نظر می‌گیریم که در انتخاب انجام شده، طرف رو شده کارت، قرمز باشد.
سئوال این است که اگر طرف رو شده قرمز باشد، احتمال این که طرف دیگر سیاه باشد، چقدر است؟ یعنی مطلوب محاسبه احتمال شرطی $\Pr(A_{br}|R)$ است. با استفاده از قانون بیز داریم:

$$\begin{aligned}
\Pr(A_{br}|R) &= \frac{\Pr(R|A_{br})\Pr(A_{br})}{\Pr(R)} \\
&= \frac{\Pr(R|A_{br})\Pr(A_{br})}{\Pr(R|A_{rr})\Pr(A_{rr}) + \Pr(R|A_{bb})\Pr(A_{bb}) + \Pr(R|A_{br})\Pr(A_{br})} \\
&= \frac{\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۱} \times \frac{۱}{۳} + ۰ \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}
\end{aligned}$$

مثال ۷ شخص ثروتمندی هر هفته در باغ خود میهمانی مجلل برگزار می‌کند. صاحبخانه شبی که N میهمان دارد، در یک طرف باغ به تعداد افراد جعبه قفل‌دار قرار می‌دهد و در یکی از آنها به طور همشانس بمبی کار می‌گذارد. صاحبخانه میهمانان را در طرف دیگر باغ جمع می‌کند و از آنها می‌خواهد که یکی‌یکی به طرف دیگر باغ رفته و یکی از جعبه‌ها را باز کنند. جعبه‌ها طوری طراحی شده‌اند که فردی که جعبه بمب را باز می‌کند، فوراً کشته خواهد شد. بی‌شک فقط میهمانانی که زنده بمانند در هفته‌های آتی به میهمانی دعوت خواهند شد. اگر شما یکی از افراد این جمع باشید، ترجیح می‌دهید چندمین نفری باشید که سراغ جعبه‌ها می‌رود.

پاسخ برای هر $۱ \leq i \leq N$ پیشامد کشته شدن نفر iـام را با B_i نمایش می‌دهیم. می‌خواهیم مقدار $\Pr(B_i)$ را بیابیم.

برای این کار از قانون ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Pr(B_i) &= \Pr(B_۱^c B_۲^c B_۳^c \cdots B_{i-۱}^c B_i)\\ &= \Pr(B_۱^c)\Pr(B_۲^c|B_۱^c)\Pr(B_۳^c|B_۱^c B_۲^c)\cdots\Pr(B_{i-۱}^c|B_۱^c\cdots B_{i-۲}^c)\Pr(B_i|B_۱^c\cdots B_{i-۱}^c)\\ &= \frac{N-۱}{N}\times\frac{N-۲}{N-۱}\times\frac{N-۳}{N-۲}\times\cdots\times\frac{N-(i-۱)}{N-(i-۲)}\times\frac{۱}{N-(i-۱)}=\frac{۱}{N}\end{aligned}$$

پس احتمال کشته شدن افراد یکسان است.

مثال ۸ فرض کنید دو سکه ناسالم داریم که احتمال آمدن شیر برای سکه اول برابر ۰٫۱ و برای سکه دوم برابر ۰٫۹ است. یکی از سکه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و آن را n بار پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه همه این n پرتاب، شیر باشد، چقدر احتمال دارد که سکه انتخاب شده، سکه دوم باشد.

پاسخ پیشامدها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}A_۱ &= \text{پیشامد انتخاب سکه اول}\\ A_۲ &= \text{پیشامد انتخاب سکه دوم}\\ H_i &= \text{احتمال آمدن شیر در پرتاب } i \text{ ام}\end{aligned}$$

حال برای رسیدن به جواب، از فرمول بیز استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Pr(A_۲|H_۱\cdots H_n) &= \frac{\Pr(H_۱\cdots H_n|A_۲)\Pr(A_۲)}{\Pr(H_۱\cdots H_n|A_۱)\Pr(A_۱)+\Pr(H_۱\cdots H_n|A_۲)\Pr(A_۲)}\\ &= \frac{(۰/۹)^n\times\frac{۱}{۲}}{(۰/۹)^n\times\frac{۱}{۲}+(۰/۱)^n\times\frac{۱}{۲}}=\frac{۹^n}{۹^n+۱}\simeq ۱\end{aligned}$$

جواب برای nهای بزرگ، تقریبا برابر یک خواهد بود. برای nهای کوچک هم، اختلاف زیادی با یک ندارد. مثلا برای $n=۴$ جواب تقریبا برابر ۰٫۹۹۹۸ و برای $n=۵$ جواب تقریبا برابر ۰٫۹۹۹۹۸ است.