دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　۱۶ اسفند ۹۲

جلسه‌ی ۷: احتمال شرطی

مدرّس: دکتر شهرام خزائی　　　　　　　　　　　　　　　　*نگارنده: احمدرضا رحیمی*

۱ مقدمه

در این جلسه قصد داریم یک ابزار برای محاسبه برخی احتمال‌هایی که در آنها وقوع یک پیشامد به وقوع یک پیشامد دیگر بستگی دارد، یا به عبارتی بخشی از اطلاعات آن در نتیجه انجام یک آزمایش دیگر است بپردازیم. به چنین احتمال‌هایی احتمال شرطی می‌گوییم. در ادامه تعدادی از روابط احتمال شرطی را بیان می‌کنیم و در آخر قانون احتمال کل و قاعده بیز را معرفی می‌کنیم.

۲ روابط احتمال شرطی

در جلسه قبل احتمال شرطی را معرفی کردیم و تعریف آن را بیان کردیم حال کار خود را با معرفی برخی از روابط احتمال شرطی آغاز می‌کنیم.

۱.۲ قانون ضرب

می‌توان از رابطه

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)} \qquad (۱)$$

برای محاسبه $\Pr(AB)$ استفاده کرد. برای این کار می‌نویسیم

$$\Pr(AB) = \Pr(A|B)\Pr(B)$$

از طرفی داریم

$$\Pr(BA) = \Pr(B|A)\Pr(A)$$

حال با توجه به اینکه $\Pr(AB) = \Pr(BA)$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B|A) \qquad (۲)$$

و برای حالت ۳ تایی $\Pr(ABC)$ داریم:

$$\Pr(ABC) = \Pr(A)\Pr(B|A)\Pr(C|AB)$$

حال می‌توان این رابطه را تعمیم داد و با استفاده از آن، رابطه $\Pr(A_1A_2\cdots A_n)$ را محاسبه کرد.

قضیه ۱ *اگر* $\Pr(A_{۱}A_{۲}\cdots A_{n-۱}) > ۰$ *داریم:*

$$\begin{aligned}&\Pr(A_{۱}A_{۲}\cdots A_n)\\ =\ &\Pr(A_{۱})\Pr(A_{۲}|A_{۱})\Pr(A_{۳}|A_{۱}A_{۲})\cdots\Pr(A_n|A_{۱}A_{۲}A_{۳}\cdots A_{n-۱})\end{aligned} \qquad (۳)$$

۲.۲ حل مسأله روز تولد با احتمال شرطی

سؤال ۱ *احتمال این‌که در یک جمع* n *نفری هیچ ۲ نفری روز تولد یکسان نداشته باشند.*

پاسخ *سال را ۳۶۵ روز در نظر می‌گیریم. پیشامد* A_i *را پیشامدی در نظر می‌گیریم که نفر* i*ـام روز تولد متفاوت با* $i-۱$ *نفر قبلی داشته باشد. حال با توجه به قاعده ضرب داریم:*

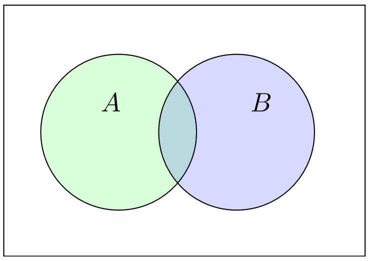
$$\begin{aligned}\Pr(A_{۱}A_{۲}\cdots A_n) &= \underbrace{\Pr(A_{۱})}_{۱}\underbrace{\Pr(A_{۲}|A_{۱})}_{\frac{۳۶۴}{۳۶۵}}\cdots\underbrace{\Pr(A_n|A_{۱}A_{۲}\cdots A_{n-۱})}_{\frac{۳۶۵-(n-۱)}{۳۶۵}}\\ &= \prod_{i=۱}^{n-۱}(۱-\frac{i}{۳۶۵})\end{aligned}$$

۳ قانون احتمال کل

قضیه ۲ (قانون احتمال کل) *اگر* B *یک پیشامد باشد که* $\Pr(B) > ۰$ *و* $\Pr(B^c) > ۰$*، برای هر پیشامد* A *داریم:*

$$\Pr(A) = \Pr(B)\Pr(A|B) + \Pr(B^c)\Pr(B^c|A) \qquad (۴)$$

برهان. مجموعه های A و B را با توجه به شکل در نظر بگیرید.



شکل ۱: نمودار ون نمایش دو مجموعه A و B

با توجه به نمودار می‌توانیم A را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$

با توجه به اینکه پیشامدهای $A\cap B$ و $A\cap B^c$ جدا از هم هستند، داریم:

$$\Pr(A) = \Pr(AB) + \Pr(AB^c)$$

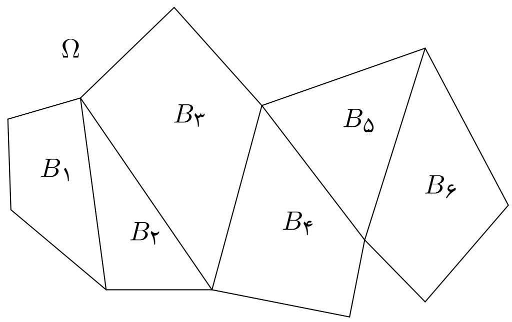
حال می‌توان باتوجه به قانون ضرب با جایگذاری بجای $\Pr(AB)$ و $\Pr(AB^c)$ رابطه را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Pr(A) = \Pr(B)\Pr(A|B) + \Pr(B^c)\Pr(B^c|A)$$

■

۴ تعمیم قانون احتمال کل

تعریف ۱ (افراز یک مجموعه) *یک مجموعه ناتهی از زیرمجموعه های فضای نمونه‌ای Ω مانند $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ یک* **افراز** *از مجموعه Ω است، اگر پیشامد های $B_1, B_2, \cdots, B_n$ دوبه‌دو جدا از هم باشند و $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.*



شکل ۲: افراز مجموعه Ω به ۶ پیشامد

حال می‌خواهیم قانون احتمال کل را با افراز فضای نمونه‌ای به n زیرمجموعه تعمیم دهیم.

قضیه ۳ (تعمیم قانون احتمال کل) *اگر $\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$ یک افراز از فضای نمونه‌ای یک آزمایش باشد و برای هر $i = 1, 2, \cdots, n$ داشته باشیم $\Pr(B_i) > 0$ آنگاه برای هر پیشامد A در فضای نمونه داریم:*

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2) + \cdots + \Pr(A|B_n)\Pr(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i) \end{aligned} \tag{5}$$

برهان. چون B_iها پیشامدهای دوبه‌دو جدا از هم هستند و برای هر $i \neq j$ داریم $B_i \cap B_j = \phi$ پس $AB_i \cap AB_j = \phi$ بنابراین مجموعه $\{AB_1, AB_2, \cdots, AB_n\}$ یک مجموعه از پیشامدهای دوبه‌دو جدا از هم است، از طرفی داریم:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

پس

$$A = A\Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

بنابراین داریم:

$$\Pr(A) = \Pr(AB_1) + \Pr(AB_2) + \cdots + \Pr(AB_n)$$

حال می‌توان باتوجه به معادله (۳) با جایگزاری بجای $\Pr(AB_i)$ معادله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Pr(A) = \Pr(A|B_1)\Pr(B1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2) + \cdots + \Pr(A|B_n)\Pr(B_n)$$

■

نکته ۱ *می‌توان در حالت کلی برای مجموعه نامتناهی و شمارای* $\{B_1, B_2, \cdots\}$ *که* B_i *ها دوبه‌دو جدا از هم هستند و* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ *و برای هر* i*،* $\Pr(B_i) \geq 0$ *، می‌توان قانون احتمال کل را به صورت زیر بیان کرد:*

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \Pr(A|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i) \end{aligned} \tag{۶}$$

۵ مسأله رادار و فرمول بیز

سؤال ۲ *راداری در اختیار داریم دارای احتمال تشخیص اشتباه[۱] ۰.۰۱ و احتمال عدم تشخیص صحیح[۲] ۰.۱ است؛ یعنی، اگر هواپیمایی در حال پرواز نباشد، رادار به احتمال ۰.۰۱ آژیر می‌کشد و اگر هواپیمایی در حال پرواز باشد، رادار به احتمال ۰.۱ آن‌را تشخیص نمی‌دهد. فرض کنید در یک منطقه خاصی در زمان مشخص، احتمال اینکه هواپیمایی در حال پرواز باشد ۰.۰۵ باشد. مطلوب است، محاسبه احتمال اینکه هواپیمایی در حال پرواز باشد، اگر رادار هشدار داده باشد.*

پاسخ *پیشامد های* A *و* B *را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

A *پیشامد اینکه هواپیمایی در حال پرواز باشد.*

B *پیشامد اینکه رادار هشدار دهد.*

برای قسمت اول کافی است $\Pr(B)$ *را محاسبه کنیم.*
با توجه به قانون احتمال کل داریم:

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^c)\Pr(A^c) \\ &= ۰/۹۹ \times ۰/۰۵ + ۰/۱ \times ۰/۹۵ \simeq ۰/۱۴۴۵ \end{aligned}$$

برای محاسبه قسمت دوم باید $\Pr(A|B)$ *را محاسبه کنیم که می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:*

$$\begin{aligned} \Pr(A|B) &= \frac{\Pr(B|A)\Pr(A)}{\Pr(B)} \\ &= \frac{۰/۹۹ \times ۰/۰۵}{۰/۱۴۴۵} \simeq ۰/۳۴ \end{aligned} \tag{۷}$$

که رابطه (۷) به **فرمول بیز**[۳] *معروف است.*

قضیه ۴ (قضیه بیز) *فرض کنید* $\{B_1, B_2, \cdots B_n,\}$ *یک افراز از فضای نمونه یک آزمایش باشد و برای هر* $i = 1, 2, \cdots, n$ *داشته باشیم* $\Pr(B_i) > 0$ *آنگاه برای هر پیشامد* A *در فضای نمونه که* $\Pr(A) > 0$ *داریم:*

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(A|B_i)\Pr(B_i)}{\Pr(A|B_1)\Pr(B_1) + \Pr(A|B_2)\Pr(B_2) + \cdots + \Pr(A|B_n)\Pr(B_n)} \tag{۸}$$

احتمال‌های $\Pr(A|B_i)$ *به احتمال های پیشین*[۴] *و احتمال‌های* $\Pr(B_i|A)$ *به احتمال‌های پسین*[۵] *معروف هستند.*

[۱] false alarm
[۲] miss detection
[۳] Bayes' Formula
[۴] a priori
[۵] post-priori