دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن ۶ اسفند ۹۲

جلسه‌ی ۶: احتمال شرطی

مدرّس: دکتر شهرام خزائی نگارنده: فرنوش فرهادی- سپیده برنگی

در این جلسه به ادامه مثال‌هایی از مفاهیم اولیه احتمال بپردازیم. سپس احتمال شرطی را معرفی می‌نماییم.

۱ چند مثال از احتمال

مثال ۱ *یک دسته کارت را ابتدا خوب بر زده می‌زنیم. سپس کارت‌ها را یکی‌یکی رو می‌کنیم تا اولین تک ظاهر شود. احتمال اینکه کارت بعدی، تک پیک باشد بیشتر است یا دو گشنیز؟*

پاسخ *فضای نمونه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

- Ω*: تعداد کل حالات قرارگیری کارت‌ها در کنار هم.*

پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

- A*: اولین ورق پس از اولین تک، تک پیک باشد.*
- B*: اولین ورق پس از اولین تک، دو گشنیز باشد.*

مشخص است که فضای نمونه‌ای دارای !۵۲ عضو است، چون این ۵۲ کارت به !۵۲ جایگشت مختلف می‌توانند کنار هم قرار گیرند. برای تعیین احتمال آمدن تک پیک بلافاصله پس از اولین تک باید محاسبه کنیم که در چه تعداد از !۵۲ ترتیب ممکن از قرارگیری کارت‌ها در کنار هم، تک پیک بلافاصله پس از اولین تک می‌آید. هر ترتیبی از قرارگیری ۵۲ کارت را می‌توان به این صورت مدل کرد که ابتدا ۵۱ کارت به جز تک پیک را کنار هم قرار داد و سپس تک پیک را بین آن‌ها وارد کرد. در ازای هر !۵۱ ترتیب ممکن از سایر کارت‌ها، فقط یک جایگاه برای وارد کردن تک پیک وجود دارد به طوری‌که بلافاصله پس از اولین تک بیاید. بنابراین !۵۱ حالت قرارگیری تک پیک پس از اولین تک وجود دارد. بنابراین داریم:

$$\Pr(A) = \frac{۵۱!}{۵۲!} = \frac{۱}{۵۲}$$

برای محاسبه احتمال وقوع پیشامد B می‌توان دقیقا مشابه احتمال وقوع پیشامد A استدلال کرد. بنابراین داریم:

$$\Pr(B) = \frac{۵۱!}{۵۲!} = \frac{۱}{۵۲}$$

مثال ۲ *(تناقض روز تولد[۱]) فرض کنیم در یک کلاس درس n دانشجو حاضر باشند. n چند باشد که با احتمال بیشتر از ٪۵۰ حداقل دو دانشجو دارای روز تولد یکسان داشته باشند؟*

[۱] BIRTHDAY PARADOX

پاسخ مساله را ابتدا به صورت تقریبی حل می‌کنیم. پیشامد زیر را در نظر بگیرید: A: دو دانشجو خاص دارای روز تولد یکسان باشند. داریم:

$$\Pr(A) = \frac{۳۶۵ \times ۱}{۳۶۵ \times ۳۶۵} = \frac{۱}{۳۶۵} = p$$

یادآوری ۱ آزمایشی را انجام داده‌ایم که احتمال وقوع پیشامد A در آن برابر p باشد. در این صورت می‌توان انتظار داشت که با حدود $\frac{1}{p}$ بار تکرار آزمایش، پیشامد A یک بار رخ خواهد داد.

در این مساله، تکرار آزمایش همان تعداد حالات مختلف انتخاب دو دانشجوی خاص در بین n دانشجو است. بنابراین داریم:

$$\binom{n}{۲} = \frac{۱}{p} = ۳۶۵ \Rightarrow n \approx ۲۷$$

برای حل مساله به صورت دقیق پیشامد زیر را در نظر بگیرید: A_n: حداقل دو دانشجو از n دانشجو دارای روز تولد یکسان باشند. مکمل پیشامد A به صورت زیر تعریف می‌شود: A_n^c: هیچ دو نفری از n نفر دارای روز تولد یکسان نباشند. داریم:

$$\Pr(A_n^c) = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ... \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ... \times ۳۶۵} = ۱ \times (۱ - \frac{۱}{۳۶۵}) \times (۱ - \frac{۲}{۳۶۵}) \times ... \times (۱ - \frac{n-۱}{۳۶۵})$$

یادآوری ۲ برای x های کوچک نامساوی زیر برقرار است:

$$۱ - x \leq e^{-x}$$

بنابراین داریم:

$$\Pr(A_n) = ۱ - P(A_n^c) \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow P(A_n^c) \leq \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\Pr(A_n^c) \leq e^{-\frac{۱}{۳۶۵}} \times e^{-\frac{۲}{۳۶۵}} \times ... \times e^{-\frac{n-۱}{۳۶۵}} = e^{-\frac{۱+۲+...+(n-۱)}{۳۶۵}} = e^{\frac{-\binom{n}{۲}}{۳۶۵}} \leq \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow n \geq ۲۳$$

بنابراین کافی است حداقل ۲۳ دانشجو در کلاس درس حضور داشته باشند. در ادامه احتمال وقوع پیشامد A_n را برای nهای مختلف در جدول زیر نشان دادیم:

n	$\Pr(A_n)$
۵	۰/۰۳
۱۰	۰/۱۲
۱۵	۰/۲۵
۲۰	۰/۴۱
۲۱	۰/۴۴
۲۲	۰/۴۸
۲۳	۰/۵۱
۲۵	۰/۵۷
۳۰	۰/۷۱
۳۵	۰/۸۱
۴۰	۰/۸۹
۵۰	۰/۹۷
۵۵	۰/۹۹

۲ احتمال شرطی

برای معرفی احتمال شرطی ابتدا مثال زیر را بررسی می‌کنیم:

مثال ۳ *وضعیت قبولی دانشجویان مقطع اول دبیرستان مدرسه‌ای در درس ریاضی و فیزیک به شرح زیر است:*

درس	احتمال قبولی
فیزیک	۰/۷
ریاضی	۰/۸
هر دو	۰/۶

یکی از این دانشجویان به تصادف انتخاب شده است. می‌دانیم که این دانشجو در درس ریاضی قبول شده است. در این صورت، احتمال اینکه در درس فیزیک نیز قبول شده باشد، چقدر است؟

پاسخ *می‌دانیم که احتمال از نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت‌های ممکن به دست می‌آید. از آن‌جایی که دانشجوی انتخاب شده در درس ریاضی قبول شده است و می‌خواهیم که در درس فیزیک نیز قبول شود، حالت‌های مطلوب شامل دانشجویانی می‌شود که در هر دو درس قبول شده‌اند. از طرفی دیگر، کل حالت‌های ممکن و اثرگذار برای محاسبه احتمال فوق نیز شامل دانشجویانی است که در درس ریاضی قبول شده‌اند. اگر تعداد کل دانشجویان برابر n باشد، احتمال موردنظر از رابطه زیر محاسبه می‌شود:*

$$\frac{۰/۶ \times n}{۰/۸ \times n} = \frac{۳}{۴}$$

برای حل این مساله ابتدا فضای نمونه‌ای را در حالت جدید و با اطلاعات داده شده به دست آوردیم و سپس حالات مطلوب را از این فضا بیرون آوردیم و احتمال مطلوب را محاسبه کردیم. در این مساله اگر پیشامدهای زیر را تعریف کنیم:

- A: دانشجو در درس فیزیک قبول شود.
- B: دانشجو در درس ریاضی قبول شود.

در این صورت پیشامد مطلوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

- $A|B$: دانشجو در درس فیزیک قبول شود به شرطی که بدانیم در درس ریاضی قبول شده باشد.

تعریف ۱ *احتمال شرطی پیشامد A در صورتی که پیشامد B اتفاق افتاده باشد با $\Pr(A|B)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:*

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad \Pr(B) > ۰$$

قضیه ۱ *برای هر پیشامد B با احتمال ناصفر، تابع احتمال شرطی در اصول کولموگروف صدق می‌کند. یعنی:*

۱. $\Pr(A|B) \geq ۰$

۲. $\Pr(B|B) = ۱$

۳. *برای هر دنباله‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو مجزای $A_۱$، $A_۲$ و ... (یعنی $A_i \cap A_j = ۰$، برای هر $i \neq j$) داریم:*

$$\Pr(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=۱}^{\infty} \Pr(A_i|B)$$

مثال ۴ در بازه $[۰, ۱۰]$ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در صورتی‌که بدانیم عدد در بازه $[۳, ۷]$ است، احتمال آن‌که عدد موردنظر در بازه $[۰, ۶]$ باشد چقدر است؟

پاسخ فضای نمونه‌ای آزمایش $\Omega = [۰, ۱۰]$ است. پیشامدهای زیر را تعریف می‌کنیم:

- A: عدد انتخاب شده در بازه $[۰, ۶]$ باشد.
- B: عدد انتخاب شده در بازه $[۳, ۷]$ باشد.

داریم $A \cap B = [۳, ۶]$. بنابراین:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr([۳, ۶])}{\Pr([۳, ۷])} = \frac{\frac{۳}{۱۰}}{\frac{۴}{۱۰}} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۵ دو آزمایش زیر را در نظر بگیرید:

۱. از بین همه خانواده‌های دو فرزندی، خانواده‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در صورتی‌که خانواده انتخاب شده فرزند دختر داشته باشد، احتمال اینکه هر دو فرزند خانواده دختر باشد چقدر است؟

۲. از بین همه خانواده‌های دو فرزندی، بچه‌ای را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در صورتی‌که بچه انتخابی دختر باشد، احتمال اینکه هر دو فرزند خانواده دختر باشد چقدر است؟

پاسخ می‌خواهیم این مساله را به صورت شهودی تحلیل کنیم. هدف آن است که در ابتدا فضای نمونه‌ای را به دلیل داشتن اطلاعات کاهش دهیم، به عناصر فضای نمونه‌ای جدید شانس وقوع نسبت دهیم و سپس احتمال وقوع حالت‌های مطلوب را در فضای نمونه‌ای جدید محاسبه کنیم. فضای نمونه‌ای در حالتی که هیچ اطلاعاتی از فرزندان نداشته باشیم، برای هر دو آزمایش به صورت زیر تعریف می‌شود که برابر کل حالت‌های ممکن از جنسیت دو فرزند خانواده است. فرزند دختر و پسر را به ترتیب با g و b نمایش می‌دهیم:

$$\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$$

برآمدها در فضای نمونه‌ای Ω هم‌شانس هستند یعنی احتمال وقوع هر کدام از عناصر Ω برابر $\frac{۱}{۴}$ است.
در حالتی که اطلاعات گفته شده را از فرزندان داشته باشیم، فضای نمونه‌ای برای هر دو آزمایش به مجموعه زیر کاهش می‌یابد:

$$\Omega' = \{bg, gb, gg\} \ .$$

مطلوب محاسبه احتمال پیشامد $\{gg\}$ است. ممکن است تصور شود که برآمدهای فضای نمونه‌ای کاهش یافته Ω' هنوز هم‌شانس هستند. اما دو آزمایش مطرح شده تابع احتمال یکسانی روی فضای نمونه‌ای Ω' ندارند و فقط در یکی از آزمایش‌ها، Ω' یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس است. برای آزمایش‌ها به ترتیب شماره داریم:

۱. در این آزمایش خانواده را به تصادف انتخاب کرده‌ایم و تنها اطلاعاتی که داریم این است که خانواده دارای فرزند دختر است. در این حالت هیچ یک از سه برآمد ممکن bb, bg, gb, gg برتری نسبت به دیگری ندارد و فضای نمونه‌ای Ω' هم‌شانس باقی می‌ماند. یعنی شانس رخداد همه برآمدها برابر است. با توجه به اینکه جمع احتمال‌ها باید یک باشد، داریم $\Pr(\{gg\}) = \frac{۱}{۳}$.

۲. در این آزمایش، فرزندی از یک خانواده به تصادف انتخاب شده است و می‌دانیم که دختر است. توجه کنید که اگر خانواده دارای دو فرزند دختر باشد، شانس رخداد بچه انتخابی با جنسیت دختر دو برابر شانس در حالتی است که خانواده تنها یک فرزند دختر داشته باشد. یعنی:

$$\Pr(\{gg\}) = ۲ \times \Pr(\{bg\}) = ۲ \times \Pr(\{gb\}) \ .$$

با توجه به اینکه جمع احتمال‌ها باید یک باشد، داریم $\Pr(\{gg\}) = \frac{۱}{۲}$.

تمرین ۱ با استفاده از تعریف احتمال شرطی و درنظرگرفتن پیشامدهای مناسب، احتمال‌های مثال فوق را محاسبه کنید.