دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن — ۴ اسفند ۹۲

جلسه‌ی ۵: چند مثال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — نگارنده: مهدی پاک طینت (تصحیح: قره‌داغی، گیوه‌چی، تفاق)

در این جلسه به بررسی و حل چند مثال از مطالب جلسات گذشته خواهیم پرداخت.

مثال ۱ *کیسه‌ای شامل ۱۰ جفت کفش است. ۵ لنگه را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که هیچ دو تایی از این لنگه‌ها با هم جفت نباشند، چه‌قدر است؟*

پاسخ *مجموعه‌ی ده جفت کفش را به صورت $S = \{L_۱, R_۱, L_۲, R_۲, \cdots, L_{۱۰}, R_{۱۰}\}$ نشان می‌دهیم، که در آن R_i و L_i لنگه‌های سمت راست و چپ کفش i ام می‌باشند. فضای نمونه‌ای شامل تمام انتخاب‌های ۵ لنگه کفش از میان این ۲۰ لنگه کفش است. به دو صورت می‌توان آزمایش بیرون کشیدن پنج لنگه کفش را انجام داد. انتخاب یکی‌یکی پنج لنگه و انتخاب یک‌باره پنج لنگه. فضای نمونه‌ای برای این دو مدل متفاوت است.*
برای روش اول فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳, \omega_۴, \omega_۵) \mid \omega_i \in S \ (۱ \leq i \leq ۵),\ \omega_i \neq \omega_j \ (۱ \leq i < j \leq ۵)\}$$

به عبارت دیگر Ω مجموعه‌ی تمام بردارهای پنج عضوی با عناصر متمایز از اعضای مجموعه S می‌باشد. به طور شهودی هیچ‌یک از برآمدهای فضای نمونه‌ای مزیتی بر دیگری ندارد. بنابراین با یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس مواجه هستیم. پس برای محاسبه احتمال هر پیشامدی کافی است حاصل تقسیم تعداد اعضای آن پیشامد بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را بیابیم.
برای شمارش تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، می‌دانیم برای انتخاب اولین کفش ۲۰ انتخاب، برای دومین کفش ۱۹ انتخاب، و به همین ترتیب برای پنج‌امین کفش ۱۶ انتخاب داریم. پس:

$$|\Omega| = ۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷ \times ۱۶$$

همچنین برای شمارش تعداد اعضای پیشامد مورد نظر که با A نشان می‌دهیم، می‌دانیم برای انتخاب اولین کفش ۲۰ انتخاب، و برای دومین کفش ۱۸ انتخاب داریم (چون لنگه دوم کفش انتخاب شده را نمی‌توانیم انتخاب کنیم) و به همین ترتیب برای پنج امین کفش ۱۲ انتخاب داریم. پس:

$$|A| = ۲۰ \times ۱۸ \times ۱۶ \times ۱۴ \times ۱۲$$

در نتیجه:

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{۲۰ \times ۱۸ \times ۱۶ \times ۱۴ \times ۱۲}{۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷ \times ۱۶} = \frac{۱۶۸}{۳۲۳} \approx ۰\cdot۵۲$$

در روش دیگر همه ۵ لنگه کفش به طور همزمان انتخاب می‌شوند. در این حالت فضای نمونه‌ای Ω' به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega' = \{\omega = \{\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳, \omega_۴, \omega_۵\} \mid \omega_i \in S \ (۱ \leq i \leq ۵),\ \omega_i \neq \omega_j \ (۱ \leq i < j \leq ۵)\}$$

به عبارت دیگر Ω' مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های پنج عضوی S می‌باشد و مشابه حالت قبل برآمدهای آن هم‌احتمال هستند.

در این صورت تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد راه‌های انتخاب ۵ لنگ کفش از میان ۲۰ لنگه کفش خواهد بود پس:

$$|\Omega'| = \binom{۲۰}{۵}$$

همچنین تعداد اعضای پیشامد مورد نظر، A'، برابر تعداد راه‌های انتخاب ۵ جفت کفش از میان ۱۰ جفت و انتخاب یک لنگه از هر جفت انتخاب شده، است. پس:

$$|A'| = \binom{۱۰}{۵} \times ۲^۵$$

در نتیجه:

$$\Pr(A') = \frac{|A'|}{|\Omega'|} = \frac{\binom{۱۰}{۵} \times ۲^۵}{\binom{۲۰}{۵}} = \frac{۱۶۸}{۳۲۳}$$

نکته ۱ در مثال ۱ با مقایسه‌ی دو فضای نمونه‌ای Ω و Ω' مشاهده می‌کنیم که هر برآمد $\{\omega_۱, \omega_۲, \omega_۳, \omega_۴, \omega_۵\} \in \Omega'$ متناظر با !۵ برآمد از Ω است که از جایگشت دادن ω_i ها به دست آمده‌اند.

نکته ۲ فرض کنید n عدد توپ شماره گذاری‌شده داریم که می‌خواهیم این تعداد توپ را بین k نفر تقسیم کنیم به صورتی که به نفر اول $n_۱$ توپ، به نفر دوم $n_۲$ توپ، ... ، به نفر $k-۱$ ام $n_{k-۱}$ توپ و به نفر k ام n_k توپ برسد به طوری که:

$$n_۱ + n_۲ + ... + n_k = n$$

تعداد حالت‌های ممکن برای این کار برابر است با:

$$\binom{n}{n_۱}\binom{n-n_۱}{n_۲}\binom{n-n_۱-n_۲}{n_۳}...\binom{n-n_۱-n_۲-...-n_{k-۱}}{n_k} = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

مثال ۲ در بازی حکم احتمال این که هر بازیکن دقیقا یک تک دریافت کند چه‌قدر است (این بازی متشکل از چهار بازیکن است که به هر کدام به صورت تصادفی ۱۳ کارت داده می‌شود)؟

پاسخ فضای نمونه‌ای در این مساله شامل تمام حالات توزیع ۵۲ کارت میان چهار نفر به طور مساوی است. به طور دقیق‌تر فضای نمونه‌ای را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\Omega = \{\omega = (S_۱, S_۲, S_۳, S_۴) \mid S_i \texttt{'s partition cards set and } |S_i| = ۱۳\}$$

در این مثال نیز یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس داریم.
بنابر نکته ۱ تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$|\Omega| = \frac{۵۲!}{۱۳! \times ۱۳! \times ۱۳! \times ۱۳!}$$

پیشامد موردنظر را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A = \{\omega = (S_۱, S_۲, S_۳, S_۴) \mid S_i \texttt{'s partition cards set, each contains an ace and } |S_i| = ۱۳\}$$

برای شمارش تعداد اعضای پیشامد مورد نظر، ابتدا تک‌ها را کنار می‌گذاریم و بقیه ۴۸ کارت را پخش می‌کنیم. سپس ۴ تک باقی مانده را بین ۴ نفر تقسیم می کنیم. پس:

$$|A| = \frac{۴۸!}{۱۲! \times ۱۲! \times ۱۲! \times ۱۲!} \times ۴!$$

در نتیجه:

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \approx ۰ \cdot ۱$$

مثال ۳ در بازی حکم احتمال این که یک بازیکن همه ۱۳ پیک را دریافت کند چقدر است؟

پاسخ پیشامد اینکه همه‌ی ۱۳ پیک به نفر iام برسد را S_i در نظر می‌گیریم که $i = ۱,۲,۳,۴$. هم‌اکنون می‌خواهیم $\Pr(S_i)$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، مسئله را به صورت زیر مدل می‌کنیم. ۵۲ ورق داریم و ۱۳ تا از آن‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و به نفر iام می‌دهیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای Ω برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۱۳ عضوی از یک مجموعه‌ی ۵۲ عضوی است. بنابراین:

$$|\Omega| = \binom{۵۲}{۱۳}$$

و اگر S_i را پیشامد مطلوب بنامیم، آن‌گاه $|S_i| = ۱$ و چون فضای نمونه‌ای هم‌شانس است داریم:

$$\Pr(S_i) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{۱}{\binom{۵۲}{۱۳}}$$

پس چون S_i ها مجزا هستند، در نتیجه احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\Pr(S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳ \cup S_۴) = \Pr(S_۱) + \Pr(S_۲) + \Pr(S_۳) + \Pr(S_۴) = ۴ \times \frac{۱}{\binom{۵۲}{۱۳}} \approx ۶.۳ \times ۱۰^{-۱۲}$$

مثال ۴ اگر یک دسته کارت به طور کامل بر زده شود، احتمال این که هر ۴ کارتِ تک پشت سر هم قرار گیرند چقدر است؟

پاسخ فضای نمونه‌ای شامل همه جایگشت‌های ۵۲ کارت است. پس:

$$|\Omega| = ۵۲!$$

برای شمارش تعداد اعضای پیشامد مورد نظر، ابتدا چهار کارتِ تک را یکی در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌ها را حساب کرده و در تعداد جایگشت‌های خود این چهار کارت در بین خودشان ضرب، می‌کنیم. پس:

$$|A| = ۴۹! \times ۴!$$

چون فضای نمونه‌ای همشانس است، پس:

$$\Pr\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{۴۹!۴!}{۵۲!}$$

مثال ۵ سکه سالمی را ۱۰۰ بار پرتاب می کنیم. احتمال این که دقیقا ۵۰ بار شیر بیاید چقدر است؟

پاسخ فضای نمونه‌ای متشکل از تمام دنباله‌های به طول ۱۰۰ است که هر مولفه‌ی آن شیر یا خط می‌باشد. به بیان دقیق‌تر:

$$\Omega = \{H, T\}^{۱۰۰}$$

و چون هر مولفه‌ی دنباله دو حالت دارد بنابر اصل ضرب تعداد کل دنباله‌ها برابر $|\Omega| = ۲^{۱۰۰}$ می‌باشد. پیشامد اینکه دقیقاً i بار شیر بیاید را A_i در نظر می‌گیریم. در نتیجه هر عضو A_i متناظر با یک زیرمجموعه‌ی i عضوی از مجموعه‌ای صد عضوی است پس:

$$|A_i| = \binom{۱۰۰}{i}$$

به طور حسی $\Pr(A_{۵۰}) \geq \Pr(A_i)$ برای $i = ۱,۲,...,۱۰۰$ (بعداً خواهید توانست این موضوع را به طور دقیق ثابت کنید). پس داریم:

$$\Pr\left(\bigcup_{i=۰}^{۱۰۰} A_i\right) = ۱ \implies \Pr(A_{۵۰}) \geq \frac{۱}{۱۰۱}$$

چون فضای نمونه‌ای همشانس است، پس:

$$\Pr(A_{50}) = \frac{|A_{50}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{100}{50}}{2^{100}} = \frac{100!}{50! \times 50! \times 2^{100}}$$

محاسبه مقدار دقیق عدد بالا کار دشواری است اما می‌توان با استفاده از فرمول استرلینگ، مقدار تقریبی عدد بالا را به دست آورد. تقریب استرلینگ به صورت زیر است:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

پس داریم:

$$\Pr(A_{50}) = \frac{100!}{50! \times 50! \times 2^{100}} \approx \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \approx 0.08$$

مثال ۶ احتمال مشاهده زیر دنباله HT در پرتاب ۱۰۰ سکه سالم چقدر است (H نماینده رخداد شیر و T نماینده رخداد خط است)؟

پاسخ فضای نمونه‌ای مانند مثال ۵ است. ابتدا احتمال عدم مشاهده HT را محاسبه می‌کنیم:

$$A^c = \left\{H^{100}, TH^{99}, T^2H^{98}, ..., T^{99}H, T^{100}\right\} \implies \Pr(A^c) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{101}{2^{100}} \approx 0$$

پس :

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - \frac{101}{2^{100}} \approx 1$$

مثال ۷ احتمال مشاهده دنباله HH در پرتاب ۱۰۰ سکه چقدر است؟

پاسخ فضای نمونه‌ای مانند مثال ۵ است. ابتدا احتمال عدم مشاهده HH را محاسبه می‌کنیم. a_n را تعداد دنباله‌های به طول n در نظر می‌گیریم که HH ندارند. پس:

n	۱	۲	۳	۴	...
a_n	۲	۳	۵	۸	...

سعی می‌کنیم دنباله‌ای بازگشتی برای a_n بیابیم. برای محاسبه a_n دو حالت درنظر می گیریم:
در پرتاب اول خط بیاید که در این صورت برای $n-1$ پرتاب بعدی جواب برابر a_{n-1} خواهد بود.
در پرتاب اول شیر بیاید که در این صورت باید حاصل پرتاب دوم برابر خط باشد و برای $n-2$ پرتاب بعدی جواب برابر a_{n-2} خواهد بود.
پس داریم:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

چون $a_1 = f_3 = 2$ و $a_2 = f_4 = 3$ که f_n همان دنباله ی فیبوناتچی است، پس نتیجه می‌شود:

$$a_n = f_{n+2}$$

در نتیجه:

$$a_n = f_{n+2} \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}} = 1.17 \times (1.62)^n$$

پس احتمال مشاهده HH در n بار پرتاب سکه تقریباً برابر است با:

$$1 - 1.17 \times (0.81)^n$$

که برای n های بزرگ تقریباً برابر یک است.

مثال ۸ فرض کنید پنج عدد پاکت قرمز و پنج عدد پاکت سبز داریم. همچنین پنج عدد کارت قرمز و پنج عدد کارت سبز داریم. این ۱۰ کارت را به تصادف در ۱۰ پاکت قرار می‌دهیم. احتمال این که دقیقاً یک کارت قرمز در پاکتی قرمز قرار گیرد را حساب کنید.

پاسخ هر چند کارت‌ها و پاکت‌های همرنگ تمایزناپذیرند، اما برای جلوگیری از هرگونه اشتباه احتمالی در شمارش حالت‌ها و تعیین هم‌شانس بودن برآمدها می‌توان کارت‌ها را با $C_{۱}, \cdots, C_{۱۰}$ و پاکت‌ها را با $E_{۱}, \cdots, E_{۱۰}$ نامگذاری کنیم. در این صورت به وضوح فضای نمونه‌ای هم‌شانس است و داریم (این اعداد را خودتان توجیه کنید)

$$|\Omega_{۱}| = ۱۰!, |A| = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۴! \times ۴!$$

و بنابراین

$$\Pr(A_{۱}) = \frac{|A_{۱}|}{|\Omega_{۱}|} = \frac{۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۴! \times ۴!}{۱۰!} = \frac{۲۵}{۲۵۲} \approx ۰/۱$$

یک راه حل ساده‌تر به این صورت می‌توان پیشنهاد کرد. توجه داشته باشید که اگر کارت‌های ۵ پاکت قرمز مشخص شوند، کارت‌های پاکت‌های سبز نیز مشخص می‌شود. بنابراین فضای نمونه را ۵ کارت قرار داده شده در پاکت‌های قرمز رنگ در نظر می‌گیریم. پس تعداد اعضای فضای نمونه برابر با تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی می‌باشد. (توجه داشته باشید که تمامی برآمدها هم احتمال می‌باشند.)

$$|\Omega_{۲}| = \binom{۱۰}{۵}$$

پیشامد $A_{۲}$ را پیشامد مطلوب مسئله در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم تعداد اعضای مجموعه‌ی $A_{۲}$ را محاسبه کنیم. در هر یک از برآمدهای مربوط به پیشامد $A_{۲}$ برای انتخاب ۵ کارت، پاکت‌های قرمز باید یک کارت از بین ۵ کارت قرمز و ۴ کارت از بین ۵ کارت سبز انتخاب کنیم، که تعداد حالت‌های آن برابر است با:

$$|A_{۲}| = \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۴}$$

در نتیجه با توجه به هم احتمال بودن اعضای فضای نمونه‌ای داریم:

$$\Pr(A_{۲}) = \frac{|A_{۲}|}{|\Omega_{۲}|} = \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۵}{۴}}{\binom{۱۰}{۵}}$$

دانشجویی فضای نمونه‌ای $\Omega_{۳}$ و پشامد مطلوب $A_{۳}$ را به صورت دیگری در نظر گرفته است و به جواب زیر رسیده است. آیا می‌توان راه حل وی را توجیه کنید؟

$$\Pr(A_{۳}) = \frac{|A_{۳}|}{|\Omega_{۳}|} = \frac{\binom{۵}{۱} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۵}{۰}\binom{۵}{۵} + \binom{۵}{۱}\binom{۵}{۴} + \cdots + \binom{۵}{۵}\binom{۵}{۰}}$$