دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن	۲۹ بهمن ۹۲

جلسه‌ی ۴: کاربردهای اصول احتمال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی	*نگارنده: امیرعلی حنّانی*

۰ مرور اصول احتمال

در جلسات پیشین دیدیم که علم احتمال در فاصله‌ی سده‌های ۱۶ تا ۱۹ میلادی پیشرفت شگرفی کرد. فرما[۱] و پاسکال[۲] در قرن ۱۶ و ۱۷ آغازگر این علم بودند. اوایل قرن هجدهم آبراهام دوموآر [۳] و ژاکوب برنولی[۴] آثار مهمی در این زمینه ارائه کردند. در سال ۱۸۱۲ لاپلاس[۵] کتاب مشهور خود یعنی نظریه‌ی تحلیلی احتمال [۶] را منتشرکرد. با معلومات این کتاب طیف وسیعی از احتمالات مورد بحث در آن زمان قابل محاسبه بود.
بعد از لاپلاس پیشرفت احتمال کند شد تا در سال **۱۹۳۳** آندری کولموگروف[۷] مجموعه‌ای از اصول موضوعه را بیان کرد که تمام آنچه به نام علم احتمال می شناختیم از آن اصول قابل استنتاج بودند. به همین دلیل به این اصول، اصول موضوعه احتمال می گوییم. این اصول بدین شرح هستند:

تعریف ۱ *یک تابع احتمال بر فضای نمونه‌ای Ω تابعی است مانند P از زیرمجموعه‌های Ω به $[0,1]$ که در شرایط زیر صدق می کند:*

۱. $\forall A \subset \Omega, P(A) \geq 0$.

۲. $P(\Omega) = 1$.

۳. *اگر $A_1, A_2, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند(یعنی $\forall i \neq j A_i \cap A_j = \varnothing$) آنگاه داشته باشیم :*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (1)$$

نکته ۰ *جلسه‌ی گذشته دیدیم که اگر شرط سوم را برای حالت متناهی بیان کنیم،احتمال نسبت داده شده به برخی پیشامدهای مربوط به یک فضای نمونه‌ی نامتناهی با شهود قبلی ما سازگار نیست. و در برخی موارد اصلاً نمی توانیم به این پیشامدها احتمالی نسبت دهیم.به عنوان مثال مسئله‌ی انداختن سکه تا زمانی که شیر بیاید با اصل قبلی قابل حل نبود، و مجبور به اصلاح این اصل شدیم.*

نکته ۱ *وقتی می گوییم P یک تابع از زیرمجموعه‌های Ω به $[0,1]$ است، یعنی P روی تمام زیرمجموعه‌های Ω تعریف شده‌است. ولی این گزاره همیشه درست نیست. یعنی گاهی ممکن است تابع P روی بعضی زیرمجموعه‌های Ω قابل تعریف نباشد.[۸] در این مواقع با تسامح دامنه را به"پیشامدها" یعنی زیرمجموعه‌هایی که P روی آنها قابل تعریف است محدود می‌کنیم.[۹]*

[1] Pierre Fermat
[2] Pascal
[3] Abraham De Moivre
[4] Jacob Bernoulli
[5] Pierre-Simon Laplace
[6] Theorie Analytique des Probabilities
[7] Andrey Kolmogorov

[۸] در بخش‌های بعدی چنین مثالی خواهیم‌دید.
[۹] این نکته و تعریف از نظر منطقی ایجاد دور می کنند، در بخش بعد بیشتر در این‌باره توضیح خواهیم داد.

در جلسه‌ی گذشته با استفاده از همین سه اصل آنچه از احتمال انتظار داشتیم را ثابت کردیم، به عنوان نمونه یادآوری قضیه‌ی زیر که همان تعبیر کلاسیک احتمال است خالی از لطف نیست.[۱۰]

تعریف ۲ *فضای نمونه‌ای متناهی Ω را هم‌شانس می‌گوییم اگر* $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega : P(\omega_1) = P(\omega_2)$.

قضیه ۰ *اگر Ω یک فضای نمونه‌ی متناهی هم‌شانس باشد و A یک پیشامد در Ω، آنگاه:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{2}$$

که در اینجا $|A|$، تعداد اعضای A هستند.

۱ فضای نمونه‌ای ناشمارا

در این بخش فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای ما اعداد حقیقی یا یک زیرمجموعه از آن باشد.به سادگی می‌توان این مفاهیم را به ابعاد بالاتر تعمیم داد.

مثال ۱ *فرض کنید $\Omega = [0, 1]$، چگونه می‌توان یک نقطه به تصادف از Ω انتخاب کرد؟*

رهیافت نسبت دادن احتمال همشانس در این مورد کاساز نیست. زیرا می توان دو تابع احتمال متفاوت به این مجموعه نسبت داد که برای هر دو تابع احتمال تمام نقاط باهم برابر و برابر صفر باشد. (مثلا توزیع احتمال همگن درتمام بازه‌ی مورد نظر و توزیعی که به کل مجموعه‌ی $[0, 0.5]$ احتمال صفر نسبت می‌دهد. هر دوی این توابع احتمال در تمام نقاط مقدار صفر را بر می گردانند، ولی متفاوت هستند) پس برای این فضای نمونه نیاز به یک تعریف جدید داریم. که از اصول قبلی به‌دست نمی‌آید:

تعریف ۳ *نقطه‌ای به تصادف از بازه‌ی $[a, b]$ انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه نقطه در بازه‌ی $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ قرار بگیرد، برابر است با :*

$$P(A) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \tag{3}$$

این تعریف در واقع طبیعی ترین تعریفی است که به ذهن می‌رسد. و کاملابا شهود ما سازگار است.برای خواننده‌ای که آشنایی مختصری با آنالیز حقیقی دارد این تعریف بسیار آشنا است. در واقع در این‌جا احتمال یک زیرمجموعه از یک فضای نمونه را نسبت اندازه لبگ[۱۱] دو مجموعه در نظر گرفتیم.[۱۲]
اگر فضای نمونه‌ای مان را بازه‌ای در اعداد حقیقی بگیریم(مثل$[0, 1]$)آنگاه با استفاده از تعریف بالا و اصول کولموگروف می توانیم به دسته‌ی قابل توجهی از زیرمجموعه‌های این فضای نمونه‌ای احتمال نسبت دهیم.به عنوان مثال:

مثال ۲ $P(\{\frac{3}{7}\}) = 0$ *با توجه به اینکه طول بازه‌ی یک تک نقطه صفر است،این تساوی واضح است.*[۱۳]

مثال ۳ $P([0, 1)) = ?$ *حل:*$[a, b)$*و* $\{b\}$ *مجزا هستند، پس طبق اصل سوم داریم:* $P([0, 1]) = P([0, 1)) + P(\{1\})$ *اما بنابر مثال ۲ احتمال تک نقطه ای*$\{1\}$ *صفر است پس داریم:* $P([0, 1]) = P([0, 1))$

نکته ۲ *باتوجه به مثال بالا و استفاده از اصل سوم بدیهی‌است(چرا؟) که اگر فضای نمونه ای ما ناشمارا باشد، مثلا $\Omega = [0, 1]$ و از یک پیشامد شمارا نقطه کم کنیم یا به آن شمارا نقطه اضافه کنیم احتمال نسبت داده شده به آن تغییر نمی‌کند.*

---

[۱۰] در اینجا فقط صورت قضیه را می آوریم، اثبات در جلسه‌ی گذشته آمده است.

[۱۱] Lebesgue measure

[۱۲] منبع برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه:سه فصل اول از کتاب آنالیز حقیقی و مختلط، نوشته والتر رودین_ ترجمه دکتر علی اکبر عالم‌زاده. شابک:۱-۵۷-۵۹۹۳-۹۶۴.

[۱۳] در بخش بعد این تساوی را دقیقا ثابت می کنیم.

۱.۱ زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه که پیشامد نیست[14]

دراین بخش می‌خواهیم یک زیر مجموعه از بازه‌ی $[-1,2]$ معرفی کنیم که پیشامد نیست، یعنی با توجه به تعریف ۳ و اصول موضوعه‌ی احتمال نمی توان به این زیر مجموعه احتمالی نسبت داد. توجه کنید که "نمی‌توان نسبت داد" یعنی هر عددی به این مجموعه نسبت دهیم به تناقض می رسیم. ابتدا این مجموعه را معرفی می‌کنیم:
حال مجموعه‌ی $[0,1]$را درنظر بگیرید.رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر روی این مجموعه تعریف کنید:

تعریف ۴

$$\forall x,y\in[0,1], x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$$

رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.(چرا؟) پس می توان از کلاس‌های هم‌ارزی آن صحبت کرد.برای هر $\alpha\in[0,1]$ کلاس هم‌ارزی α را با Λ_α نشان می دهیم.(به وضوح برخی از این مجموعه‌ها تکراری هستند.) این کلاس‌های هم‌ارزی تشکیل یک گردایه از مجموعه‌ها می دهند، حال از هرکدام از این مجموعه‌ها یک و فقط یک نماینده انتخاب کنید و این نماینده‌ها را در یک مجموعه مثل E قرار دهید. عملی بودن این فرآیند نتیجه‌ی مستقیم اصل انتخاب[15] است.[16] قرار می‌دهیم: $Q=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. اما Q شماراست، پس می‌توان اعضای آن را به صورت $r_1,r_2,\ldots$ برچسب‌گذاری کرد. حال باتوجه به این تعاریف قرار می‌دهیم:

$$E_n=\{x+r_n|x\in E\}$$

دقت کنید که هرE_n انتقال یافته‌ی Eبه اندازه‌ی یک عدد ثابت مثل r_n است. از تعریف احتمال به راحتی نتیجه می شود که احتمال نسبت داده‌شده به یک مجموعه تحت انتقال ثابت است.(این از خواص بدیهی اندازه لبگ است) از طرف دیگر$E\subset[0,1]$ و $-1\geq r_n\geq 1$ پس به وضوح داریم : $E_n\subset[-1,2]$ پس E_n زیرمجموعه‌ی فضای نمونه است و همانE است که انتقال یافته‌است پس داریم[17]:

$$\forall n\in\mathbb{N} P(E)=P(E_n) \tag{4}$$

برای اثبات وجود چنین مجموعه‌ای از این لم(۱) استفاده می کنیم(لم را درانتها اثبات خواهیم کرد).

$$\forall n,m\in\mathbb{N}, n\neq m \implies E_n\cap E_m=\varnothing \tag{5}$$

پس مجموعه‌های $E_1,E_2,\ldots$ دوبه‌دو مجزا هستند. و احتمال همه‌ی آنها برابر هم و برابر $P(E)$ است. برای اتمام اثبات از یک لم دیگر(۲) هم استفاده می‌کنیم:

$$[0,1]\subset\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right) \tag{6}$$

اما دیدیم که برای هر n E_n زیرمجموعه‌ی $[-1,2]$ است پس داریم:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\subset[-1,2] \tag{7}$$

پس از رابطه‌ی (۶) و با استفاده از قضایای جلسه‌ی پیش داریم :

$$\frac{1}{3}=P([0,1])\leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq P([-1,2]=1 \tag{8}$$

[14]این بخش جزو سرفصل های درس نمی‌باشد.

[15]اصل انتخاب یکی از جذاب‌ترین و جنجال‌برانگیزترین اصول نظریه مجموعه‌هاست. در این زمینه می توانید منابع زیر را مطالعه کنید: پل ریچارد هالموس. نظریه طبیعی مجموعه‌ها. ترجمهٔ عبدالحمید دادالله. چاپ نوبت چاپ. تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳. ISBN ۹۶۴-۰۱-۰۰۵۲-۸
هم‌چنین:https://www.math.umass.edu/ weston/oldpapers/banach.pdf

[16]Axiom of choice

[17]اثبات دقیق‌تر اینکه چرا تحت انتقال احتمال تغییر نمی کند در کتاب معرفی شده در پانویس ۱۲ موجود است.

اما از رابطه‌ی (۵) و اصل سوم همراه با اعمال تساوی (۴) داریم

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E) \tag{۹}$$

از مقایسه‌ی رابطه‌ی (۸) و (۹) داریم :

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(E) \leq 1 \tag{۱۰}$$

که به وضوح تناقض است. زیرا اگر به E عددی ناصفر نسبت دهیم، عبارت جمع روی $P(E)$ نامتناهی می شود و با نابرابری سمت راست در تناقض است. و اگر به E صفر رانسبت دهیم، جمع روی $P(E)$ صفر می‌شود که این بار با نابرابری سمت چپ در تناقض است. پس زیرمجموعه‌ی E از فضای نمونه‌ای ما پیشامد نیست.[18] حال لم‌هایی که در بالا آوردیم را اثبات می کنیم:

لم ۱

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \implies E_n \cap E_m = \varnothing$$

برهان. *برهان خلف: فرض کنید $\exists n \neq m \ni E_n \cap E_m \neq \varnothing$ پس عضوی مانند x وجود دارد که هم عضو E_n است و هم عضو E_m. پس می‌توان نوشت: $x = \alpha + r_n = \beta + r_m$ که $r_m, r_n \in \mathbb{Q}$ پس از این تساوی نتیجه می‌شود که $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$ و در نتیجه α و β در یک رده‌ی هم ارزی هستند، اما α و β هر دو عضو E هستند و E از هر رده‌ی هم‌ارزی تنها یک عضو داشت. پس $\alpha = \beta$ و در نتیجه $r_n = r_m$ که یعنی $n = m$ و این با فرض خلف در تناقض است و لم ثابت می‌شود.* ■

لم ۲

$$[0, 1] \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

برهان. *عضو دلخواه x از بازه‌ی $[0, 1]$ را در نظر بگیرید. x در یکی از رده‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $\sim$ است. پس عضوی مثل $\alpha \in E$ وجود دارد که $q = x - \alpha$ و $q \in Q$. اما q دقیقا یکی از اعضای Q است. مثلا n امین عضو Q است. پس $q = r_n$. در نتیجه $x = \alpha + r_n$ که به وضوح بنابرتعریف E_n خواهیم داشت : $x \in E_n$. فلذا داریم : $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. که این تساوی اخیر همان اثبات لم (۲) است. و اثبات تمام می‌شود.* ■

نکته ۳ *در مثال بالا یک زیرمجموعه از فضای نمونه دیدیم که نمی توان با قبول خواص بدیهی احتمال به آن عددی به عنوان احتمال نسبت داد. برای بیان دقیق تر تعریف احتمال لازم است که زیر مجموعه هایی که به عنوان پیشامد می پذیریم را محدود کنیم. (کافی است زیر مجموعه‌ی مورد نظر اندازه پذیر لبگ باشد) اما در این درس تقریبا همیشه با مجموعه‌هایی سروکار داریم که پیشامد هستند.*

۲ قضیه‌ی پیوستگی احتمال

در ریاضیات مقدماتی قضیه‌ی زیر را برای توابع پیوسته مشاهده کرده‌ایم.

قضیه ۳ *تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی R پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله‌ی همگرای $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x_0$ دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای به $f(x_0)$ باشد.*

حال می خواهیم مشابه چنین قضیه ای را برای تابع احتمال بیان کنیم. اما می دانیم که دامنه‌ی تابع احتمال مجموعه‌ها(پیشامدها) هستند. پس برای بیان چنین قضیه‌ای برای تابع احتمال، باید مفهوم حد برای دنباله‌ای از پیشامد را تعریف کنیم. دقت کنید که در این جا این حد را فقط برای دنباله‌های افزایشی و کاهشی تعریف می کنیم.

تعریف ۵ *اگر A_i به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ یک پیشامد باشد،آنگاه به دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از پیشامدها می‌گوییم.*

[18] خواننده‌ی آشنا به مفاهیم آنالیز حقیقی به راحتی می‌تواند بررسی کند که E یک مجموعه‌ی اندازه‌ناپذیر لبگ روی اعداد حقیقی است.

حال دنباله‌های کاهشی و افزایشی از پیشامدها و مفهوم حد برای آنها را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۶

دنباله‌ی افزایشی: دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی افزایشی از پیشامدها می‌گوییم اگر:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$$

یعنی :

$$\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq A_{i+1}$$

حد دنباله‌های افزایشی را به صورت زیر تعریف می کنیم[19] *:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

دنباله‌ای کاهشی: دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی کاهشی از پیشامدها می‌گوییم اگر:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

یعنی :

$$\forall i \in \mathbb{N}, A_{i+1} \subseteq A_i$$

حد دنباله‌های کاهشی را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

اکنون یک مثال از دنباله‌های کاهشی و افزایشی می زنیم و حد آن‌ها را بیان می‌کنیم[20] .

مثال ۴ *قرار دهید: $A_i = [0, 1 - \frac{1}{2^i}]$. در این صورت دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی افزایشی است. پس داریم :*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} [0, 1 - \frac{1}{2^i}] = [0, 1)$$

حال قرار دهید: $A_i = (\frac{-1}{2^i}, \frac{1}{2^i})$. در این صورت $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله‌ی کاهشی است و داریم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\frac{-1}{2^i}, \frac{1}{2^i}) = \{0\}$$

حال با توجه به تعاریف بالا قضیه‌ی پیوستگی احتمال را بیان می کنیم:

قضیه ۴ *قضیه پیوستگی احتمال اگر $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله ای از پیشامدهای کاهشی یا افزایشی از فضای نمونه‌ای Ω باشد و P یک تابع احتمال روی این فضای نمونه‌ای باشد. آنگاه خواهیم داشت :*

$$P\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} P\big(A_n\big)$$

هدف از بیان این قضیه آن است که بتوانیم برای مجموعه‌هایی که به سادگی بازه‌ها نیستند، مقدار تابع احتمال را محاسبه کنیم. ابتدا این قضیه را ثابت می کنیم و سپس برای فهم بهتر این موضوع یک مثال می زنیم.

برهان. برای اثبات این قضیه دو حالت مختلف را بررسی می کنیم:

[19] فرض شده‌است که خواننده مفهوم اجتماع و اشتراک نامتناهی را می‌داند.در واقع xدر اجتماع نامتناهی مجموعه است اگر و فقط اگر در یکی از آن‌ها باشد. و در اشتراک نامتناهی مجموعه است اگر وفقط اگر در همه‌ی آن‌ها باشد.

[20] محاسبه‌ی دقیق این حدها به خواننده واگذار می شود

حالت اول زمانی است که دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ افزایشی باشد:

در این حالت قرار دهید : $B_۱ = A_۱$ و همچنین $\forall n \in \mathbb{N}, n > ۱, B_n = A_n \setminus A_{n-۱}$ بنابر خواص مقدماتی نظریه مجموعه ها داریم :

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=۱}^{\infty} B_i, \forall n \in \mathbb{N} : A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = \bigcup_{i=۱}^{n} B_i$$

و به وضوح B_i ها دو به دو ناسازگار هستند.پس بر اساس این دو واقعیت می‌توان سلسله تساوی های زیر را نوشت. (تساوی اول از رابطه‌ی بالا و تساوی دوم از اصل سوم کولموگروف و تساوی سوم از تعریف حد سری وتساوی چهارم هم از اصل سوم کولموگروف وتساوی پنجم وششم هم از اصل بالا نتیجه می‌شوند.)

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} B_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} P(B_i) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=۱}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

که به وضح این تساوی اخیر قضیه را برای این حالت اثبات می کند.

حالت دوم زمانی است که دنباله‌ی $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ کاهشی باشد:

در این حالت دنباله‌ی $\{{A^c}_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک دنباله‌ی افزایشی خواهد بود. با استفاده از این واقعیت واضح که :

$$A \subseteq B \to B^c \subseteq A^c$$

اثبات این ادعا بدیهی است. پس با استفاده از قانون دمورگان و قسمت الف خواهیم داشت:

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i) = ۱ - P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} {A^c}_i) = ۱ - \lim_{n\to\infty} P({A^c}_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} [۱ - P({A^c}_n)] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

که اثبات برای حالت دوم هم به پایان می رسد.

■

حال سعی می‌کنیم با استفاده از قضیه‌ی فوق مثال ۲ را دوباره حل کنیم.

مثال ۵ *یک نقطه به تصادف از بازه‌ی $[۰, ۱]$ انتخاب می‌کنیم، به چه احتمالی این نقطه، نقطه‌ی $\frac{۱}{۳}$ است؟*

حل. قرار دهید: $A_i = [\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴^i}, \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴^i}]$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \lim_{i\to\infty} [\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴^i}, \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴^i}] = \{\frac{۱}{۳}\}$$

وهم چنین بنابر تعریف احتمال در فضای پیوسته(رابطه(۳)):

$$P(A_i) = \frac{۲}{۴^i}$$

اما بنابر قضیه پیوستگی احتمال خواهید داشت:

$$P(\{\frac{۱}{۳}\}) = P(\lim_{i\to\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} \frac{۲}{۴^i} = ۰$$

که حاصل همان مقداری است که در مثال ۲ محاسبه کردیم.

۳ دو مثال ساده

اکنون دو مثال ساده از حالت‌هایی که فضای نمونه‌ای گسسته است حل می کنیم:

مثال ۶ *دو تاس سالم را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آمدن مجموع ۷ در این پرتاب چند است؟*

حل. برای حل این مثال از رابطه‌ی $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ استفاده می کنیم. ابتدا Ω و A را معلوم می‌کنیم:

$$\Omega=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\times\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}, A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۱,۶)\}\rightarrow P=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

.

مثال ۷ *ظرفی شامل ۶ توپ سفید و ۵ توپ سیاه است. ۳ توپ به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه یکی از توپ‌ها سفید و دیگری سیاه باشد، چه‌قدر است.*

حل. باز هم از رابطه‌ی $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$ استفاده می کنیم. برای برداشتن توپ اول ۱۱ حالت، برای توپ دوم

$$۱۰$$

حالت و برای توپ سوم

$$۹$$

حالت داریم.پس بنابر اصل ضرب داریم:

$$|\Omega|=۱۱*۱۰*۹$$

اما برای رخ دادن حالت مطلوب سه حالت مجزا رخ می‌دهد، اول اینکه توپ سفید در انتخاب اول ظاهر شود، دوم اینکه توپ سفید در انتخاب دوم ظاهر شود و سوم اینکه توپ سفید در انتخاب سوم ظاهر شود. که تعداد حالات کل جمع حالات ممکن در این سه رویداد است.اما در هر حالت برای توپ سفید

$$۶$$

حالت و برای توپ‌های سیاه ۴ * ۵ حالت داریم. پس :

$$|A|=۶*۵*۴+۵*۶*۴+۵*۴*۶\rightarrow P=\frac{۶*۵*۴+۵*۶*۴+۵*۴*۶}{۱۱*۱۰*۹}=\frac{۴}{۱۱}.$$