دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد آن ۲۷ بهمن ۹۲

جلسه‌ی ۳: اصول احتمال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارنده: امیرعلی حسین*

۱ مقدمه

در جلسات قبل مطرح شد که ریاضی‌دان‌ها به دنبال ارائه‌ی مجموعه‌ای از اصول موضوعه بودند تا بتوانند مسائل احتمال را به طور دقیق فرمول‌بندی کنند. مشابه این کار قبلا در زمینه‌های دیگر صورت گرفته‌بود، برای مثال:

- اصول هندسه‌ی اقلیدسی (اقلیدس)
- اصول مکانیک کلاسیک (نیوتون)
- اصول منطق (راسل و ...)

یک تعریف پیشنهادی برای احتمال پیشامد A به صورت نسبت تعداد دفعات رخ دادن پیشامد A در n آزمایش به n در حد n به سمت بینهایت بود:

$$\Pr(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}$$

اما بنا کردن نظریه‌ی احتمال بر این تعریف با چند چالش جدی روبه‌رو بود که نیاز به برطرف کردن داشتند:

۱. ممکن است این حد وجود نداشته‌باشد.

۲. شاید مقادیری که برای این حد در دفعات مختلف تکرار آزمایش به دست می‌آوریم متفاوت باشند.

۳. از لحاظ تجربی امکان میل دادن n به سمت بینهایت وجود ندارد.

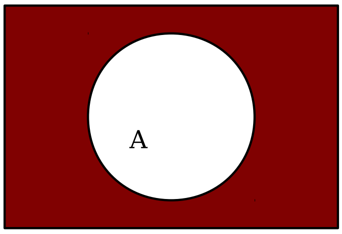
گرچه امروزه یکی از رویکردهای ریاضی‌دان‌ها درباره‌ی احتمال، فرض گرفتن وجود این حد (با یک تعریف مشخص) و استفاده از آن برای به دست آوردن باقی مجهولات است، رویکرد متداول‌تر بر اساس اصول پیشنهادی کولموگروف[۱] است. قبل از مطرح کردن اصول کولموگروف، ابتدا نکاتی از نظریه‌ی مجموعه‌ها را یادآوری می‌کنیم و سپس انتظاراتی که به طور شهودی از خواص احتمال داریم را بررسی می‌کنیم.

۲ نظریه‌ی مجموعه‌ها و پیشامدها

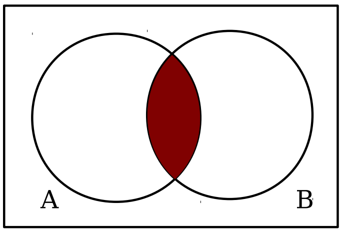
در جلسات قبل فضای نمونه را به عنوان مجموعه‌ی تمام برآمدهای ممکن و یک پیشامد را به عنوان زیرمجموعه‌ای از این مجموعه تعریف کردیم. بنابراین می‌توانیم با الهام گرفتن از نظریه‌ی مجموعه‌ها مفاهیم دیگری را نیز تعریف کنیم و برای نمایش آنها نیز از ابزاری مثل نمودار ون[۲] استفاده کنیم.

[۱] Kolmogorov
[۲] Venn Diagram

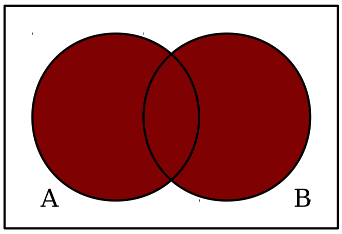
اگر A یک پیشامد باشد، پیشامد مکمل آن را با A^c نشان می‌دهیم.
پیشامد وقوع همزمان دو پیشامد A و B را با AB نشان می‌دهیم.
پیشامد وقوع حداقل یکی از پیشامدهای A و B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم.
پیشامد همزمان شدن وقوع پیشامد A و عدم وقوع پیشامد B را با $A \backslash B$ نشان می‌دهیم.



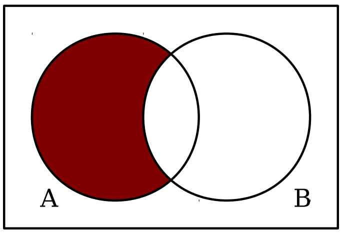
شکل ۱: نمایش A^c به کمک نمودار ون.



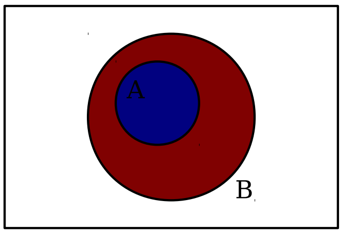
شکل ۲: نمایش AB به کمک نمودار ون.



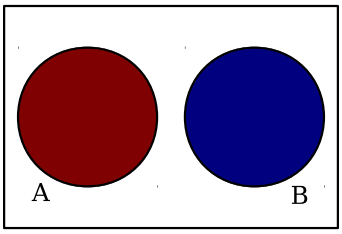
شکل ۳: نمایش $A \cup B$ به کمک نمودار ون.



شکل ۴: نمایش $A \backslash B$ به کمک نمودار ون.



شکل ۵: نمایش $A \subseteq B$ به کمک نمودار ون.



شکل ۶: نمایش $AB = \varnothing$ به کمک نمودار ون.

گزاره‌ی «اگر پیشامد A رخ داده‌باشد آنگاه پیشامد B رخ داده‌است» را به صورت $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم.
گزاره‌ی «وقوع همزمان پیشامدهای A و B غیرممکن است» را به صورت $AB = \varnothing$ نشان می‌دهیم. و می‌گوییم پیشامدهای A و B ناسازگارند. همچنین اینکه پیشامدهای $A_1, A_2, ..., A_n$ ناسازگارند به این معنی است که دوبه‌دو ناسازگارند.

۳ انتظارات ما از خواص احتمال

با توجه به معنی احتمال به طور شهودی انتظار داریم هر نوع تعریفی از احتمال، مجموعه‌ای از خواص را ارضا کند. برای مثال:

- برای هر پیشامد A داشته‌باشیم $0 \leq \Pr(A) \leq 1$ و همچنین $\Pr(\Omega) = 1$ و $\Pr(\varnothing) = 0$.

- داشته‌باشیم $\Pr(A^c) = ۱ - \Pr(A)$.
- اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه $\Pr(AB) = ۰$ و $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$.
- اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\Pr(A) \leq \Pr(B)$ و $\Pr(B \backslash A) = \Pr(B) - \Pr(A)$.
- به طور کلی داشته‌باشیم $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.

همچنین انتظار داریم قضایایی مثل قضیه‌ی شمول-عدم‌شمول برای احتمال‌ها هم برقرار باشند. یعنی برای مثال برای n پیشامد $A_۱, A_۲, ..., A_n$ داشته‌باشیم:

$$\Pr\big(\bigcup_{i=۱}^{n} A_i\big) = \sum_{i=۱}^{n} \Pr(A_i) - \sum_{\substack{i,j=۱ \\ i<j}}^{n} \Pr(A_i A_j) + ... + (-۱)^{n+۱} \Pr(A_۱ A_۲ ... A_n)$$

و

$$\Pr(A_۱ \cup A_۲ \cup ... \cup A_n) \leq \Pr(A_۱) + \Pr(A_۲) + ... + \Pr(A_n)$$

۴ اصول احتمال کولموگروف

به عنوان یک تلاش اولیه برای وضع اصول موضوعه‌ی احتمال، می‌توانیم احتمال را بر مبنای سه اصل ساده و بدیهی تعریف کنیم. یک تابع احتمال $\Pr$ بر فضای نمونه‌ی Ω تابعی است از زیرمجموعه‌های Ω به مجموعه اعداد حقیقی که در سه اصل زیر صدق کند:

۱. $\Pr(A) \geq ۰$
۲. $\Pr(\Omega) = ۱$
۳. اگر A و B ناسازگار باشند، $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$

قضیه ۱ *می‌توان نشان‌داد که خواص شهودی‌ای که از احتمال انتظار داشتیم را می‌توان از این اصول استنتاج کرد.*

برهان. خواص مطرح شده به صورت زیر قابل استنتاج هستند:

- برای هر پیشامد A از خواص مجموعه‌ها داریم:

$$A \cup A^c = \Omega$$

بنابراین با استفاده از اصل دوم احتمال:

$$\Pr(A \cup A^c) = \Pr(\Omega) = ۱$$

از طرفی از خواص مجموعه‌ها داریم:

$$AA^c = \varnothing$$

پس A و A^c دو پیشامد ناسازگارند و می‌توانیم از اصل سوم احتمال بنویسیم:

$$\Pr(A \cup A^c) = \Pr(A) + \Pr(A^c)$$

و بنابراین با استفاده از $\Pr(A \cup A^c) = ۱$ داریم:

$$\Pr(A) + \Pr(A^c) = ۱ \Rightarrow \Pr(A) = ۱ - \Pr(A^c)$$

A^c خود یک پیشامد از فضای نمونه است و بنابر اصل اول داریم:

$$\Pr(A^c) \geq ۰$$

پس:

$$\Pr(A) \leq ۱$$

- اگر $A \subseteq B$ آنگاه از خواص مجموعه‌ها داریم:

$$B = A \cup (B \backslash A)$$

و

$$A(B \backslash A) = \varnothing$$

یعنی A و $B \backslash A$ دو پیشامد ناسازگارند و بنابراین می‌توان از اصل سوم احتمال نوشت:

$$\Pr(B) = \Pr(A \cup (B \backslash A)) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$$

از اصل اول احتمال برای پیشامد $B \backslash A$ داریم:

$$\Pr(B \backslash A) \geq ۰$$

پس:

$$\Pr(B) \geq \Pr(A)$$

- برای هر دو پیشامد A و B از نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان نوشت:

$$A \cup B = A \cup (B \backslash A)$$

و

$$A(B \backslash A) = \varnothing$$

بنابراین دو پیشامد A و $B \backslash A$ ناسازگارند و می‌توان از اصل سوم احتمال نوشت:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \cup (B \backslash A)) = \Pr(A) + \Pr(B \backslash A)$$

همچنین از نظریه‌ی مجموعه‌ها داریم:

$$B = (B \backslash A) \cup (AB)$$

و

$$(B\backslash A)(AB) = \varnothing$$

بنابراین دو پیشامد $B\backslash A$ و AB ناسازگارند و می‌توان از اصل سوم احتمال نوشت:

$$\Pr(B) = \Pr((B\backslash A) \cup (AB)) = \Pr(B\backslash A) + \Pr(AB) \Rightarrow \Pr(B\backslash A) = \Pr(B) - \Pr(AB)$$

حال با جایگزین کردن رابطه‌ای که برای $\Pr(B\backslash A)$ به‌دست آوردیم در $\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B\backslash A)$ خواهیم‌داشت:

$$\Pr(A\cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$$

و با همین روش به کمک استقرای ریاضی می‌توان به این رابطه رسید:

$$\Pr\big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=0}^{n} \Pr(A_i) - \sum_{\substack{i,j=0\\ i<j}}^{n} \Pr(A_iA_j) + ... + (-1)^{n+1}\Pr(A_1A_2...A_n)$$

■

قرارداد ۱ *اگر ω عضوی از فضای نمونه باشد، احتمال رخ دادن پیشامد $\{\omega\}$ را با $\Pr(\omega)$ نشان می‌دهیم.*

نکته ۱ *البته این سه اصل به تنهایی مقادیر احتمال را مشخص نمی‌کنند. برای مثال برای آزمایش پرتاب یک سکه که فضای نمونه‌ی آن به صورت $\Omega = \{H, T\}$ است، هم می‌توانیم احتمال‌ها را به صورت $\Pr(H) = \frac{1}{4}$ و $\Pr(T) = \frac{3}{4}$ در نظر بگیریم و هم می‌توانیم احتمال‌ها را به صورت $\Pr(H) = \Pr(T) = \frac{1}{2}$ در نظر بگیریم و هردو با اصول احتمال سازگار خواهند بود.*

۵ فضای نمونه‌ی هم‌شانس

فضای نمونه‌ای متناهی Ω را هم‌شانس می‌گوییم اگر:

$$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega : \Pr(\omega_1) = \Pr(\omega_2)$$

قضیه ۲ *اگر Ω یک فضای نمونه‌ی متناهی هم‌شانس باشد و A یک پیشامد در Ω، آنگاه:*

$$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

اثبات: *ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر $\omega_0 \in \Omega$ داریم $\Pr(\omega_0) = \frac{1}{|\Omega|}$. از اصل دوم احتمال داریم:*

$$\Pr(\Omega) = 1$$

از خواص مجموعه‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}$$

با چندین بار استفاده از اصل سوم احتمال داریم:

$$\Pr\big(\bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}\big) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pr(\omega)$$

حال از ویژگی هم‌شانس بودن فضای نمونه استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega_۰)=|\Omega|\Pr(\omega_۰)$$

پس در کل داریم:

$$\Pr(\omega_۰)=\frac{۱}{|\Omega|}$$

بنابراین برای هر پیشامد مثل A هم می‌توانیم بنویسیم:

$$\Pr(A)=\Pr\big(\bigcup_{a\in A}\{a\}\big)=\sum_{a\in A}\Pr(a)=\sum_{a\in A}\Pr(\omega_۰)=|A|\frac{۱}{|\Omega|}$$
$$\Rightarrow \Pr(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

۶ صورت بهبودیافته‌ی اصل سوم احتمال

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱ *می‌خواهیم منطبق با اصول احتمال به هر یک از برآمدهای آزمایش «پرتاب سکه تا وقتی که شیر بیاید» احتمالی منتسب کنیم. از شهودمان انتظار داریم که احتمال شیر آمدن در اولین پرتاب با مجموع احتمال شیر آمدن در تمام پرتاب‌های دیگر (که به معنی خط آمدن در پرتاب اول است) برابر باشد. به طور مشابه انتظار داریم که احتمال شیر آمدن در پرتاب دوم با مجموع احتمال شیر آمدن در تمام پرتاب‌های بعدی (که به معنی خط آمدن در پرتاب دوم است) برابر باشد. با توجه به این انتظارات حدس می‌زنیم که نسبت دادن مقدار ۲^{-i} به احتمال شیر آمدن در پرتاب iام تابع احتمال مناسبی باشد. حالا برای بررسی تطابق این تابع احتمال با اصول سعی می‌کنیم که $\Pr(\Omega)$ را محاسبه کنیم. ممکن است تصور کنیم که می‌توانیم چنین چیزی بنویسیم:*

$$\Pr(\Omega)=\big(\bigcup_{i=۱}^{\infty}\{i\}\big)=\sum_{i=۱}^{\infty}\Pr(i)=\sum_{i=۱}^{\infty}۲^{-i}=۱$$

اما اصل سومی که ما مطرح کردیم تنها به ما اجازه‌ی محاسبه‌ی احتمال اجتماع تعداد متناهی‌ای پیشامد را می‌دهد و بنابراین برای محاسبه‌ی احتمال‌هایی به شکل بالا نیاز به بهبود این اصل داریم.

تعریف ۱ *(دنباله‌ای از پیشامدها) اگر A_i به ازای هر $i\in\mathbb{N}$ یک پیشامد باشد، به دنباله‌ی $A_۱,A_۲,\ldots$ دنباله‌ای از پیشامدها می‌گوییم.*

تعریف ۲ *(اجتماع و اشتراک دنباله‌ای از پیشامدها) اگر $A_۱,A_۲,\ldots$ دنباله‌ای از پیشامدها باشد، اجتماع و اشتراک آنها را به ترتیب به این صورت تعریف می‌کنیم:*

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty}A_i=\{\omega|\exists i:\omega\in A_i\}$$
$$\bigcap_{i=۱}^{\infty}A_i=\{\omega|\forall i:\omega\in A_i\}$$

تعریف ۳ *(اصول احتمال کولموگروف) یک تابع احتمال $\Pr$ بر فضای نمونه‌ی Ω تابعی است از (بعضی از) زیرمجموعه‌های Ω به مجموعه اعداد حقیقی که در سه اصل زیر صدق کند:*

۱. $\Pr(A) \geq ۰$

۲. $\Pr(\Omega) = ۱$

۳. *اگر $A_۱, A_۲, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدهای (دوبه‌دو) ناسازگار باشد، داریم:*

$$\Pr\big(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=۱}^{\infty} \Pr(A_i)$$

نکته ۲ *در جلسه آینده در مورد اینکه چرا تابع احتمال روی بعضی از زیرمجموعه‌های Ω تعریف می‌شوند بیشتر صحبت خواهیم کرد.*

سؤال ۱ *با استفاده از صورت بهبودیافته‌ی اصل سوم، احتمال هر پیشامد در آزمایش «پرتاب سکه تا وقتی که شیر بیاید» را پیدا کنید.*

۷ حد دنباله‌ای از پیشامدها

حد دنباله‌ای از پیشامدها در حالت کلی ممکن است بی‌معنی باشد. اما برای دنباله‌های افزایشی و کاهشی می‌توان تعریفی قابل استفاده ارائه کرد.

تعریف ۴ *(دنباله‌ای افزایشی) دنباله‌ی $A_۱, A_۲, \ldots$ را یک دنباله‌ی افزایشی از پیشامدها می‌گوییم اگر:*

$$A_۱ \subseteq A_۲ \subseteq \ldots$$

برای چنین دنباله‌ای، حد زیر را به این صورت تعریف کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i$$

تعریف ۵ *(دنباله‌ای کاهشی) دنباله‌ی $A_۱, A_۲, \ldots$ را یک دنباله‌ی کاهشی از پیشامدها می‌گوییم اگر:*

$$A_۱ \supseteq A_۲ \supseteq \ldots$$

برای چنین دنباله‌ای، حد زیر را به این صورت تعریف کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=۱}^{\infty} A_i$$

سؤال ۲ *آیا برای یک دنباله‌ی افزایشی یا کاهشی رابطه‌ی زیر برقرار است؟*

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(A_n) = \Pr\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big)$$