دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردآن | ۲۰ بهمن ۹۲

جلسه‌ی ۲: تاریخچه‌ی احتمال

مدرّس: دکتر شهرام خزائی | *نگارنده: علی احمدآبادی‌ها*

۱ تاریخچه

در واقع بررسی دقیق احتمالات تا قرن ۱۵ آغاز نشده بود. البته واضح است که پیش از آن افراد در قمار و بازی‌ها متوجه شده بودند که برخی حالت‌ها کمتر یا بیشتر اتفاق می‌افتند و به گونه‌ای شهودی با احتمال آشنایی داشتند. ولی روند بررسی علمی احتمال با کارهای لوکا پاچیولی[۱] در سال ۱۴۹۴ آغاز شد. پس از آن دانشمندان زیادی به اظهار نظر در این مورد پرداختند و احتمال‌های زیادی را محاسبه کردند.
در اوایل قرن بیستم احتمالات گسترش زیادی پیدا کرده بود اما پایه‌ی ریاضی محکمی نداشت و یکی از اهداف این بود که برای احتمالات زمینه‌ی ریاضی محکمی ارائه شود. یکی از مصداق‌های این موضوع این بود که در سال ۱۹۰۰ دیوید هیلبرت[۲] ۲۳ مسأله مطرح کرد که راه‌حل آن‌ها را برای پیشرفت ریاضی تعیین‌کننده می‌دانست و مسأله‌ی ششم هیلبرت مربوط به احتمال بود. در واقع این مسأله با عنوان ارائه‌ی ساختار ریاضیاتی اصل موضوعی برای فیزیک مطرح شد. اما هیلبرت در توضیح این مسأله گفت که یکی از موارد مورد نظر وی احتمال بوده است.این مسأله در سال ۱۹۳۳ توسط کولموگروف[۳] با ارائه اصول موضوعه‌ی احتمالی که امروزه نیز مورد قبول است حل شد.
چند واقعه مهم در تاریخچه‌ی علم احتمال در زیر ذکر شده است:

- (۱۴۹۴) پاچیولی چندین احتمال را بررسی و محاسبه کرد.
- (۱۶۵۴) نامه‌های زیادی بین پاسکال و فرما رد و بدل شد که در آنها روشهای کلی برای محاسبه‌ی احتمال مورد بحث قرار گرفته بود.
- (۱۹۰۰) مطرح شدن مسائل هیلبرت که یکی از آن‌ها مربوط به احتمال بود.
- (۱۹۳۳) ارائه‌شدن اصول موضوعه‌ی احتمال توسط کولموگروف.

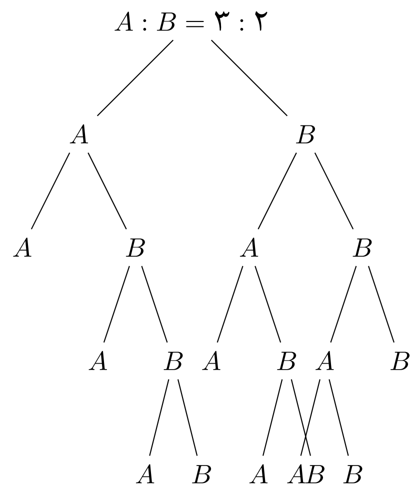
۲ مسأله‌ی امتیازها

مسأله‌ی امتیازها[۴] مسأله‌ای است که در یکی از نامه‌های پاسکال[۵] به فرما[۶] مطرح شده است.

[۱] Luca Paccioli(1445-1514)
[۲] David Hilbert(1862-1943)
[۳] Andrei Kolmogorov(1903-1987)
[۴] problem of points
[۵] Blaise Pascal(1623-1662)
[۶] Pierre de Fermat(1601-1665)

سؤال ۱ *دو بازیکن A و B در یک بازی مفروض که حالت تساوی ندارد شرکت می‌کنند. احتمال برد هر دو بازیکن در هر بازی یکسان است و قرار است بازی تا زمانی که یکی از بازیکن ها زودتر به ۵ برد دست یابد ادامه یابد که در آن صورت، برنده جایزه‌ای به مبلغی معلوم را تصاحب خواهد شد. بنابر دلیلی نامعلوم، وقتی که بازی ۳ بر ۲ به نفع A است متوقف می‌شود. تقسیم عادلانه جایزه به چه نسبتی باید صورت گیرد؟*

اگر کمی دقت کنیم متوجه می‌شویم که عوامل زیادی در جواب نقش دارند (مثلا اگر فرض کنیم که یکی از بازیکنان قوی‌تر است) و مسأله چندان هم ساده نیست. ما برای ساده‌کردن سؤال به جای بازی شطرنج پرتاب سکه را در نظر می‌گیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم A و B در هر بازی شانس برابری برای بردن دارند.
در واقع هدف ما پیداکردن احتمال برنده‌شدن هر نفر است تا جایزه را به نسبت احتمال‌ها تقسیم کنیم. یک راه مؤثر برای مشاهده و بررسی تمام حالت‌های ممکن کشیدن نمودار درختی است. در این جا مثلا احتمال برد A را بررسی می‌کنیم.



می‌توانیم فضای نمونه‌ای را با کمک نمودار درختی فوق نمایش دهیم. با توجه به اینکه A نیاز به دو برد دیگر و B نیاز به سه برد دیگر دارد، فضای نمونه‌ای را به صورت رشته‌ای از حروف A و B به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$\Omega = \{AA, ABA, ABBA, ABBB, BAA, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBB\}$$

هر عضو فضای نمونه‌ای یکی از حالت‌هایی را که برای برد یکی از بازیکنان ممکن در صورت ادامه بازی اتفاق بیفتد نشان می‌دهد. برد A با حرف A و برد B با حرف B نمایش داده شده‌است.
سعی می‌کنیم با استفاده از شهودی که از احتمال داریم مسأله را حل کنیم. در اینجا ۱۰ حالت داریم که در ۶ حالت A برنده می‌شود. اما به نظر نمی‌رسد که احتمال برد A، برابر $\frac{۶}{۱۰}$ باشد، زیرا اعضای فضای نمونه‌ای همشانس نیستند.
برای حل مسأله، فضای نمونه‌ای را طوری بازنویسی کنیم تا به صورت شهودی اعضای آن همشانس شوند. حداکثر تعداد بازی که برای تعیین برنده لازم است ۴ بازی است. تصور می‌کنیم که دو بازیکن دقیقا ۴ بار دیگر مسابقه می‌دهند اما چون برنده ممکن از زودتر مشخص شده باشد، نتیجه مسابقات آخر نباید تأثیری بر تعیین برنده داشته باشد.

$$\Omega = \{AA\underline{AA}, AA\underline{AB}, AA\underline{BA}, AA\underline{BB}, ABA\underline{A}, ABA\underline{B}, ABBA, ABBB,$$

$$BAA\underline{A}, BAA\underline{B}, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBB\underline{A}, BBB\underline{B}\}$$

بدین ترتیب یک فضای نمونه‌ای ۱۶ عضوی داریم که به خاطر تقارن مساله همه اعضای آنها باید همشانس باشند. با توجه به اینکه در هر مرحله احتمال برد هر بازیکن $\frac{۱}{۲}$ است و مجموع احتمال وقوع برآمدها باید یک باشد، احتمال وقوع هر برآمد فضای نمونه‌ای جدید $\frac{۱}{۱۶}$ است. بدین‌ترتیب احتمال وقوع هر عضو فضای نمونه‌ای قبلی را می‌توان محاسبه

کرد. مثلا با توجه به اینکه وقوع برآمد AA و BAA به ترتیب در صورت وقوع چهار و دو برآمد فضای نمونه‌ای جدید تضمین می‌شود، احتمال وقوع این برآمدها به ترتیب برابر $\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۶} \times ۴$ و $\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۱۶} \times ۲$ خواهد بود. به این ترتیب احتمال برد A را می‌توان محاسبه نمود:

$$\Pr(A) = ۴ \times \frac{۱}{۱۶} + ۲ \times \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + ۲ \times \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

۳ دو مسأله‌ی دیگر

مسأله‌ی بعدی را آنتوان گومبو (معروف به شوالیه دو مره)[۷]، نویسنده و ریاضی‌دان آماتور فرانسوی که دوست پاسکال بوده به پاسکال معرفی کرده است.

سؤال ۲ *شما کدام بازی را انتخاب می‌کنید؟*
الف) پرتاب ۴ تاس که اگر (حداقل یک عدد) شش بیاوریم برنده می‌شویم.
ب) ۲۴ بار پرتاب یک زوج تاس که اگر (حداقل یک بار) جفت‌شش بیاوریم برنده‌ایم.

احتمال برنده‌شدن را در دو حالت به دست می‌آوریم. محاسبه‌ی این احتمال‌ها با اطلاعات دبیرستانی شما کار ساده‌ای باید باشد، اما پاسکال این محاسبات را با روش‌های شمارشی پیچیده‌ای انجام می‌داده است. در دو حالت احتمال برنده‌نشدن را محاسبه کرده و آن را از یک کم می‌کنیم.
الف) احتمال ۶ نیامدن در پرتاب هر تاس $\frac{۵}{۶}$ است. بنابراین داریم:

$$p_۱ = ۱ - (\frac{۵}{۶})^۴ \simeq ۰/۴۹۱۴$$

ب) به طور مشابه، احتمال نیامدن جفت‌شش در هر پرتاب $\frac{۳۵}{۳۶}$ است. بنابراین داریم:

$$p_۲ = ۱ - (\frac{۳۵}{۳۶})^{۲۴} \simeq ۰/۵۱۷۷$$

جالب است بدانیم اگر بخواهیم ۹۵% اطمینان پیدا کنیم که احتمال برنده‌شدن در کدام بیشتر است، حدود ۱۰۰۰ مشاهده نیاز است.

سؤال بعد توسط گالیله حل شده است.

سؤال ۳ *در پرتاب ۳ تاس شانس مجموع ۱۰ بیشتر است یا مجموع ۹؟*

فضای نمونه‌ای را به صورت ۳تایی‌های مرتب در نظر می‌گیریم. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۲۱۶ = ۶^۳$ است. به این ترتیب پیشامدها به صورت زیر خواهند بود.

$$\Omega_{۱۰} = \{(۶,۲,۲),(۲,۶,۲),(۶,۲,۲),...,(۴,۳,۳)\}$$

$$\Omega_۹ = \{(۶,۲,۱),(۱,۲,۶)(۱,۶,۲),...,(۳,۳,۳)\}$$

در نهایت پس از نوشتن همه‌ی برآمدهای پیشامدها داریم:

$$n(\Omega_{۱۰}) = ۲۷$$

$$n(\Omega_۹) = ۲۵$$

[۷] Antoine Gombaud, chevalier de Méré(1607-1684)

با توجه به این که شانس وقوع هر برآمد یکسان است احتمال‌های زیر به دست می‌آیند.

$$P(۱۰) = \frac{۲۷}{۲۱۶}$$

$$P(۹) = \frac{۲۵}{۲۱۶}$$

برای این مسأله اگر بخواهیم ۹۵ درصد اطمینان حاصل کنیم که احتمال کدام بیشتر است حداقل ۷۶۰۰ مشاهده لازم است.

۴ معنای احتمال

وقتی می‌گوییم احتمال وقوع پیشامد A برابر $P(A)$ است منظورمان چیست؟
ممکن است معنایی از احتمال در ذهن داشته باشیم. اما آیا خواهیم توانست با استفاده از آن جملات زیر را توضیح دهیم؟

- احتمال آمدن شیر در پرتاب سکه‌ی سالم $\frac{1}{2}$ است.
- احتمال افزایش قیمت نفت تا ۱۲۰ دلار ۵ درصد است.
- احتمال خودکشی هیتلر ۲۰ درصد است.

ما باید احتمال را به گونه‌ای تعریف کنیم که توقع‌های ما را برآورده کند. مثلا اگر A و B دو پیشامد مجزا باشند می‌خواهیم رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

به صورت مشابه می‌خواهیم تعریف مورد نظر برای روابط دیگری که بدیهی می‌پنداریم درست کار کند.
یکی از روش‌های تعریف احتمال، تکیه بر تعبیر فرکانس نسبی است. در این روش برای محاسبه‌ی احتمال پیشامد A در یک آزمایش، n بار آزمایش را تکرار می‌کنیم. سپس $n(A)$ یا همان تعداد دفعاتی که A اتفاق می‌افتد را می‌شماریم. در نهایت احتمال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

اما این روش از لحاظ ریاضی مشکلاتی دارد که نمی‌تواند پایه‌ی نظریه‌ی احتمال باشد. برخی از مشکلاتی که این روش دارد عبارت‌اند از:

۱. در عمل تکرار یک آزمایش برای بی‌نهایت بار غیرممکن است. در ضمن اگر هم بخواهیم n بزرگی را برای تقریب‌زدن احتمال در نظر بگیریم، هیچ روشی برای محاسبه‌ی خطا نداریم.

۲. وجود و یکتایی حد مورد نظر مشخص نیست.

۳. برای بیان برخی احتمال‌ها که بر پایه‌ی باور شخص استوارند این تعریف بی‌معنا خواهد بود. برای مثال دو جمله از جملاتی که در بالا ذکر شدند از این دسته‌اند.

۴. مقدار حدی $P(A)$، با فرض وجود، به دنباله‌ی آزمایش‌ها بستگی دارد.

البته در انتهای درس با تعریفی که از احتمال ارائه خواهیم داد تحت قضیه‌ای به نام *قانون اعداد بزرگ*[۸] نشان خواهیم داد که تحت شرایط معینی (که آزمایش‌های مستقل باشند)، فرکانس حدی برای ”عملا همه“ی دنباله آزمایش‌های ممکن، موجود است. در جلسه بعد به بیان اصول احتمال کولموگروف خواهیم پرداخت.

[۸] Law of Large Numbers