دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا ۳ دی ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۲۶: زبان‌های بازگشتی، بازگشتی برشمردنی و غیر بازگشتی برشمردنی

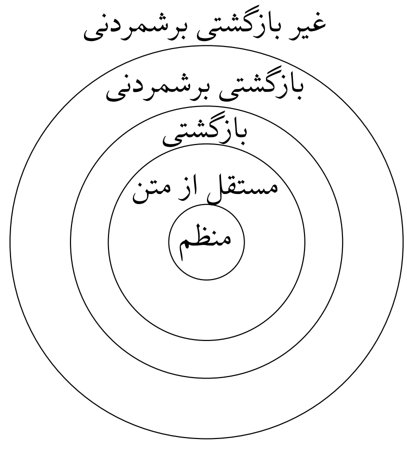
مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارنده: بهار خلیقی‌نژاد*

۱ تعاریف

تعریف ۱ (*زبان بازگشتی برشمردنی*[۱]) *زبان L بازگشتی برشمردنی نامیده می‌شود، اگر ماشین تورینگ M وجود داشته باشد که $L = L(M)$ (یا معادلا $L = H(M)$).*

نکته ۱ *الگوریتم ماشین تورینگی است که مستقل از پذیرش رشته ورودی نهایتا متوقف شود.*

تعریف ۲ (*زبان بازگشتی*[۲]) *زبان L بازگشتی نامیده می شود اگر الگوریتمی برای پذیرفتن آن وجود داشته باشد.*



شکل ۱: رابطه زبان‌ها

تعریف ۳ (*غیر بازگشتی برشمردنی*[۳]) *به زبان‌هایی که توسط هیچ ماشین تورینگی پذیرفته نمی‌شوند غیربازگشتی برشمردنی گفته می‌شود.*

[۱] recursively enumerable
[۲] recursive
[۳] non-recursively enumerable (non-RE)

۲ اثبات وجود زبان غیر بازگشتی برشمردنی

برای اثبات این‌که زبان‌هایی وجود دارد که توسط هیچ ماشین تورینگی قابل پذیرش نیست ابتدا مفهوم شمارش‌پذیری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴ *(شمارش‌پذیری و شمارش‌ناپذیری) مجموعه A شمارش‌پذیر نامیده می‌شود، اگر با یک زیر مجموعه از اعداد طبیعی در تناظر یک به یک باشد و در غیر اینصورت شمارش ناپذیر نامیده می‌شود.*

لم ۱ *اگر مجموعه A شمارش‌پذیر باشد آنگاه A یا با N در تناظر یک به یک است یا با مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, .., k\}$ به ازای یک $k \geq ۰$.*

مثال ۱ *مجموعه‌ی اعداد طبیعی N، مجموعه $N \times N$، مجموعه اعداد گویا Q، مجموعه برنامه‌های جاوا و مجموعه‌ی همه رشته‌ها Σ^* همگی شمارش‌پذیر هستند.*

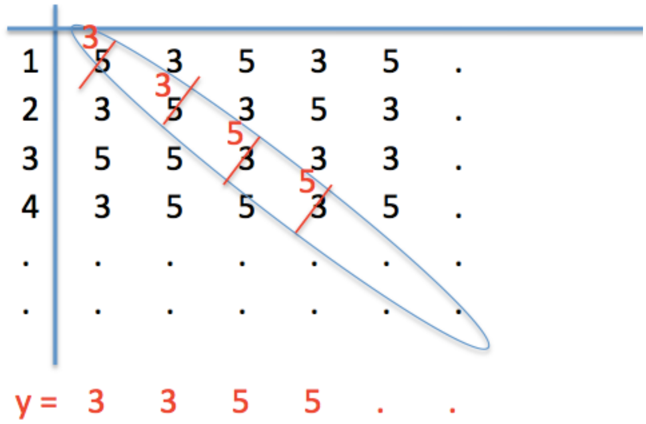
مثال ۲ *مجموعه‌ی اعداد حقیقی R، مجموعه $[۰, ۱]$، مجموعه همه‌ی زبان‌های L مثال‌هایی از مجموعه‌های شمارش‌ناپذیرند.*

اثبات شمارش‌پذیر بودن زبان Σ^*: برای اثبات شمارش‌پذیر بودن یک زبان باید تناظر یک به یکی میان آن زبان و اعداد طیبعی ایجاد کنیم، برای ایجاد این تناظر رشته های حاصل شده را به عنوان یک عدد باینری در نظر می‌گیریم، به ابتدای آن ۱ اضافه می‌کنیم و به دسیمال تبدیل می‌کنیم ، عدد دسیمال حاصل شده را برای شمارش استفاده می‌کنیم.

اثبات شمارش‌ناپذیر بودن: می خواهیم ثابت کنیم مجموعه‌ی R شمارش‌ناپذیر است. از آنجایی که R با مجموعه $[۰, ۱]$ در تناظر یک به یک است، ثابت می کنیم مجموعه $[۰, ۱]$ شمارش ناپذیر است. برای اثبات شمارش‌ناپذیر بودن از تکنیک قطری‌سازی استفاده می‌کنیم.
برای ساده‌سازی، مساله کوچکتری را در نظر می‌گیریم: مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی که بسط اعشاری همه‌ی آن‌ها فقط شامل ۳ و ۵ است.
ادعا می کنیم این مجموعه شمارش‌ناپذیر است. بنابر برهان خلف فرض می‌کنیم که این مجموعه شمارش‌پذیر است پس یک تناظر یک به یک بین این مجموعه و مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد. این تناظر را به هر شیوه‌ی دلخواه برقرار می‌سازیم، سپس عدد yرا به شیوه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

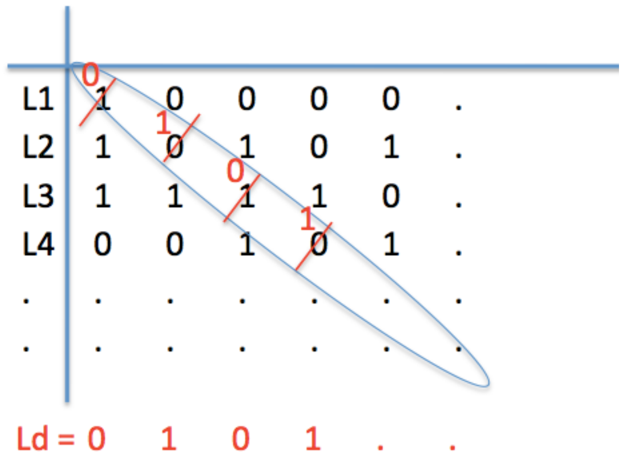
$$\text{the } i\text{th digit of } y = \begin{cases} 3 & \text{if} \quad \text{the } i\text{th digit of } x_i \text{ is } 5 \\ 5 & \text{if} \quad \text{the } i\text{th digit of } x_i \text{ is } 3 \end{cases}$$

مشخص است که برای y هیچ شماره‌ای نمی‌توانیم در نظر بگیریم زیرا همواره یک حرف از y با یک حرف از عددی که باید در آن شماره قرار بگیرد در تناقض است.



مجموعه ماشین‌های تورینگ شمارش پذیر است: برای شمارش ماشین‌های تورینگ باید برای هر ماشین تورینگ یک کد در نظر بگیریم. این کد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: هر ماشین تورینگ از تعدادی توابع انتقال تعریف شده است، در ابتدا حالت شروع را $q_۱$ و حالت خاتمه را $q_۲$ می‌نامیم و دیگر حالت ها را به ترتیب نام گذاری می کنیم)لازم بذکر است که هر ماشین تورینگ یک ماشین تورینگ معادل دارد که فقط یک حالت نهایی دارد(. برای تابع انتقال $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ کد $۰^i۱۰^j۱۰^k۱۰^l۱۰^m$ را در نظر می گیریم و بین هر دو کد تابع انتقال دو عدد ۱ می گذاریم. با توجه به کد بدست آمده می‌توانیم تمام ماشین‌های تورینگ را بشماریم. به این صورت که یک عدد ۱ به ابتدای کد بدست آمده اضافه می‌کنیم و سپس عدد باینری حاصل را تبدیل به دسیمال می‌کنیم، عدد بدست آمده شماره‌ي ماشین تورینگ است. پس نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی تمام ماشین‌های تورینگ شمارش پذیر است.

مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌ها شمارش ناپذیر است: طبق روش قطبی‌سازی عمل می‌کنیم و زبان L_d را مطابق شکل زیر تشکیل می‌دهیم ، همان‌گونه که قبلا گفته شد برای رشته‌ی بدست آمده هیچ شماره‌ای وجود ندارد، پس مجموعه‌ی همه‌ی زبان‌ها شمارش‌پذیر نیست.



از آنجایی که مجموعه‌ی تمام ماشین‌های تورینگ شمارش‌پذیر است ولی مجموعه تمامی زبان‌ها شمارش پذیر نیست، نتیجه می‌گیریم زبانی وجود دارد که هیچ ماشین تورینگی آن را نمی‌پذیرد.

۳ زبان قطری

می‌خواهیم زبانی بسازیم که هیچ ماشین تورینگی برای پذیرش آن وجود نداشته باشد. زبان قطری[۴] را که با L_d نشان داده می‌شود به اینصورت تعریف می‌کنیم که مجموعه‌ی کدهای تمام ماشین‌های تورینگ است که رشته‌ی کد خود را نمی‌پذیرند. یعنی:

$$L_d = \{w | w = w_i \wedge w_i \notin L(w_i)\}$$

قضیه ۲ *زبان L_d بازگشتی برشمرنی نیست.*

برهان. طبق برهان خلف فرض می کنیم برای این زبان یک ماشین تورینگ وجود دارد. آیا این ماشین تورینگ کد خود را می پذیرد، با دو حالت مواجه می شویم:
۱.بله، از آنجایی که این ماشین تورینگ کد خود را می پذیرد نباید جزء زبان L_d باشد پس نباید کد خود را بپذیرد. پس به تناقض می‌رسیم.
۲.خیر، پس باید جزء زبان L_d باشد، پس باید خود را بپذیرد. در این حالت نیز به تناقض رسیدیم.
نتیجه می گیریم زبان L_d بازگشتی برشمردنی نیست.

■

۴ مساله

مساله(غیر رسمی) یک پرسش بله یا خیر در مورد مجموعه‌ای از مسائل نمونه است. به عنوان مثال:آیا گراف G دور همیلتونی دارد؟

تعریف رسمی مساله: یک مساله یک زبان است و در صورتی یک مساله تصمیم پذیر است که برای تمام نمونه مساله‌ها یک الگوریتم وجود داشته باشد. الگوریتم‌ها همان زبان‌های بازگشتی و مساله‌ها زبان‌های بازگشتی برشمردنی هستند.

۵ ماشین تورینگ جهانی

ماشین تورینگ جهانی [۵] ماشینی است که هر رشته‌ای به همراه کد یک ماشین تورنگ به آن بدهیم به ما می‌گوید که آیا آن ماشین تورینگ رشته را می‌پذیرد یا نه. می‌توان نشان داد که زبان L_u که یک ماشین تورینگ جهانی می‌پذیرد بازگشتی نیست ولی بازگشتی برشمردنی است. برای دقیق‌تر کردن مفهوم زبان L_u را بصورت زیر تعریف می‌کنیم، رشته و کد ماشین تورینگ را با استفاده از ۱۱۱ مجزا می‌کنیم:

$$L_u = \{(M, w) | w \in L(M)\}$$

در جلسه‌ی آتی اثبات می‌کنیم که این زبان بازگشتی نیست.

[۴] diagonalization language
[۵] universal language