دانشکده‌ی علوم ریاضی

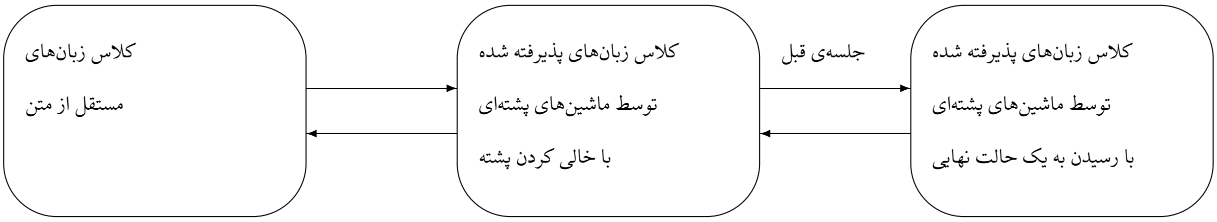
نظریه زبان‌ها و اتوماتا ۱۲ آذر ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۲۱: رابطه بین زبان ماشین‌های پشته‌ای و زبان‌های مستقل از متن

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارندگان: مهسا افتخاری‌حصاری، حسین ابوطالبی*

۱ مقدمه

در جلسه قبل دو نوع ماشین پشته‌ای تعریف شد. برای اثبات معادل بودن زبان هر دونوع ماشین‌های پشته‌ای (با خالی کردن پشته و با رسیدن به حالت نهایی) و زبان گرامرهای مستقل از متن، روند نشان داده شده در نمودار را در پیش می‌گیریم که یکی از بخش‌های آن در جلسه قبل ثابت شد.



۲ رابطه بین انواع ماشین‌های پشته‌ای

در جلسه قبل قضیه زیر را ثابت کردیم که نشان می‌دهد برای هر ماشین پشته‌ای، با خالی کردن پشته، می‌توان یک ماشین پشته‌ای معادل، با رسیدن به یک حالت نهایی، ساخت که همان زبان را می‌پذیرد.

قضیه ۱ *اگر P_N، یک ماشین پشته‌ای باشد، آنگاه یک ماشین پشته‌ای P_F وجود دارد که $N(P_N) = L(P_F)$.*

حال قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۲ *اگر P_F یک ماشین پشته‌ای باشد، آن‌گاه یک ماشین پشته‌ای P_N وجود دارد که $L(P_F) = N(P_N)$.*

برهان. فرض کنید $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_\circ, Z_\circ, F)$. ماشین پشته‌ای $P_N = (Q_N, \Sigma, \Gamma_N, \delta_N, p_\circ, X_\circ, F)$ را می‌سازیم که:

$$Q_N = Q \cup \{p_N, p_\circ\} \quad p_N, p_\circ \notin Q \,,$$

$$\Gamma_N = \Gamma \cup \{X_\circ\} \quad X_\circ \notin \Gamma \,,$$

و δ_N شامل همه ی قوانین δ_F است، به‌علاوه‌ی قوانین مشخص شده روی شکل زیر. ادّعا می کنیم که $N(P_N) = L(P_F)$ یا معادلاً :

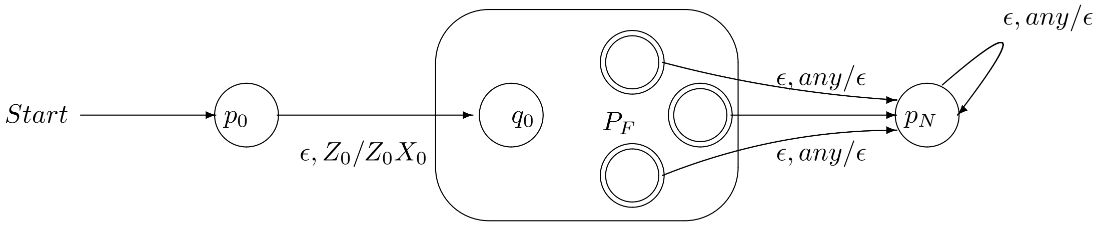
$$\forall \omega : \left[\exists q : (p_\circ, \omega, X_\circ) \overset{*}{\underset{P_f}{\vdash}} (q, \epsilon, \epsilon)\right] \iff \left[\exists q \in F \quad \alpha \in \Gamma^* \quad (q_\circ, \omega, Z_\circ) \overset{*}{\underset{P_f}{\vdash}} (q, \epsilon, \alpha)\right]$$

و می‌خواهیم نشان دهیم $N(P_N) = L(P_F)$، یعنی:

$$w \in N(P_N) \Leftrightarrow w \in L(P_F)$$

کافی است داشته باشیم:

$$\forall w[(p_\circ, w, X_\circ) \overset{*}{\underset{P_N}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon)] \Leftrightarrow \exists q \in F, \exists \alpha \in \Gamma^*[(q_\circ, w, Z_\circ) \overset{*}{\underset{P_F}{\vdash}} (q, \varepsilon, \alpha)]$$



ادامه اثبات را بر عهده دانشجو می‌گذاریم. ■

تا این‌جا نشان داده شد کلاس زبان‌های پذیرفته شده توسط ماشین‌های پشته‌ای، با خالی کردن پشته، معادل با کلاس زبان‌های پذیرفته شده توسط ماشین‌های پشته‌ای، با رسیدن به یک حالت نهایی است.

۳ رابطه بین گرامر مستقل از متن و ماشین‌های پشته‌ای

اگر $\alpha \in (V \cup T)^*$ یک اشتقاق مکرر از متغیر شروع باشد، α را یک فرم جمله‌ای گوییم.

تعریف ۱ *فرض کنید $G = (V, T, P, S)$ یک گرامر مستقل از متن باشد، هر $\alpha \in (V \cup T)^*$ که $S \overset{*}{\to} \alpha$ را یک فرم جمله‌ای می‌گوییم. (می‌توان فرم جمله‌ای چپ و راست را به‌طور مشابه تعریف کرد.)*

تعریف ۲ *هر فرم جمله‌ای چپ که رشته‌ای از ترمینال‌ها نباشد، به صورت زیر است:*

$$xA\alpha$$

$$\alpha \in (V \cup T)^*, A \in V, x \in T^*$$

مثال ۱ *گرامر مستقل از متن زیر را که در آن S متغیر شروع است، در نظر بگیرید.*

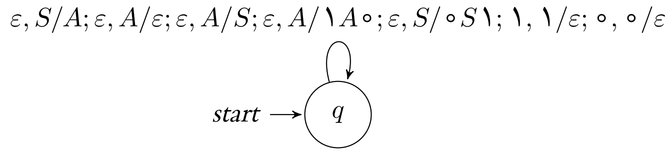
$$S \to ۰S۱|A$$

$$A \to ۱A۰|S|\varepsilon$$

با نوشتن تمام مراحل میانی (به صورت فرم جمله‌ای)، نشان دهید رشته $w =$ ۱۰۱۰ در زبان گرامر فوق پذیرفتنی است.

$$S \to A \to ۱A۰ \to ۱۰S۱۰ \to ۱۰A۱۰ \to ۱۰\varepsilon۱۰ \to ۱۰۱۰$$

مثال ۲ *برای گرامر مستقل از متن مثال قبل، یک ماشین پشته‌ای طراحی کنید و توصیف‌های آنی میانی برای پذیرش رشته $w =$ ۱۰۱۰ را بنویسید.*
ماشین پشته‌ای $P = (q, T, V \cup T, \delta, q, S)$ را طوری طراحی می‌کنیم که در حین پیمایش رشته $w = xy$ (که $xA\alpha$ یک فرم جمله‌ای چپ است) وقتی فرم جمله‌ای $xA\alpha$ را شبیه سازی می‌کند، رشته x را از ورودی خوانده و محتویات پشته $A\alpha$ است.



توصیف‌های آنی برای پذیرفته شدن رشته‌ی w در زیر نشان داده شده است:

$$(q, ۱۰۱۰, S) \vdash (q, ۱۰۱۰, A) \vdash (q, ۱۰۱۰, ۱A۰) \vdash (q, ۰۱۰, A۰) \vdash (q, ۰۱۰, S۰) \vdash (q, ۰۱۰, ۰S۱۰) \vdash$$
$$(q, ۱۰, S۱۰) \vdash (q, ۱۰, A۱۰) \vdash (q, ۱۰, ۱۰) \vdash (q, ۰, ۰) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

قضیه ۳ *فرض کنید $G = (V, T, R, S)$ یک گرامر مستقل از متن باشد، آن‌گاه یک ماشین پشته‌ای P وجود دارد که $N(P) = L(G)$.*

ماشین پشته‌ای $P = (q, T, V \cup T, \delta, q, S)$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\forall A \in V : \delta(q, \varepsilon, A) = (q, B) : A \to B \in R$$
$$\forall a \in T : \delta(q, a, a) = (q, \varepsilon)$$

لم ۴ *برای ماشینی که ساختیم داریم :*

$$L(G) = N(P)$$

یا معادلاً :

$$\left[(q, \omega, S) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon)\right] \iff \left[S \overset{*}{\Rightarrow} \omega\right]$$

برهان. برای اثبات گزاره ی فوق ، گزاره ی کلّی تر زیر را ثابت می کنیم :

$$\Rightarrow I) \quad \forall A \in V : \left[(q, \omega, A) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon)\right] \Rightarrow \left[A \overset{*}{\Rightarrow} \omega\right] \overset{\Rightarrow}{\leadsto} \quad \overset{*}{\vdash} \text{استقرا روی طول}$$

حکم کلّی تر برای $\Leftarrow$

$$\Leftarrow II) \left[\underset{\omega = x_i y_i \quad \wedge \quad \gamma_i = x_i y_i}{S = \gamma_۱ \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_۲ \underset{lm}{\Rightarrow} \cdots \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_i}\right] \Rightarrow \left[(q, \omega, S) \overset{*}{\vdash} (q, y_i, x_i)\right]$$

■