دانشکده‌ی علوم ریاضی

| | |
|---|---|
| **نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا** | ۳۰ آبان ۱۳۹۱ |

# جلسه‌ی ۲۰: زبان ماشین پشته‌ای

*مدرّس: دکتر شهرام خزائی* *نگارنده: امیربهشاد شهراسبی*

## ۱ توصیف آنی

**تعریف ۱** *توصیف آنی* [۱] *یک سه‌تایی منظّم به فرم $(q, \omega, \alpha)$ است که در آن:*

۱. $q$ *یک حالت باشد؛*
۲. $\omega$ *باقیمانده‌ی رشته‌ی ورودی باشد؛*
۳. $\alpha$ *محتویات پشته باشد؛*

*را یک توصیف آنی از ماشین پشته‌ای می‌نامیم.*

دقّت کنید در نگارش فوق سمت چپ ترین نماد $\alpha$، بالاترین عضو پشته است. ضمنا برای نمایش حروف الفبا معمولا از $a$، $b$ و ...، برای نمایش حرف‌های پشته از $X$، $Y$ و ... و برای نمایش محتویات پشته از $\alpha$، $\beta$، $\gamma$ و ... استفاده می‌شود.

**تعریف ۲** *فرض کنید* $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ *یک ماشین پشته‌ای باشد. برای هر* $\omega \in \Sigma^*$ *و* $\beta \in \Gamma^*$، *می‌گوییم توصیف آنی* $(q, a\omega, X\beta)$ (که $X \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$) *به توصیف آنی* $(p, \omega, \alpha\beta)$ *می‌رود و می‌نویسیم* $(q, a\omega, X\beta) \vdash (p, \omega, \alpha\beta)$، *اگر:*

$$(p, \alpha) \in \delta(q, a, X)$$

در ادامه به تعریف دقیق رابطه‌ای که با استفاده مکرر از عملگر فوق بین توصیفات آنی حاصل می‌شود، می‌پردازیم:

[۱] Instantaneous Description

**تعریف ۳** *می‌گوییم توصیف آنی $I$ طی چند حرکت به توصیف آنی $J$ می‌رود و با $I \overset{*}{\vdash} J$ نشان می‌دهیم، اگر $I$ و $J$ در تعریف استقرایی زیر بگنجند:*
*پایه.*

$$I \overset{*}{\vdash} I$$

*گام.*

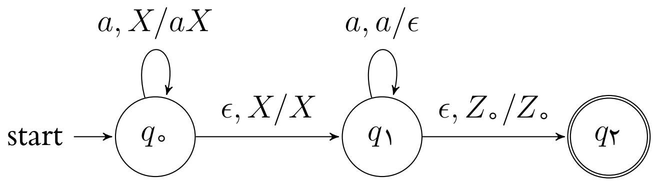
$$I \overset{*}{\vdash} K \wedge K \vdash J \Rightarrow I \overset{*}{\vdash} J$$

**مثال** در جلسه‌ی گذشته برای زبان $L = \{\omega\omega^R | \omega \in \{0, 1\}^*\}$ ماشین پشته‌ای زیر ارائه شد:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$$

$q_0$ : حدس ما این است که در حال خواندن $\omega$ هستیم.
$q_1$ : حدس ما این است که $\omega$ خوانده شده است.
$q_2$ : حالت پایانی که رشته پذیرفته می‌شود.

$$\delta(q_0, a, X) = \{(q_0, aX\}$$
$$\delta(q_0, \epsilon, X) = \{(q_1, X)\}$$
$$\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \epsilon\}$$
$$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0\}$$




توصیفات آنی و انتقال‌های ممکن با رشته‌ی ۱۱۱۱ برای این ماشین پشته‌ای، در شکل صفحه‌ی بعد نمایش داده شده است؛

$$
\begin{tikzcd}
(q_0, 1111, Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
(q_0, 111, 1Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 1111, Z_0) \arrow[r] & (q_2, 1111, Z_0) \\
(q_0, 11, 11Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 111, 1Z_0) \arrow[r] & (q_1, 11, Z_0) \arrow[d] \\
(q_0, 1, 111Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 11, 11Z_0) \arrow[dr] & (q_2, 11, Z_0) \\
(q_0, \epsilon, 1111Z_0) \arrow[d] & (q_1, 1, 111Z_0) \arrow[d] & (q_1, 1, 1Z_0) \arrow[d] \\
(q_1, \epsilon, 1111Z_0) & (q_1, \epsilon, 11Z_0) & (q_1, \epsilon, Z_0) \arrow[d] \\
 & & (q_2, \epsilon, Z_0)
\end{tikzcd}
$$

## ۲ ویژگی‌های توصیف آنی

**قضیه ۱** *به ازای هر $\omega \in \Sigma^*$ و $\gamma \in \Gamma^*$ داریم:*
*اگر*

$$(q, x, \alpha) \overset{*}{\vdash} (p, y, \beta)$$

*آنگاه*

$$(q, x\omega, \alpha\gamma) \overset{*}{\vdash} (p, y\omega, \beta\gamma)$$

صحت قضیه‌ی فوق به شکل شهودی نیز قابل تأیید است. اگر با پردازش رشته‌ی $x$ از حالت $q$، در حالی که محتویات پشته برابر $\alpha$ است، به حالت $p$ برسیم، در حالی که رشته‌ی $y$ باقی مانده و محتویات پشته برابر $\beta$ است، با افزودن $\omega$ به انتهای رشته و $\gamma$ به پایین پشته، این دو پس از طی همان مسیر دست‌نخورده باقی خواهند ماند و به توصیف آنی $(p, y\omega, \beta\gamma)$ می‌رسیم.

**گزاره ۱** *عکس قضیه‌ی ۱ برقرار نیست.*

**قضیه ۲** *اگر $\gamma = \epsilon$ عکس قضیه‌ی ۱ برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر*

$$(q, x\omega, \alpha) \overset{*}{\vdash} (p, y\omega, \beta)$$

*آنگاه*

$$(q, x, \alpha) \overset{*}{\vdash} (p, y, \beta)$$

## ۳ دو تعریف از زبان ماشین پشته‌ای

زبانی که یک ماشین پشته‌ای می‌پذیرد را می‌توان به دو طریق تعریف کرد:

- زبانی که ماشین با رفتن به یک حالت نهایی می‌پذیرد.
- زبانی که ماشین با خالی کردن پشته می‌پذیرد.

در ادامه دو رویکرد فوق را به شکل دقیق تعریف می‌کنیم:

**تعریف ۴** *فرض کنید $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_\circ, z_\circ, F)$ یک ماشین پشته‌ای باشد. زبانی که $P$ با رفتن به یک حالت نهایی می‌پذیرد را با $L(P)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:*

$$L(P) = \{\omega | (q_\circ, \omega, z_\circ) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \alpha) : q \in F, \alpha \in \Gamma^*\}$$

**تعریف ۵** *فرض کنید $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_\circ, z_\circ, F)$ یک ماشین پشته‌ای باشد. زبانی که $P$ با خالی کردن پشته می‌پذیرد را با $N(P)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:*

$$N(P) = \{\omega | (q_\circ, \omega, z_\circ) \overset{*}{\vdash} (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

## ۴ معادل بودن مجموعه زبان‌های توصیف شده به دو روش مذکور

در این قسمت ثابت می‌کنیم مجموعه زبان‌های قابل توصیف توسط ماشین‌های پشته‌ای به دو روش مذکور یکسان است؛

**قضیه ۳** *اگر $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_\circ, z_\circ, F)$ یک ماشین پشته‌ای باشد، آنگاه ماشین پشته‌ای $P_F$ وجود دارد که $N(P_N) = L(P_F)$.*

**برهان.** برای اثبات این قضیه، $P_F$ را از روی $P_N$ می‌سازیم. ابتدا تعریف می‌کنیم:

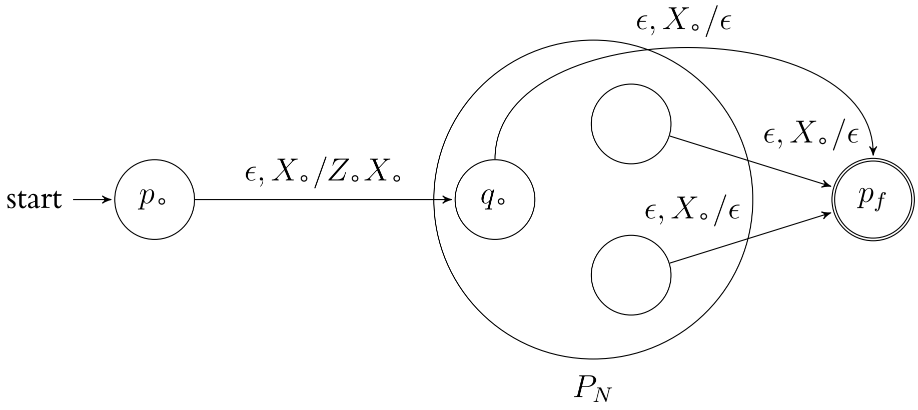
$$Q_F = Q \cup \{p_f, p_\circ\}$$
$$\Gamma_F = \Gamma \cup \{X_\circ\}$$
$$F_F = \{p_f\}$$

که $p_f, p_\circ \notin Q$ و $X_\circ \notin \Gamma$؛
اکنون $P_F$ را به شکل زیر می‌سازیم:

$$P_F = (Q_F, \Sigma, \Gamma_F, \delta_F, p_\circ, X_\circ, F_F)$$

که برای $\delta_f$ مجموعه روابط زیر به $\delta$ اضافه می‌شود:

$$\delta_F(p_\circ, \epsilon, X_\circ) = \{(q_\circ, Z_\circ X_\circ)\}$$
$$\forall q \in Q : \delta_F(q, \epsilon, X_\circ) = \{(p_f, \epsilon)\}$$




به استقرا ثابت می‌شود که $L(P_F) = N(P_N)$، یا به عبارتی:

$$[(q_\circ, \omega, z_\circ) \underset{P_N}{\overset{*}{\vdash}} (q, \epsilon, \epsilon)] \Longleftrightarrow [(p_\circ, \omega, X_\circ) \underset{P_F}{\overset{*}{\vdash}} (p_f, \epsilon, X_\circ)]$$

■

اثبات عکس قضیه ؟؟ به جلسه بعد موکول می‌شود.