دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا	۱۶ مهر ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۷: عبارت‌های منظم

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارندگان: مهدی جعفرنیای جهرمی و شراره شهرابی*

۱ تعریف عبارت‌های منظم

تا کنون ثابت کردیم که DFAها، NFAها و ϵ-NFA ها معادلند، حال می‌خواهیم عبارت‌های منظم[1] را تعریف کنیم و معادل بودن این عبارت‌ها را نیز با DFAها ثابت کنیم.

به عبارت‌هایی مثل $E = (1+0)^*(11^*+\epsilon)(0+\emptyset)$ عبارت منظم می‌گویند. می‌خواهیم زبان این‌گونه عبارات را تعریف کنیم. ابتدا چند مفهوم را تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن‌ها زبان عبارت‌های منظم را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱ *اگر L و M دو زبان باشند، اجتماع[2] و الحاق[3] دو زبان به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$\begin{aligned} L \cup M &= \{\omega \mid \omega \in L \vee \omega \in M\}\ , \\ LM &= \{\omega_1\omega_2 \mid \omega_1 \in L \wedge \omega_2 \in M\}\ , \end{aligned}$$

مثال ۱ *اگر*

$$\begin{aligned} L &= \{01, 111, 10\}\ , \\ M &= \{00, 01\}\ , \end{aligned}$$

الحاق و اجتماع آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} LM &= \{0100, 0101, 11100, 11101, 1000, 1001\} \\ ML &= \{0001, 00111, 0010, 0101, 01111, 0110\} \\ L \cup M &= \{00, 01, 111, 10\} \end{aligned}$$

مثال ۲ *داریم:*

$$\begin{gathered} L\emptyset = \emptyset \\ L\{\epsilon\} = L \\ 10 = 10 \end{gathered}$$

نکته ۱ *دقت کنید که در حالت کلی $LM \neq ML$.*

تعریف ۲ *اگر L یک زبان باشد، توان‌های آن به صورت زیر تعریف می شود.*

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\} \\ L^1 &= L \\ L^2 &= LL \\ L^{k+1} &= L^kL \end{aligned}$$

[1] Regular Expressions
[2] Union
[3] Concatenation

تعریف ۳ *اگر L یک زبان باشد، ستاره کلینی[۴] آن به صورت زیر تعریف می‌شود.*

$$L^* = \{\epsilon\} \cup L \cup L^{۲} \cup L^{۳} \cup \ldots$$

مثال ۳ *اگر $L = \{۰, ۱۰\}$ آن‌گاه داریم:*

$$L^* = \{۰, ۱۰\}^* = \{\epsilon, ۰, ۱۰, ۰۰, ۰۱۰, ۱۰۰, ۰۰۰, \ldots\}$$

نکته ۲ *برای زبان $\emptyset$ داریم:*

$$\begin{array}{lcl} \emptyset^{۰} & = & \{\epsilon\}\ , \\ \emptyset^{k} & = & \emptyset\ ,\ k \geq ۱ \end{array}$$

حال به تعریف عبارت‌های منظم بر می‌گردیم.

تعریف ۴ *عبارت منظم را به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم.*

پایه:

$$\begin{array}{lcl} L(\boldsymbol{\epsilon}) & = & \{\epsilon\} \\ L(\boldsymbol{a}) & = & \{a\}\ ,\ \forall\, a \in \Sigma \\ L(\boldsymbol{\emptyset}) & = & \emptyset \end{array}$$

استقرا:

- *اگر E یک عبارت منظم باشد، (E) هم یک عبارت منظم است و $L\left((E)\right) = L\left(E\right)$*
- *اگر E و F عبارت‌های منظم باشند، $E + F$ نیز یک عبارت منظم است و $L\left(E+F\right) = L\left(E\right) \cup L\left(F\right)$*

  مثال ۴ $L(\boldsymbol{۰} + \boldsymbol{۱} + \boldsymbol{\epsilon}) = \{۰, ۱, \epsilon\}$

- *اگر E و F عبارت‌های منظم باشند، EF نیز عبارت منظم است و $L(EF) = L(E)L(F)$*

  مثال ۵ $L(\boldsymbol{۰}\boldsymbol{۱}) = L(\boldsymbol{۰})L(\boldsymbol{۱}) = \{۰۱\}$

- *اگر E یک عبارت منظم باشد، E^* نیز یک عبارت منظم است و $L(E^*) = (L(E))^*$*

  مثال ۶ $L(\boldsymbol{۱}^*) = \{\epsilon, ۱, ۱۱, ۱۱۱, \ldots\}$

  اولویت بندی عملگرها به صورت زیر است:

  ۱ - پرانتز
  ۲ - ستاره
  ۳ - الحاق
  ۴ - جمع

[۴] Kleene Star

۲ تبدیل یک عبارت منظم به ϵ-NFA

در این بخش روشی را معرفی می‌کنیم که برای هر عبارت منظم ϵ-NFA ای را معادل آن بکشیم؛ بدین معنا که زبان پذیرفته شده توسط عبارت منظم و ϵ-NFA یکی باشد. در جلسه‌ی آینده ثابت می که معادل هر DFA می‌توان یک عبارت منظم تعریف کرد و بدین ترتیب ثابت کرده ایم که زبانی که عبارت‌های منظم تعریف می‌کنند چیزی جز همان زبان‌های منظم نیست.

قضیه ۱ *اگر E یک عبارت منظم باشد، آن‌گاه یک ϵ-NFA به نام A وجود دارد که $L(A) = L(E)$.*

برهان.

برای اثبات این موضوع که معادل هر عبارت منظم یک ϵ-NFA وجود دارد، با توجه به این‌که خود عبارت‌های منظم را به صورت استقرایی تعریف کردیم، از استقرای ساختاری استفاده می‌کنیم.

به طور دقیق‌تر اثبات به استقرا روی طول رشته ی E (که رشته ای روی الفبای $\{0, 1, \epsilon, \emptyset, (,)\}^*$ است) صورت می‌گیرد. بنابراین، با استقرا روی طول رشته ی E نشان می‌دهیم که برای هر عبارت منظم E یک ϵ-NFA با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

- *فقط دارای یک حالت پایانی است.*
- *از هیچ حالتی یالی به حالت شروع وارد نمی‌شود.*
- *از حالت نهایی هیچ یالی خارج نمی‌شود.*

***پایه:** طول رشته E یک باشد؛*

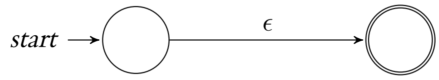
همان طور که در تصویر مشاهده می‌کنید به ازای هر زبان منظم تک‌حرفی،یک ϵ-NFA با ویژگی‌های مذکور وجود دارد:

۱ - $E = \emptyset$

دو حالت داریم که از حالت آغازین با هیچ حرفی نمی‌توان به حالت پایانی رفت.

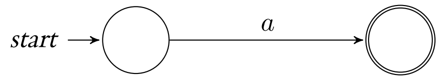
۲ - $E = \epsilon$

دو حالت داریم که از حالت آغازین بدون خواندن هیچ حرفی (با ϵ) می‌توان به حالت پایانی رفت.



۳ - $E = \boldsymbol{a}, \forall\, a \in \Sigma$

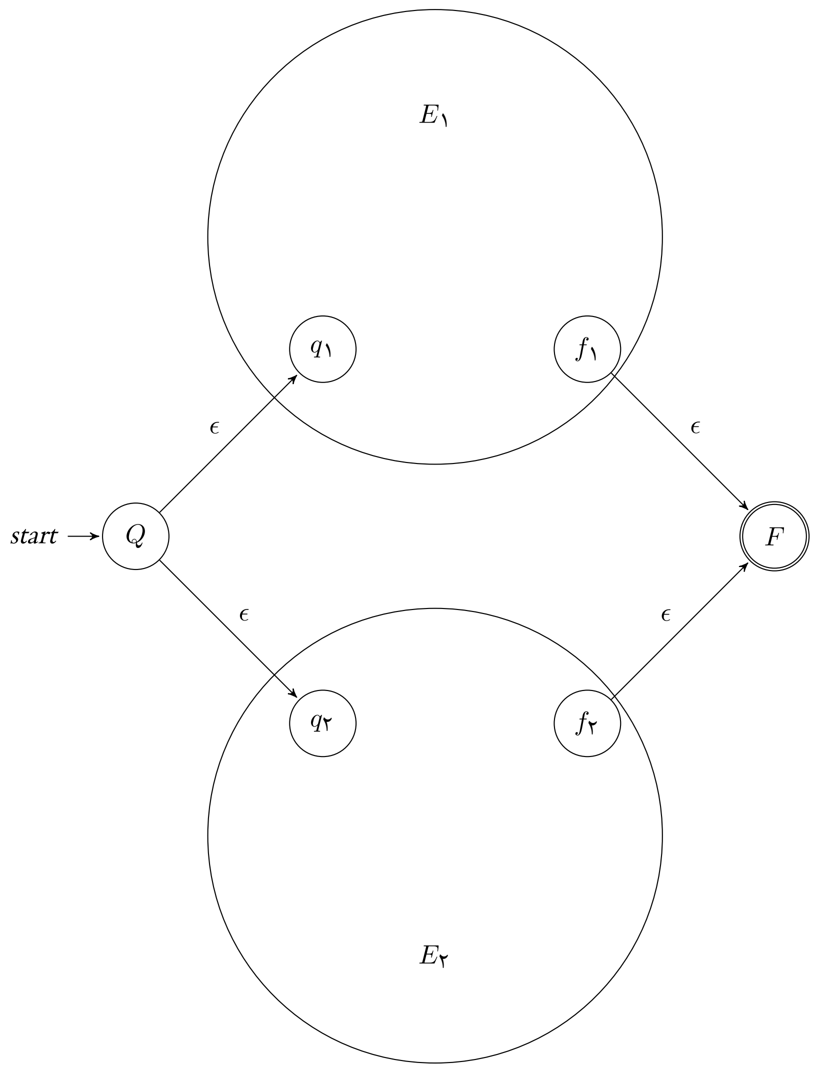
دو حالت داریم که از حالت آغازین با خواندن یک حرف a می‌توان به حالت پایانی رفت.



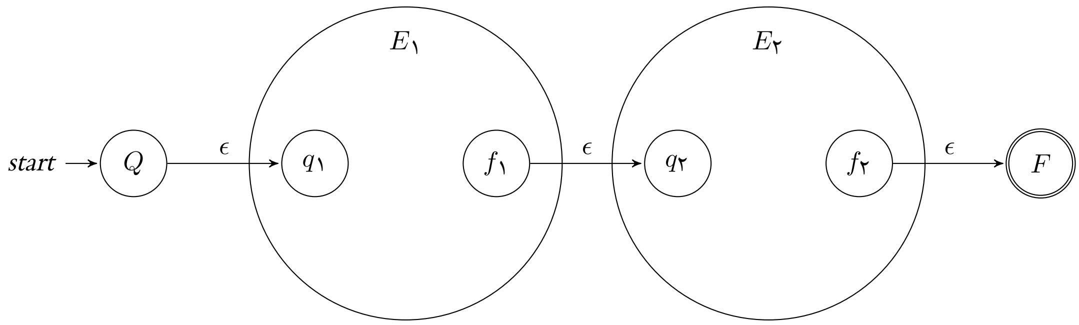
***استقرا:** فرض کنید که برای همه‌ی عبارت‌های منظم با طول کمتر یا مساوی n یک ϵ-NFA با ویژگی‌های ذکر شده وجود داشته باشد. نشان می‌دهیم برای هر عبارت منظم E به طول $n+1$ نیز یک ϵ-NFA با ویژگی‌های مذکور موجود است:*

۱ - اجتماع (جمع): $E = E_1 + E_2$

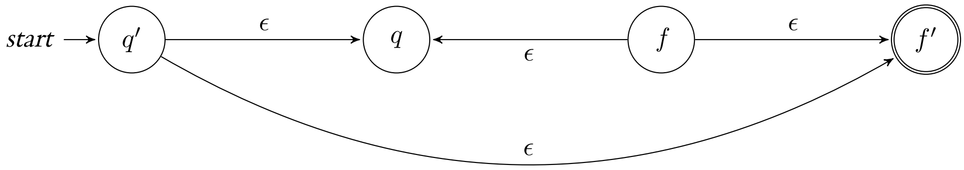
کافیست NFA های مربوط به دو قسمتی که با هم جمع شده‌اند را بکشیم. حال به دو حالت جدید نیاز داریم. یکی از حالت‌ها، حالت آغازین (Q) است و از آن به حالات آغازین دو NFA ی که داریم خروجی ϵ می‌رود. حالت بعدی حالت پذیرش جدید خواهد بود (F) و از حالت‌های پذیرش آن دو NFA یک خروجی ϵ به این حالت می‌کشیم.



۲ - الحاق: $E = E_1 E_2$
برای تولید ϵ-NFA متشکل از الحاق دو NFA ، بار دیگر نیاز به دو حالت جدید داریم. یکی از حالت‌ها، حالت آغازین خواهد بود (Q) . از این حالت توسط یک خروجی ϵ به حالت آغازین یکی از NFA ها می‌رویم. از حالت پذیرش این NFA به حالت آغازین NFA بعدی یک خروجی ϵ می‌کشیم. و در نهایت از حالت پذیرش NFA دوم به حالت دیگری که اضافه کرده بودیم (F) یک خروجی ϵ خواهیم داشت و این حالت جدید حالت پذیرش ϵ-NFA مطلوب ما خواهد بود.



۳ - ستاره کلینی: $E = E_۱^*$
ابتدا از تنها حالت پذیرش NFA زبان $E_۱$ یک خروجی ϵ به حالت آغازین آن رسم می‌کنیم. این بار نیز دو حالت جدید را به NFA اضافه می‌کنیم. از یکی از حالت‌ها یک خروجی ϵ به q می‌کشیم و این حالت جدید، حالت آغازین ما خواهد شد. از حالت پذیرش NFA یک خروجی ϵ به حالت اضافی دیگر که حالت پذیرش جدید ما خواهد بود، می‌بریم. از حالت آغازین جدید یک خروجی ϵ به حالت پذیرش جدید می‌بریم.



۴ - $E = (E_۱)$ که بدیهی است.

■

مثال ۷ شکل زیر یک ϵ-NFA معادل با عبارت منظم $E = ۰۱^* + ۱$ است.