دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا — ۱۴ مهر ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۶: ϵ–NFA

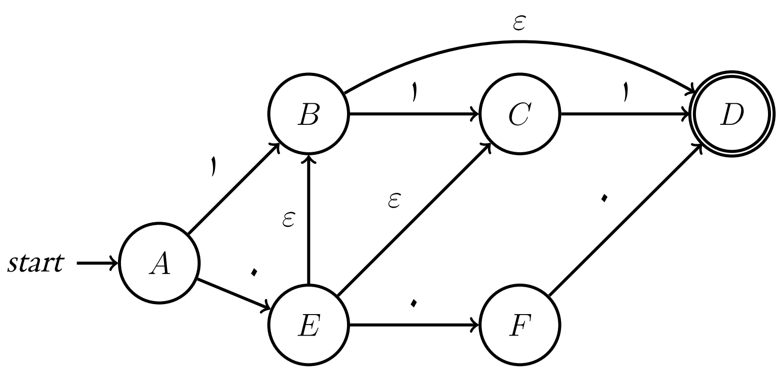
مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *نگارندگان: سجاد گودرزی و امید بهارلو*

۱ اتوماتای غیر قطعی با تکان رشته تهی

اتوماتای جدیدی را با نام اتوماتای غیر قطعی با تکان رشته تهی [1] ϵ–NFA، معرفی می‌کنیم که همان NFAاست؛ با این تفاوت که در آن می‌توان بدون خواندن حرفی از الفبا از حالتی به حالت دیگر رفت.

تعریف ۱ *ϵ–NFA یک پنج تایی منظم است به صورت $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ، که در آن:*
Q : مجموعه متناهی از حالت‌ها می‌باشد؛
Σ : الفبا رشته‌ها می‌باشد؛
δ : تابع انتقال حالت است که مجموعه حالت های قابل دسترسی از یک حالت را با پردازش یک حرف از الفبا یا پردازش رشته تهی بدست می‌دهد. یعنی $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \longrightarrow 2^Q$.
q_0 : حالت شروع است و
F : مجموعه حالت‌های نهایی که زیر مجموعه‌ایی از Q است.

مثال ۱ *گراف زیر مربوط به یک ϵ–NFA است*



شکل زیر هم جدول انتقال آن را نشان می‌دهد

[1] nondeterministic finite automaton with ε transition

	۰	۱	ϵ
$\rightarrow A$	$\{E\}$	$\{B\}$	ϕ
B	ϕ	$\{C\}$	$\{D\}$
C	ϕ	$\{D\}$	ϕ
$*D$	ϕ	ϕ	ϕ
E	$\{F\}$	ϕ	$\{B, C\}$
F	$\{D\}$	ϕ	ϕ

برای تعریف تابع انتقال حالت تعمیم یافته برای ϵ–NFA، ابتدا نیاز داریم که مفهومی به نام بستار ε را معرفی نماییم.

۱.۱ تابع بستار ε

بستار ε [۲] یک حالت p را—که با $\mathrm{Eclose}(p)$ نشان می‌دهند— مجموعه حالت‌هایی است که بدون خواندن یک حرف از رشته می‌توان به آنها رفت.

تعریف ۲ *برای یک ϵ–NFA با مجموعه حالات Q و تابع انتقال حالت δ، تابع $\mathrm{Eclose} : Q \rightarrow ۲^Q$ به صورت استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود*
پایه: برای هر حالت $q \in Q$:

$$q \in \mathrm{Eclose}(q)$$

استقراء:

$$p \in \mathrm{Eclose}(q) \wedge r \in \delta(p, \varepsilon) \Longrightarrow r \in \mathrm{Eclose}(q)$$

دامنه تابع Eclose را به همه زیرمجموعه‌های Q تعمیم می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $S \subseteq Q$ باشد، $\mathrm{Eclose}(S)$ را اجتماع بستار ϵ همه اعضای S در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$\mathrm{Eclose}(S) = \bigcup_{q \in S} \mathrm{Eclose}(q)$$

مثال ۲ *برای ϵ–NFA مثال ۱ داریم:*

$\mathrm{Eclose}(A)$	$\{A\}$
$\mathrm{Eclose}(B)$	$\{B, D\}$
$\mathrm{Eclose}(C)$	$\{C\}$
$\mathrm{Eclose}(D)$	$\{D\}$
$\mathrm{Eclose}(E)$	$\{E, B, C, D\}$
$\mathrm{Eclose}(A)$	$\{A\}$
$\mathrm{Eclose}(F)$	$\{F\}$

[۲] ε–clousre

۲.۱ تابع انتقال حالت تعمیم یافته

تعریف ۳ *تابع انتقال تعمیم یافته، $\widehat{\delta}$ ، را برای یک ϵ–NFA به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*
پایه:

$$\widehat{\delta}(q,\varepsilon) = \mathrm{Eclose}(q)$$

استقراء:

$$\widehat{\delta}(q,xa) = \bigcup_{r\in\widehat{\delta}(q,x),\, p\in\delta(r,a)} \mathrm{Eclose}(p)$$

۳.۱ زبان ϵ–NFA

به مجموعه همه رشته‌هایی که با شروع از حالت شروع و پردازش تمام رشته در نهایت به یک حالت پایانی برسد زبان ϵ–NFA می‌گویند. که تعریف آن به صورت زیر است:

تعریف ۴ *زبان یک ϵ–NFA ی E را با $L(E)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$L(E) = \{w|\widehat{\delta}(q_\circ,w) \in F\}$$

۲ برابری زبان ϵ–NFA ها و DFAها

پیش از این اثبات شد که DFAو NFAقابل تبدیل به یگدیگرند. به عبارت دیگر برای هر NFA، DFAایی وجود دارد که همان زبان را می‌پذیرد. می‌خواهیم ثابت کنیم که هر ϵ–NFA، نیز یک DFAمعادل دارد که همان زبان را می‌پذیرد یا معادلا قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه ۱ *زبان L توسط یک ϵ–NFA پذیرفته می‌شود اگر و فقط اگر DFAایی وجود داشته باشد که زبان L را بپذیرد.*

برهان. یک طرف قضیه بدیهی است. حال فرض کنید که $E = (Q_E,\Sigma,\delta_E,q_\circ,F_E)$ یک ϵ–NFA باشد، یک DFAی $D = (Q_D,\Sigma,\delta_D,q_D,F_D)$ می‌سازیم و نشان می‌دهیم که $L(E) = L(D)$.
این کار را با روشی را با نام ساختن مجموعه‌ایی[۳] انجام می‌دهیم و سپس ادعا می‌کنیم که زبان این دو اتوماتا برابر است.
مجموعه حالات DFA، مجموعه تمام مجموعه حالت‌هایی از ϵ–NFA است که Eclose خودشان اند، یعنی:

$$Q_D = \{S|S \subseteq Q_E \wedge S = \mathrm{Eclose}(S)\}$$

حالت اولیه DFAبستار ϵ حالت اولیه ϵ–NFA است، یعنی:

$$q_D = \mathrm{Eclose}(q_\circ)$$

[۳] subset construction

برای اینکه ببینیم که یک حالت $S \in Q_D$ با گرفتن یک حرف مانند a به چه حالتی می‌رود؛ابتدا می‌بینیم که اعضای S با a به چه حالت‌هایی می‌رود و روی Eclose های همه آنها اجتماع می گیریم. یعنی:

$$\delta(S,a) = \bigcup_{p \in \delta_E(t,a), t \in S} \text{Eclose}(p)$$

و برای مجموعه حالات نهایی DFAداریم:

$$F_D = \{S \mid S \bigcap F_E \neq \phi \wedge S \in Q_D\}$$

چون برای اثبات کافیست نشان دهیم که برای هر رشته w داریم$\widehat{\delta}_D(q_D,w) = \widehat{\delta}_E(q_\circ,w)$، بنابراین اثبات با استقراء بروی طول رشته $|w|$ صورت می گیرد.
پایه: $|w| = \circ$ پس $w = \varepsilon$ بنابراین

$$\widehat{\delta}_E(q_\circ,\epsilon) = \text{Eclose}(q_\circ) = q_D = \widehat{\delta}_D(q_D,\epsilon)$$

استقراء: فرض کنید حکم برای همه رشته‌های w با طول n برقرار باشد؛ می‌خواهیم نشان دهیم که حکم برای رشته w با طول ۱ + n نیز برقرار است. فرض کنید $w = xa$ که $|x| = n$ و $a \in \Sigma$. داریم:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}_E(q_\circ,xa) &= \bigcup_{p \in \delta_E(\widehat{\delta}_E(q_\circ,x),a)} \text{Eclose}(p) \\
&= \bigcup_{p \in \delta_D(\widehat{\delta}_D(q_D,x),a)} \text{Eclose}(p) \\
&= \bigcup_{p \in \widehat{\delta}_D(q_D,xa)} \text{Eclose}(p) \\
&= \widehat{\delta}_D(q_D,xa)
\end{aligned}$$

■

۳ تبدیل ϵ–NFAبه NFA

حال می‌خواهیم روشی را بیان کنیم که این بار از روی یک ϵ–NFA مستقیما یک NFAبسازیم: (توجه داشته باشید که وجود NFAبرای ϵ–NFA بدیهی است زیرا برای هر ϵ–NFA یک DFAوجود دارد و برای هر DFAیک NFA؛ اما می‌توان معادل بودن ϵ–NFA و NFAرا به طور مستقیم تحقیق کرد که این امر به خواننده واگذار می‌شود)
فرض کنید $E = (Q,\Sigma,\delta_E,q_\circ,F)$ یک ϵ–NFA باشد. NFAی $N = (Q,\Sigma,\delta_N,q_\circ,F_N)$ را به صورت زیر می‌سازیم:

$$\delta_N(q,a) = \bigcup_{t \in \text{Eclose}(q)} p \in \delta_E(t,a)$$
$$F' = \{S|\text{Eclose}(S) \cap F \neq \phi\}$$

مثال ۳ *با استفاده از روش فوق برای ϵ–NFAی مثال ۱ ، یک NFA معادل بسازید.*

	۰	۱	ϵ
$\rightarrow A$	$\{E\}$	$\{B\}$	ϕ
B	ϕ	$\{C\}$	$\{D\}$
C	ϕ	$\{D\}$	ϕ
$*D$	ϕ	ϕ	ϕ
E	$\{F\}$	ϕ	$\{B, C\}$
F	$\{D\}$	ϕ	ϕ

بنابر روش فوق، حالت‌هایی که با پردازش رشته تهی تنها به خودشان می‌روند، در فرآیند تبدیل از $\epsilon-NFA$ به NFA دچار تغییر نمی‌شوند، اما برای حالاتی که با پردازش رشته تهی می‌توانند به حالت دیگری بروند وضع فرق می‌کند، در این مثال برای حالت B داریم:

$$\delta_N(B, ۱) = \hat{\delta}_E(B, \varepsilon ۱) = \phi$$

و

$$\delta_N(B, ۰) = \hat{\delta}_E(B, \varepsilon ۰) = \phi$$

و همچنین برای E داریم:

$$\delta_N(E, ۱) = \hat{\delta}_E(E, \varepsilon ۱) = \{C, D\}$$

و

$$\delta_N(E, ۰) = \hat{\delta}_E(E, \varepsilon ۰) = \phi$$

در NFA معادل حالت A هنوز حالت شروع می‌ماند و چون داریم:

$$D \in \mathrm{Eclose}(B), \mathrm{Eclose}(E)$$

بنابراین حالات B, E نیز حالت پایانی می‌باشند بنابراین جدول انتقال NFA مورد نظر به صورت زیر است:

	۰	۱
$\rightarrow A$	$\{E\}$	$\{B\}$
$*B$	ϕ	$\{C\}$
C	ϕ	$\{D\}$
$*D$	ϕ	ϕ
$*E$	$\{F\}$	$\{C, D\}$
F	$\{D\}$	ϕ