دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه زبان‌ها و اتوماتا ۹ مهر ۱۳۹۱

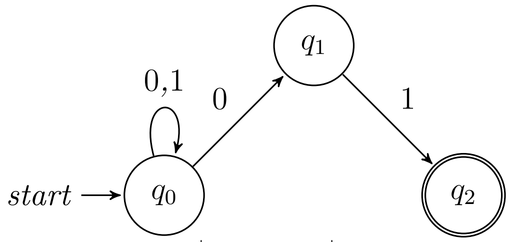
جلسه‌ی ۵ : آشنایی با NFA

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارنده: مه‌لقا صدقی*

۱ ساخت زیرمجموعه‌ای

در مثال جلسه قبل دیدیم که زمانی که NFA را به DFA تبدیل می‌کنیم، تعدادی حالت وجود دارد که به هیچ وجه از حالت اولیه قابل دسترسی نیستند. می‌خواهیم روشی بیابیم که یک NFA را مستقیماً به DFA متناظر تبدیل کنیم که حالات غیر قابل دسترس ندارد. برای این کار از حالت اولیه شروع می‌کنیم و هر کجا نیاز به افزودن حالت بود، حالت جدید را اضافه می‌کنیم.

مثال ۱ *NFA زیر را در نظر بگیرید که جدول انتقال حالت آن به صورت زیر است، DFA معادل را بیابید.*

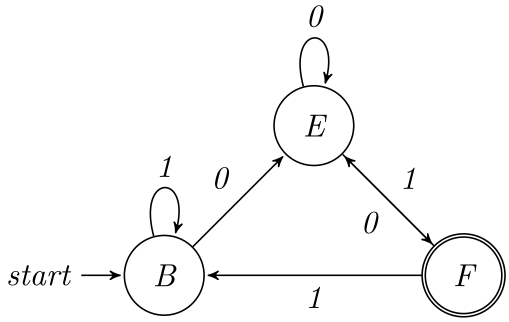


		0	1
$\rightarrow$	q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$*$	q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

DFA معادل را با شروع از حالت $\{q_0\}$ به صورت زیر می سازیم.
بنابراین در جدول انتقال حالت از مجموعه ای از حالات به مجموعه ای از حالات می‌رویم. در هر مرحله اعضای مجموعه را در نظرمی گیریم که با ۰ و ۱ به چه حالاتی می‌رسند، آنها را در قالب یک مجموعه برای حالت مقصد منظور می‌کنیم.
مجموعه‌هایی که شامل عضوی باشند که در NFA حالت نهایی هستند، به عنوان حالت نهایی محسوب می‌شوند.

		0	*1*
$\rightarrow$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$*$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

برای ساده سازی، حالات سطرهای ۱ و۲ و۳ را به ترتیب به B و E و F تغییر نام می‌دهیم.



مثال ۲ *مثال NFA شطرنج را در نظر بگیرید و DFA معادل را بیابید.*
NFA شطرنج:

		r	b
$\rightarrow$	1	$\{2,4\}$	$\{5\}$
	2	$\{4,6\}$	$\{1,3,5\}$
	3	$\{2,6\}$	$\{5\}$
	4	$\{2,8\}$	$\{1,5,7\}$
	5	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,7,9\}$
	6	$\{2,8\}$	$\{3,5,9\}$
	7	$\{4,8\}$	$\{5\}$
	8	$\{4,6\}$	$\{5,7,9\}$
$*$	9	$\{6,8\}$	$\{5\}$

DFA معادل:
مانند قبل با شروع از حالت $\{۱\}$ جدول زیر ساخته می‌شود و به همان صورت گسترش داده می‌شود.

		r	b
$\rightarrow$	$\{1\}$	$\{2,4\}$	$\{5\}$
	$\{2,4\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,5,7\}$
	$\{5\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,7,9\}$
	$\{2,4,6,8\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,5,7,9\}$
	$\{1,3,5,7\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,5,7,9\}$
$*$	$\{1,3,7,9\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{5\}$
$*$	$\{1,3,5,7,9\}$	$\{2,4,6,8\}$	$\{1,3,5,7,9\}$

تا کنون روشی تعریف کرده‌ایم که از یک DFA به یک NFA برسیم. حال باید ثابت کنیم این DFA دقیقا زبان NFA را می‌پذیرد.

قضیه ۱ *زبانی که یک DFA حاصل از روش ساخت زیر مجموعه ای می‌پذیرد با زبان NFA مبدا یکسان است.*

برهان. فرض کنید NFA مبدأ به صورت زیر باشد:

$$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_\circ, F_N)$$

طبق روش ساخت زیرمجموعه‌ای به DFA زیر می‌رسیم

$$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_\circ\}, F_D)$$

که:

$$Q_D = \{S \mid S \subseteq Q_N\}$$

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

$$F_D = \{S \subseteq Q_N \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$$

می‌توان نشان داد که:

$$L(N) = L(D) \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, w) = \hat{\delta}_N(q_\circ, w)$$

روش اثبات مجدداً استقراست:

پایه. داریم:

$$|w| = \circ \Rightarrow w = \epsilon$$

$$\hat{\delta}_N(q_\circ, \epsilon) = \{q_\circ\}$$

$$\hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, \epsilon) = \{q_\circ\}$$

استقرا. فرض کنید حکم برای همه رشته‌های به طول n برقرار باشد. نشان می‌دهیم که حکم برای رشته‌های به طول $n + ۱$ نیز برقرار است. فرض کنید $w = xa$ یک رشته دلخواه به طول $n + ۱$ باشد که $|x| = n$ و $a \in \Sigma$. طبق فرض استقرا داریم:

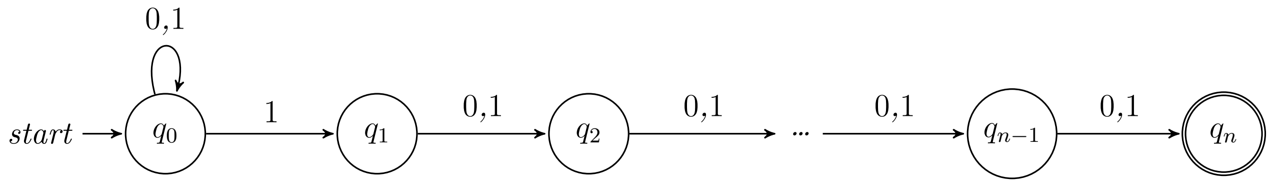
$$\hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, x) = \hat{\delta}_N(q_\circ, x)$$

و بنابراین:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, w) & = & \hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, xa) \\
& = & \delta_D(\hat{\delta}_D(\{q_\circ\}, x), a) \\
& = & \delta_D(\hat{\delta}_N(q_\circ, x), a) \\
& = & \bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q_\circ, x)} \delta_N(p, a) \\
& = & \hat{\delta}_N(q_\circ, xa) \\
& = & \hat{\delta}_N(q_\circ, w)
\end{array}$$

■

مثال ۳ NFA زیر را در نظر بگیرید.



می‌توان نشان داد این NFA زبان زیر را می‌پذیرد:

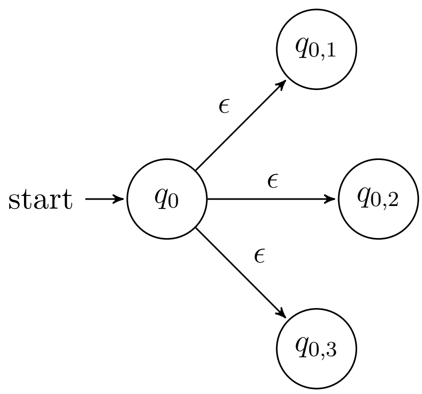
$$L(N) = \{x۱y \mid x, y \in \Sigma^*, |y| = n - ۱\}$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر DFA معادل حداقل ۲^n حالت دارد. برای این کار از برهان خلف استفاده می‌کنیم: فرض کنید که یک DFA معادل NFA داده شده که دارای کمتر از ۲^n حالت است وجود داشته باشد. مجموعه‌ی Σ^n را در نظر بگیرید. این مجموعه ۲^n رشته دارد. طبق اصل لانه کبوتری دو رشته‌ی متمایز w و w' در Σ^n وجود دارند که به یک حالت ختم می‌شوند. فرض کنید

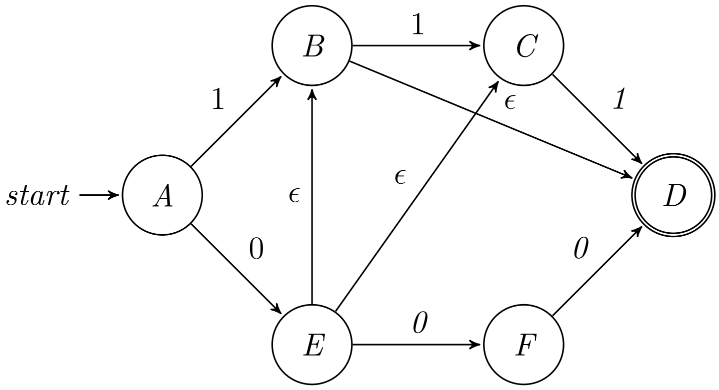
$$w = a_۱ \cdots a_n$$
$$w' = a'_۱ \cdots b_n$$

و اولین حرف متمایز دو رشته، حرف iام باشد. یعنی $a_i \neq a'_i$ و $a_j = a'_j$ برای $j < i$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $a_i = ۰$ و $a'_i = ۱$. در اینصورت رشته‌ها به فرم $w = x۰y$ و $w' = x۱y'$ هستند که $x = a_۱ \cdots a_{i-۱} = a'_۱ \cdots a'_{i-۱}$ پیشوند مشترک دو رشته است. دقت کنید که $|y| = |y'| = n - i$. حال رشته‌های $z = x۰y۰^{i-۱}$ و $z' = x۱y'۰^{i-۱}$ را در نظر بگیرید. چون w و w' به یک حالت ختم می‌شوند، z و z' نیز به یک حالت ختم می‌شوند. اما چنین چیزی امکان ندارد زیرا رشته z' قابل پذیرش و رشته z غیرقابل پذیرش است (دقت کنید که $|y۰^{i-۱}| = |y'۰^{i-۱}| = n - ۱$). بنابراین فرض خلف اولیه (وجود یک DFA معادل با کمتر از ۲^n حالت) باطل است.

گاهی نیاز است که برای حل یک مسئله، مسئله را به چندین حالت تقسیم کرد و برای هر بخش یک اتوماتای مجزا طراحی کرد. برای اتصال اتوماتاها
می‌توان از یک ϵ–NFAاستفاده کرد. در ϵ–NFAها جدول انتقال حالت یک ردیف ϵ هم دارد.



مثال ۴ ϵ–NFAزیر را در نظر بگیرید:



جدول انتقال حالت آن به صورت زیر می باشد:

		0	1	ϵ
$\rightarrow$	A	$\{E\}$	$\{B\}$	$\emptyset$
	B	$\emptyset$	$\{C\}$	$\{D\}$
	C	$\emptyset$	$\{D\}$	$\emptyset$
$*$	D	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	E	$\{F\}$	$\emptyset$	$\{B, C\}$
	F	$\{D\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

جلسه بعد روش تبدیل ϵ–NFA به NFA را بررسی می‌کنیم.