دانشکده‌ی علوم ریاضی

نظریه‌ی زبان‌ها و اتوماتا ۲ مهر ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۳: ماشین متناهی‌الحالت

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارنده: سیدمهدی میرکیالنگرودی*

۱ روش‌های نمایش ماشین متناهی‌الحالت

نمایش ماشین متناهی‌الحالت به کمک پنج‌تایی مرتب و توصیف دقیق تابع انتقال حالت آن فرایند زمان‌بری است. از این رو استفاده از گراف انتقال حالت[1] و جدول انتقال حالت[2] برای نمایش ماشین متناهی‌الحالت مناسب‌تر است.

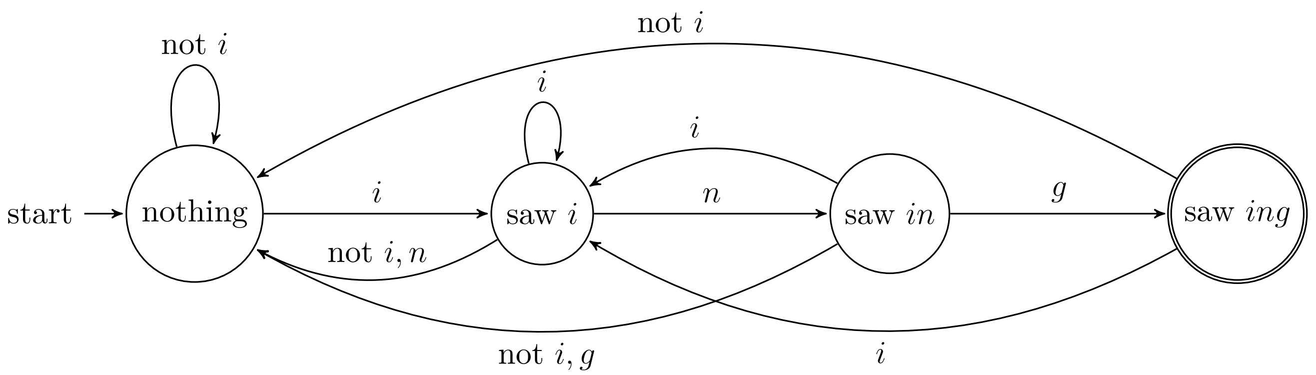
۱.۱ گراف انتقال حالت

در جلسه‌ی قبل به بررسی گراف انتقال حالت پرداختیم. در مثال زیر ماشن متناهی‌الحالت دیگری را به کمک گراف انتقال حالت آن نمایش می‌دهیم.

مثال ۱ *زبان زیر را روی الفبای لاتین در نظر بگیرید:*

$L = \{$ *مجموعه تمام رشته‌هایی که به* ing *ختم می‌شوند.* $\}$

گراف انتقال حالت برای زبان مورد نظر به این شکل خواهد بود:



[1] transition diagram
[2] transition table

برای مثال رشته‌های زیر توسط این ماشین متناهی‌الحالت پذیرفته نمی‌شوند:

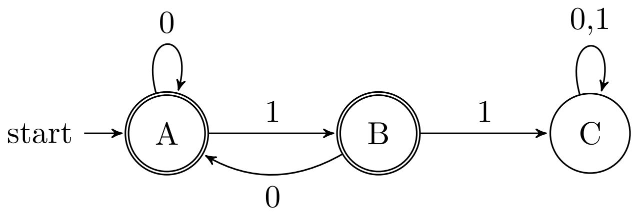
$\omega = \epsilon \notin L \qquad \omega = in \notin L \qquad \omega = ingb \notin L$

مثال ۲ *زبان زیر را روی الفبای* $\{$ ۰، ۱ $\}$ *در نظر می‌گیریم:*

$L = \{$*مجموعه تمام رشته‌هایی که ۱۱ ندارند.*$\}$

در اینجا ۳ حالت مختلف برای اتوماتای مورد نظر وجود دارد:
A: دنباله‌هایی که تاکنون مشاهده شده ۱۱ ندارد و به ۱ ختم نمی‌شود.
B: دنباله‌هایی که تاکنون مشاهده شده ۱۱ ندارد و به ۱ ختم می‌شود.
C: دنباله‌هایی که تاکنون مشاهده شده دارای ۱۱ می‌باشد.

گراف انتقال حالت برای این زبان مانند شکل زیر است:



۲.۱ جدول انتقال حالت

جدول انتقال حالت نمایشی است به شکل جدول از تابعی مانند تابع انتقال حالت که دو عضو را به عنوان ورودی خود پذیرفته و یک خروجی ارائه می‌دهد. سطرهای این جدول نمایش‌دهنده‌ی وضعیت‌ها و ستون‌های آن نمایش‌دهنده‌ی ورودی‌های ماشین متناهی‌الحالت می‌باشند.
جدول انتقال حالت مثال ۲ بدین گونه خواهد بود:

	۰	۱
$\rightarrow *$A	A	B
$*$B	A	C
C	C	C

$*$ حالت نهایی $\qquad$ $\rightarrow$حالت آغازین

برای مثال رشته‌ی زیر توسط ماشین متناهی‌الحالت پذیرفته می‌شود

$\omega =$ ۱۱۰۱۱۰۱ $\in L$

۳.۱ تابع انتقال حالت بسط یافته

تعریف ۱ *تابع انتقال حالت بسط یافته*[۳] *را با* $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ *نشان می‌دهیم و به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

پایه: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$
استقرا: $\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$

مثال ۳ *با توجه به مثال۲، با پردازش رشته ۰۱۱ از حالت* B *به چه حالتی می‌رویم؟*

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(B, 011) &= \delta(\hat{\delta}(\mathrm{B}, 01), 1) \\
&= \delta(\delta(\hat{\delta}(\mathrm{B}, 0), 1), 1) \\
&= \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(\mathrm{B}, \epsilon), 0), 1), 1) \\
&= C
\end{aligned}$$

۲ زبان ماشین متناهی‌الحالت

تعریف ۲ *زبانی که ماشین حالت متناهی*A *می پذیرد را با* $L(A)$ *نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:*

$$L(A) = \{\omega | \hat{\delta}(q_\circ, \omega) \in F\}$$

مثال ۴ *به طور دقیق استدلال کنید که ماشین حالت متناهی شکل صفحه قبل زبان* L *در مثال ۲ را می‌پذیرد.*

یادآوری: برای اثبات برابر بودن دو مجموعه دلخواه مانند S و T کافیست نشان دهیم:

$$T \subseteq S, S \subseteq T$$

به عبارتی:

$$(\omega \in S \Rightarrow \omega \in T) \wedge (\omega \in T \Rightarrow \omega \in S)$$

برهان.
دو مجموعه S و T را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
S &= L(A) \\
T &= \{ \text{رشته های بدون ۱۱} \}
\end{aligned}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که رشته‌هایی که ماشین حالت متناهی پذیرنده‌ی آن است زیرمجموعه‌ی رشته‌هایی است که دارای دو یک متوالی نمی‌باشند. به عبارت دیگر باید ثابت کنیم که

$$S \subseteq T$$

[۳] extended transition function

با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که ویژگی فوق برقرار است. برای پایه‌ی استقرا کمترین طول ممکن را در نظر می‌گیریم. کمترین طول ممکن برای رشته‌ی صفر است که در نتیجه دارای دو یک متوالی نخواهد بود و بنابراین صحت پایه‌ی استقرا برقرار است. حال برای فرض استقرا رشته‌ی ω را در نظر می‌گیریم که می‌تواند به دو صورت باشد:
اگر رشته ω توسط اتوماتای A پذیرفته شود ، ω دارای ۱۱ نمی‌باشد.

اگر $\hat{\delta}(A,\omega) = A$ آنگاه ω ۱۱ ندارد و به یک ختم نمی‌شود.
اگر $\hat{\delta}(A,\omega) = B$ آنگاه ω ۱۱ ندارد و به یک ختم می‌شود.

حال برای گام استقرا با فرض اینکه تمامی رشته‌ها با طول کمتر از n دارای خاصیت فوق می‌باشند، باید این خاصیت را برای رشته‌های با طول n ثابت کنیم:

حالت اول: در صورتی که $\hat{\delta}(A,\omega) = A$ باشد، رشته‌ی ω به شکل $x۰$ است. پس خواهیم داشت:

$$\omega = x۰ \Rightarrow \hat{\delta}(A,x) = A$$

با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که رشته‌ی ω دارای ۱۱ نیست.

$$\omega = x۰ \Rightarrow \hat{\delta}(A,x) = B$$

در این حالت نیز با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که رشته‌ی ω دارای ۱۱ نیست.

حالت دوم: در صورتی که $\hat{\delta}(A,\omega) = B$ باشد، رشته‌ی ω به شکل $x۱$ است که $|x| = n - ۱$ پس خواهیم داشت:

$$\omega = x۱ \Rightarrow \hat{\delta}(A,x) = A$$

در این حالت نیز با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که رشته‌ی ω دارای ۱۱ نیست.

بدین ترتیب تمامی حالات بررسی شدند و در صورتی که برای رشته‌ای داشته باشیم: $\hat{\delta}(A,\omega) = A$ یا $\hat{\delta}(A,\omega) = B$ رشته‌ی مورد نظر دارای ۱۱ نبوده و در نتیجه عضو مجموعه‌ی T خواهد بود، بنابراین:

$$S \subseteq T$$

برای اثبات قسمت دوم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که رشته‌ی n از مجموعه‌یT وجود داشته باشد که در مجموعه‌ی S نباشد. این بدان معناست که $\hat{\delta}(A,n) \neq A$ یا $\hat{\delta}(A,n) \neq B$. بنابراین می‌توان گفت این رشته نهایتا به حالت C می‌رسد. از طرفی با توجه به موارد قسمت اول اثبات باید رشته‌ی مذکور دارای ۱۱ نباشد، اما تمامی رشته‌های ختم شونده به حالت C دارای ۱۱ هستند و این مخالف فرض و تناقض است. پس حکم مورد نظر ثابت است، یعنی هر رشته‌ی مجموعه‌ی T عضو مجموعه‌ی S خواهد بود. پس:

$$T \subseteq S$$

بدین ترتیب هریک مجموعه‌های S و T زیرمجموعه‌ی یکدیگر بوده و خواهیم داشت.

$$S = T$$

■