دانشکده‌ی علوم ریاضی

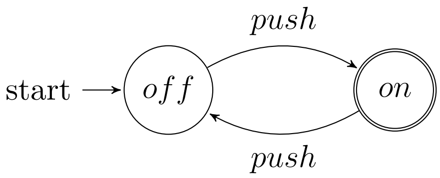
نظریه زبان ها و اتوماتا ۲۶ شهریور ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۱: مقدمه و نمادگذاری

مدرّس: دکتر شهرام خزائی نگارنده: مصطفی رحمانی

۱ مقدمه

نظریه اتوماتا نظریه‌ای برای بررسی ماشین‌ها و عملکردشان به صورت انتزاعی است. در واقع با بررسی مدل‌هایی تلاش در بررسی "توان" ابزارهای محاسباتی می‌باشد. ما در این درس از ماشین‌های ساده شروع می‌کنیم و کم‌کم آن‌ها را قوی‌تر می‌کنیم تا به قوی‌ترین ابزار محاسباتی که کامپیوترهای امروزی هستند برسیم. ماشین‌ها اصطلاحا اتوماتا نامیده می‌شوند. اما ابتدا به یک مثال از اتوماتا توجه کنید:



شکل بالا یک مدل از یک چراغ است. این چراغ در ابتدا در وضعیت «خاموش» قرار دارد. اما با زدن کلید $push$ (فشار دادن کلید) روشن می‌شود. و اگر دوباره کلید فشرده شود خاموش می‌شود.

نکته: در صورت تکرار فرد یا زوج این عمل، چراغ به ترتیب روشن یا خاموش خواهد بود.

۲ نمادگذاری و تعاریف اولیه

۱.۲ الفبا

تعریف ۱ *مجموعه‌ای غیر تهی و متناهی از نمادها را الفبا[۱] می‌گویند. همچنین به هر نماد الفبا یک حرف گفته می‌شود.*

مثال ۱ *الفبای لاتین $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$ و الفبای باینری $\Sigma = \{۰, ۱\}$ مثالهایی از الفبا هستند که بیش‌ترین کاربرد را برای ما دارند.*

[۱] alphabet

۲.۲ رشته

تعریف ۲ *دنباله‌ای محدود از نمادهای الفبا را رشته[۲] می‌نامیم.*

به طور مثال کلمه‌ی $english$ یک رشته روی الفبای زبان انگلیسی است. برای نامگذاری رشته‌ها معمولا از حروف انتهایی الفبای انگلیسی استفاده می‌شود. (به طور مثال: $\ldots, w, x, y, z$)
چند مثال از رشته ها:

$$w_1 = aabc$$
$$w_2 = 00110$$

تعریف ۳ *طول رشته w با علامت $|w|$ نمایش داده می‌شود و به تعداد نمادهای موجود در رشته گفته می‌شود.*

تعریف ۴ *رشته‌ی تهی با نماد ε یا λ نمایش داده می‌شود و طول آن برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.*

مثال ۲ *داریم:*

$$|w_1| = 4, |w_2| = 5, |\varepsilon| = 0$$

تعریف ۵ *الحاق دو رشته از کنار هم قرار دادن آنها حاصل می‌شود. یعنی برای رشته‌های $x = a_۱ \cdots a_n$ و $y = b_۱ \cdots b_m$ تعریف می‌کنیم $xy = a_۱ \cdots a_n b_۱ \cdots b_m$.*

مثال ۳ *اگر $x = ۰۱۱$ و $y = ۱۱۰$ داریم $xy = ۰۱۱۱۱۰$ و $yx = ۱۱۰۰۱۱$.*

لم ۱ *برای رشته‌های x و y در حالت کلی $yx \neq xy$ است. همچنین $|xy| = |yx| = |x| + |y|$ و برای هر رشته w داریم $w\epsilon = \epsilon w = w$.*

۳.۲ توان‌های الفبا

برای هر $k \in N$ مجموعه ی تمام رشته‌های به طول k را با Σ^k نشان می‌دهیم. یعنی:

$$\Sigma^k = \{a_1 \ldots a_k \mid \forall a_i \in \Sigma\}$$

مثال ۴ *برای الفبای باینری داریم:*

$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$$
$$\Sigma^1 = \{0, 1\}$$
$$\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$$
$$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

[۲] string

۴.۲ مجموعه‌ی همه‌ی رشته‌ها

مجموعه‌ی همه‌ی رشته ها با $\Sigma^{\star}$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \ldots = \bigcup_{k\geq 0} \Sigma^k$$

همچنین داریم:

$$\Sigma^+ = \bigcup_{k\geq 1} \Sigma^k$$

و نیز:

$$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}$$

۵.۲ زبان

تعریف ۶ *اگر Σ یک الفبا و $L \subseteq \Sigma^*$، آنگاه L یک زبان نامیده می‌شود.*

مثال ۵ *مجموعه‌ی تمام لغات مجاز زبان انگلیسی روی الفبای لاتین$\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$ یک زبان است.*

برای $n \geq ۰$ مجموعه همه رشته هایی که n تا ۰ و به دنبالش n تا ۱ دارند یک زبان روی الفبای $\Sigma = \{۰, ۱\}$ است.
یعنی:

$$L = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$$

۳ اتوماتاها

۱.۳ اتوماتاهای محدود

ماشین‌های حالت متناهی[۳] اولین سطح از اتوماتا هستند که کلاس کوچکی از زبان‌ها به نام زبان‌های منظم[۴] را "می‌پذیرند". این نوع ماشین‌ها می‌توانند دارای عملکرد قطعی[۵] یا غیرقطعی[۶] باشند، اما هر دو گونه از نظر توانایی پذیرش زبان‌ها یکسان هستند.

[۳] finite automata
[۴] regulare languages
[۵] neterministic
[۶] non-deterministic

۲.۳ اتوماتای پشته‌ای

سطح بعدی اتوماتا ماشین‌های پشته‌ای[۷] هستند که از پشته[۸] استفاده می‌کنند و نوع غیرقطعی آنها کلاس بزرگتری از زبان‌ها را (نسبت به زبان‌های منظم) به نام زبان‌های مستقل از متن[۹] می‌پذیرند.

۳.۳ ماشین‌های تورینگ

سومین سطح از اتوماتا ماشین‌های تورینگ[۱۰] هستند که قوی‌ترین مدل محاسباتی‌اند و در آن از نوار[۱۱] استفاده می‌شود.

[۷] push-down automata
[۸] stack
[۹] context-free languages
[۱۰] Turning machines
[۱۱] tape