**دانشکده‌ی علوم ریاضی**

**آنالیز الگوریتم‌ها** ۲۲ اردیبهشت ۹۲

# جلسه‌ی ۲۰: الگوریتم‌های تقریبی

*مدرّس: دکتر شهرام خزائی* *نگارنده: سوزان اصغری*

## ۱ مقدمه

الگوریتم‌های تقریبی، الگوریتم‌هایی برای پیداکردن راه‌حل‌های تقریبی برای مسائل بهینه‌سازی هستند. این الگوریتم‌ها برای مقابله با مسائل NP سخت بکار می‌روند زیرا بسیاری از مسائل بهینه‌سازی NP سخت هستند. این الگوریتم‌ها راه‌حل‌هایی شبه‌بهینه همراه با ضریبی برای میزان تقریب جواب واقعی ارائه می‌دهند. همچنین وجود جواب خود را در بازهٔ خطای اعلام شده تضمین می‌کنند (مثلا ممکن است بتوان ثابت کرد جواب آنها حداکثر دو برابر جواب بهینه است)؛ منتها جواب خود را در زمان چندجمله‌ای تولید می‌کنند. اکنون نمونه‌ای از الگوریتم‌های تقریبی بیان می‌کنیم.

## ۲ مساله‌ی کوله‌پشتی

در طی یک سرقت، سارقی متوجه می‌شود که اشیایی که می‌تواند بدزدد بیشتر از حد انتظار او بوده از آنجایی که ظرفیت کوله‌پشتی‌اش محدود است، باید تصمیم بگیرد چه اشیایی را بدزدد. کوله‌پشتی‌اش حداکثر می‌تواند وزن $W$ را تحمل کند. فرض کنید $n$ شی با وزن‌های صحیح مثبت $w_1, ..., w_n$ و ارزش‌های صحیح مثبت $v_1, ..., v_n$ وجود دارند به طوری که $w_i \leq W$ و $\sum w_i \geq W$، سارق چه ترکیبی از این اشیا را بردارد که بیشترین ارزش را بدست آورد؟

## ۳ تعیین کران برای مساله‌ی کوله‌پشتی

### ۱.۳ الگوریتم حریصانه اول

الگوریتمی حریصانه بصورت زیر مطرح می‌کنیم:

- ابتدا تمام اشیاء را بر اساس نسبت ارزش به وزنشان مرتب می‌کنیم.
- به ترتیب نسبت‌های بدست آمده از مرحله‌ی قبل اشیاء را از بزرگترین نسبت تا جایی که ظرفیت کوله‌پشتی تکمیل نشده انتخاب می‌کنیم.

با مثالی نشان می‌دهیم که این الگوریتم نه تنها همیشه درست کار نمی‌کند بلکه جوابی که پیدا می‌کند اختلاف فاحشی با جواب بهینه دارد.

**مثال ۱** *یک کوله‌پشتی با ظرفیت $W = 1000$ در نظر بگیرید. اگر دو شیء با وزن‌های $w_1 = 1, w_2 = 1000$ و ارزش $v_1 = 2, v_2 = 1000$ موجود باشد، این الگوریتم شیء با وزن $w_1 = 1$ و ارزش $v_1 = 2$ انتخاب می‌کند در حالی که جواب بهینه با انتخاب شی دیگر حاصل می‌شود که ارزش آن ۵۰۰ برابر جواب حریصانه است.*

حال می‌خواهیم الگوریتم بالا را طوری تغییر دهیم که جواب آن فاصله‌ی زیادی با جواب بهینه نداشته‌باشد. به این منظور الگوریتم حریصانه‌ی زیر را مطرح می‌کنیم.

## ۲.۳ الگوریتم حریصانه دوم

در این الگوریتم ابتدا الگوریتم حریصانه‌ی بالا را اجرا می‌کنیم و فرض می‌کنیم ارزش کل $G_۱$ بدست آمده است. همچنین اشیاء را بر اساس ارزش آن‌ها نیز مرتب می‌کنیم و فرض می‌کنیم ماکسیمم $v_i$هابرابر $v'$ باشد. آنگاه جواب الگوریتم مورد نظر ما به‌صورت زیر است:

$$G = \max\{G_۱, v'\}$$

**قضیه ۱** *جواب حاصل از این الگوریتم حداقل نصف جواب بهینه است.*

**برهان.** فرض کنید $v_۱/w_۱ \geq v_۲/w_۲ \geq \ldots \geq v_n/w_n$. اگر $k$ اندیس آخرین شیئی باشد که الگوریتم حریصانه‌ی اول انتخاب کرده و $k+۱$ اندیس شیئی باشد که بعد از انتخاب شی $k$ الگوریتم به خاطر محدودیت ظرفیت کوله‌پشتی نتوانسته آن را انتخاب کند و $G$ جواب حاصل از الگوریتم حریصانه‌ی دوم باشد. آنگاه روابط زیر برقرار است:

$$G \geq v_۱ + v_۲ + \ldots + v_k \tag{۱}$$

$$G \geq \max\{v_i\} \tag{۲}$$

ابتدا لم زیر را مطرح و اثبات می‌کنیم.

**لم ۲** *فرض می‌کنیم $OPT$ جواب بهینه‌ی مساله‌ی کوله‌پشتی باشد. آنگاه:*

$$OPT \leq v_۱ + v_۲ + \ldots + v_k + v_{k+۱}$$

**برهان.** برای اثبات نامساوی بالا مساله‌ی کوله‌پشتی کسری را بیان می‌کنیم:

- **مساله‌ی کوله‌پشتی کسری.** در طی یک سرقت، سارقی متوجه می‌شود که اشیایی که می‌تواند بدزدد بیشتر از حد انتظار او بوده از آنجایی که ظرفیت کوله‌پشتی‌اش محدود است، باید تصمیم بگیرد چه اشیایی را بدزدد. کوله‌پشتی‌اش حداکثر می‌تواند وزن $W$ را تحمل کند. فرض کنید $n$ شی با وزن‌های صحیح مثبت $w_۱, \ldots, w_n$ ، و ارزش‌های صحیح مثبت $v_۱, \ldots, v_n$ وجود دارند به طوری که $w_i \leq W$ و $\sum w_i \geq W$ ، همچنین سارق می‌تواند اشیا را ذوب کرده و هرچقدر که می‌خواهد بردارد سارق چه ترکیبی از این اشیا را بردارد که بیشترین ارزش را بدست آورد؟

- **الگوریتم بهینه.** ادعا می‌کنیم الگوریتم زیر بهینه است. همانند الگوریتم حریصانه‌ی اول ابتدا اشیا را برا اساس نسبت ارزش بر وزن مرتب می‌کنیم. سپس به ترتیب بزرگی نسبت ارزش به وزن با توجه به ظرفیت کوله‌پشتی تا جایی که می‌توانیم اشیا را از نسبت بزرگ به کوچک برمی‌داریم تا جایی که اشیا ۱ تا $k$ را بتوانیم برداریم اما شی $k+۱$ ام را نتوانیم برداریم. آنگاه شی $k+۱$ ام را ذوب می‌کنیم و مقداری از آن را برمی‌داریم تا ظرفیت کوله‌پشتی پر شود.

- **اثبات بهینگی.** به طور دقیق‌تر فرض کنید $k$ اندیسی باشد که در روابط $\sum_{i=۱}^{k} w_i < W$ و $\sum_{i=۱}^{k+۱} w_i \geq W$ صدق می‌کند. در اینصورت الگوریتم حریصانه ما حجم $m_i = w_i$ را از $k$ شیء اول برمی دارد (یعنی آنها را به طور کامل انتخاب می‌کند) و از شیء $k+۱$ام، حجم $m_{k+۱} = W - \sum_{i=۱}^{k} w_i > ۰$ را برمی‌دارد. در اینصورت ارزش حریصانه فوق برابر است با $F = \sum_i m_i \frac{v_i}{w_i}$ (فرض می‌کنیم $m_i = ۰$ برای $i \geq k+۲$).

  اگر ارزش حریصانه، بهینه نباشد آنگاه جواب دیگری وجود دارد که حجم $m'_i$ از شیء $i$ام را برمی‌دارد و دارای ارزش بیشتر $F' = \sum_i m'_i \frac{v_i}{w_i}$ است (یعنی $F' \geq F$). فرض کنید $\ell$ اولین جایی باشد که جواب بهینه متفاوت با جواب الگوریتم حریصانه ما عمل کرده است. یعنی برای مقادیر $i < \ell$ داریم $m'_i = m_i$ اما $m'_\ell < m_\ell$ (می‌توان استدلال کرد که حالت $m'_\ell > m_\ell$ با توجه به حریصانه بودن الگوریتم ما امکان ندارد). همچنین دقت کنید که چون $\sum_{i=۱}^{k+۱} m_i = W$ و $\sum_i m'_i \leq W$ پس $\ell \leq k+۱$.

  با توجه به اینکه $F' - F = \sum_i (m'_i - m_i)\frac{v_i}{w_i} > ۰$ و $m'_\ell - m_\ell < ۰$ می‌توان نتیجه گرفت که وجود دارد یک $j > \ell$ که برای آن داریم $m'_j - m_j > ۰$.

حال در جواب بهینه به جای برداشتن حجم $m'_\ell$ از شیء $\ell$ام، حجم بیشتر $m'_\ell + \delta$ را از آن بر می‌داریم و حجم اضافی $\delta$ را از شیء $j$ام کم می‌کنیم (یعنی حجم $m'_j - \delta$ از شیء $j$ام بر می‌داریم) که $\delta = \min(m'_j, w_\ell - m'_\ell)$. توجه کنید که چون $m'_j > m_j \geq 0$ و $m'_\ell < m_\ell \leq w_\ell$، پس $\delta > 0$.

اما این تغییر ارزش جواب بهینه را به اندازه مقدار نامنفی زیر افزایش که با بهینه بودن $F'$ متناقض است:

$$\left((m'_\ell + \delta)\frac{v_\ell}{w_\ell} + (m'_j - \delta)\frac{v_j}{w_j}\right) - \left(m'_\ell\frac{v_\ell}{w_\ell} + m'_j\frac{v_j}{w_j}\right) = \delta\left(\frac{v_\ell}{w_\ell} - \frac{v_j}{w_j}\right)$$

هر جواب مساله‌ی کوله‌پشتی (غیر کسری) خودیک جواب مساله کوله‌پشتی کسری نیز هست. لذا جواب بهینه‌ی مساله‌ی کوله‌پشتی (غیر کسری) از جواب بهینه مساله کوله‌پشتی کسری کمتر است. بنابراین اگر شی ۱ تا $k+1$ ام را برداریم ارزش بیشتری نسبت به جواب بهینه‌ی مساله‌ی کوله‌پشتی (کسری و غیرکسری) بدست می‌آید.

■

حال می‌توانیم اثبات قضیه را کامل کنیم. از نامساوی دوم نتیجه می‌شود:

$$G \geq v_{k+1} \tag{۳}$$

با جمع کردن رابطه‌ی اول و سوم نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$2G \geq v_1 + v_2 + \ldots + v_{k+1}$$

از رابطه‌ی فوق و لم ۱ نتیجه می‌شود:

$$G \geq 1/2\, OPT$$

■

حال می‌خواهیم بدانیم که این کران چقدر مناسب است. مثال زیر را در نظر بگیرید:

**مثال ۲** *یک کوله‌پشتی با ظرفیت $W = 1000$ در نظر بگیرید. اگر سه شیء با وزن‌های $w_1 = 501, w_2 = w_3 = 500$ و ارزش $v_1 = 502, v_2 = v_3 = 500$ موجود باشد، جواب الگوریتم حریصانه دوم ۵۰۲ است در حالی که جواب بهینه ۱۰۰۰ است و تقریبا دو برابر جواب الگوریتم است پس کران فوق کران مناسبی است.*

به طور دقیق‌تر می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

**قضیه ۳** *به ازای هر $\epsilon \geq 0$ ، نمونه‌ای از مساله‌ی کوله‌پشتی وجود دارد که برای آن نسبت جواب الگوریتم حریصانه‌ی دوم به جواب بهینه حداکثر $1/2 + \epsilon$ است.*

**برهان.** عدد $N$ را برابر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از $\frac{1}{\epsilon}$ در نظر می گیریم. اگر سه شی با وزن‌های $w_1 = N+1, w_2 = w_3 = N$ و ارزش $v_1 = N+2, v_2 = v_3 = N$ موجود باشند، جواب الگوریتم حریصانه $G = N+2$ است و جواب بهینه $OPT = 2N$ است و داریم

$$G/OPT \leq 1/2 + \epsilon$$

■