دانشکده‌ی علوم ریاضی

آنالیز الگوریتم ۱ اسفند ۱۳۹۱

جلسه‌ی ۵: گراف‌ها و مسأله پیمایش گراف

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *نگارنده: ستایش ایجادی*

۱ گراف و تعاریف آن

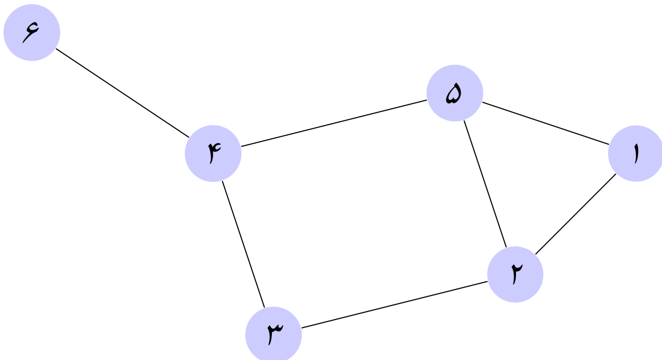
تعریف ۱ *گراف[۱] متشکل از زوج مرتب $G = (V, E)$ است که*
V*: مجموعه‌ای غیرتهی و متناهی از رأس‌ها است؛*
E*: مجموعه‌ی یال‌ها که متشکل از زوج‌های (نامرتب) (u, v) است که $u, v \in V$.*

نمادگذاری. تعداد رأس‌های یک گراف را با n و تعداد یال‌های آن را با m نمایش می‌دهیم.

مثال ۱ *گراف $G = (V, E)$ که*

$$\begin{aligned} V &= \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \\ E &= \{(۱, ۲), (۱, ۵), (۲, ۵), (۲, ۳), (۴, ۳), (۴, ۵), (۴, ۶)\} \end{aligned}$$

دارای $n = ۶$ رأس و $m = ۷$ یال است.



مثال ۲ *می‌توان شهرهای یک کشور را رئوس و جاده‌های بین آنها را یال‌های یک گراف تصور کرد.*

تعریف ۲ *گراف جهت‌دار[۲]، گرافی است که ترتیب رأس‌ها در یال‌ها اهمیت دارد و بنابرین (u, v) و (v, u) دو یال متمایز محسوب می‌شوند.*

[۱] graph
[۲] directed grap

یک گراف جهت‌دار یال‌ها با پیکان‌هائی از رأس ابتدا به رأس انتها رسم می‌شوند.

تعریف ۳ *گراف بدون یال موازی و حلقه را گراف ساده*[۳] *می‌نامند. گراف جهت‌دار را وقتی ساده می‌گویند که یال موازی نداشته باشد.*

مثال ۳ *گراف وب، گراف چرخه غذایی گونه‌های حیوانی مثال‌هایی از گراف‌های جهت‌دار هستند.*

تعریف ۴ *گراف متراکم*[۴]*، گرافی است که تعداد یال‌های آن به بیشینه تعداد یال ممکن نزدیک باشد.*

$$m \approx \binom{n}{۲}$$

گراف پراکنده یا کم‌پشت[۵]*، گرافی است که تعداد یال‌های آن به نسبت کم باشد.*

$$m \ll \binom{n}{۲}$$

تعریف ۵ *گراف بر چسب‌دار*[۶] *گرافی است که به یال‌های گراف، یا به رأس‌های گراف و یا به هر دوی آن‌ها برچسب‌هایی نسبت داده می‌شود که به صورت معمول این برچسب‌ها را با اعداد حقیقی نمایش می‌دهند.*

یک مسیر[۷] در گراف یک گذر از رأس‌های متوالی در امتداد یک سری از یال‌ها است و به طور دقیق‌تر به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۶ *دنباله رأس‌های* $v_۱, \ldots, v_t$ *برای گراف* $G = (V, E)$ *یک مسیر با طول* t *نامیده می‌شود اگر* $v_i \in V$ *برای* $i = ۱, \ldots, t$ *و* $(v_i, v_{i+۱}) \in E$ *برای* $i = ۱, \ldots, t - ۱$.

طول مسیر تعداد یال‌های مسیر است که در طول مسیر طی می‌شود. یك مسیر با طول t دارای $t + ۱$ رأس و t یال است.

تعریف ۷ *یك مسیر ساده*[۸]*، مسیری است که همه رئوس آن بجز احتمالا رأس شروع و پایان تکراری نباشد.*

تعریف ۸ *می‌گوییم رأس* u *از رأس* s *قابل‌دسترس*[۹] *است اگر مسیری بین آنها وجود داشته باشد. در یک گراف بدون جهت می‌گوییم که این دو رأس متصل*[۱۰] *هستند.*

تعریف ۹ *گراف همبند*[۱۱] *گراف ساده‌ای است که مسیری بین هر جفت رأس آن وجود داشته باشد.*

[۳] simple graph
[۴] dense graph
[۵] sparse graph
[۶] graph labeled
[۷] sub graph
[۸] simple path
[۹] reachable
[۱۰] connected
[۱۱] connected

تعریف ۱۰ *گراف H را زیرگراف[۱۲] G می‌گویند و با نماد $H \subseteq G$ نمایش می‌دهند، هرگاه: $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.*

تعریف ۱۱ *H یک مولفه همبندی گراف G است اگر و فقط اگر تمامی شروط زیر برقرار شود:*

۱. *H یک زیرگراف G باشد.*

۲. *H همبند باشد.*

۳. *هیچ زیرگراف همبندی از G، H را به عنوان زیرگراف در برنگیرد.*

به عبارت دیگر مولفه همبند یک گراف، یک زیرگراف همبند است بطوری که اضافه کردن هر رأس یا یال آن را ناهمبند کند. هر گراف به نوعی عبارت از اجتماع مولفه‌های همبند خود است.

تعریف ۱۲ *رأس مجاور[۱۳] هر یال بوسیله یک جفت رأس مشخص می‌شود. دو رأسی که توسط یک یال به هم متصل می‌شوند را رئوس مجاور می‌نامند.*

۲ روش نمایش داده ساختاری گراف

۱.۲ ماتریس مجاورت

تعریف ۱۳ *ماتریس مجاورت[۱۴] گراف $G=(V,E)$ با مجموعه رئوس $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک ماتریس $n\times n$ با درایه‌های صفر و یک به نام A است که در آن درایه $a_{i,j}$ برابر با ۱ است اگر و فقط اگر $(v_i,v_j)\in E$.*

مثال ۴ *ماتریس A ماتریس مجاورت گراف مثال ۱ است.*

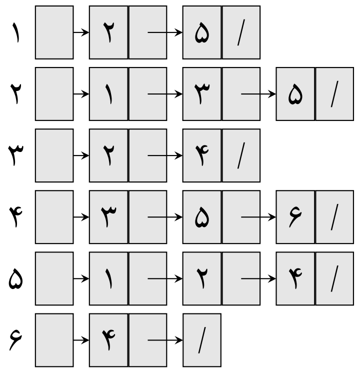
$$A_{6\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[۱۲] sub graph
[۱۳] adjacent
[۱۴] adjacency matrix

۲.۲ لیست مجاورت

لیست مجاورتی[۱۵] فرم دیگر نمایش گراف در کامپیوتر است. این ساختمان داده شامل لیستی از کلیه رئوس گراف است. برای هر رأس یك لیست پیوندی وجود دارد که گره‌های آن رئوس مجاور رأس را دربر می‌گیرند. به عبارت دیگر لیست i حاوی رئوسی است که مجاور رأس v_i است.

مثال. لیست زیر، لیست مجاورت رأس‌های ۱،۲و۳ گراف مثال قبل است.



۳.۲ مقایسه‌ی پیچیدگی‌ها

داده ساختار	حافظه	تعیین $(u,v) \in E$	تعیین رأس‌های مجاور یک رأس	تعیین همه یال‌ها
ماتریس مجاورت	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
لیست مجاورت	$O(n+m)$	$O(\deg(v))$	$O(\deg(u))$	$O(m+n)$

۳ پیمایش گراف

هدف از پیمایش گراف[۱۶] این است که کلیه رئوسی که از طریق یک رأس قابل دسترس هستند را بدست آوریم. استراتژی عمل به صورت زیر است.

Algorithm 1 TRAVERSE

function TRAVERSE(grapf $G = (V, E)$, vertex $s \in V$)
  Initially mark s as explored and all other vertices unexplored
  while possible **do**
    choose an edge$(u, v) \in E$, with u explored and v unexplord
  mark v as explored

[۱۵] adjacency list
[۱۶] graph traversal

قضیه ۱ *پس از خاتمه الگوریتم، تمام رأس‌های قابل دسترس پیدا می‌شوند و هیچ رأس غیرقابل دسترسی پیدا نمی‌شود.*

برهان. باید ثابت کنیم پس از خاتمه الگوریتم، رأس v پیدا می‌شود اگر و تنها اگر مسیری از s به v وجود داشته باشد.
ابتدا فرض کنید $v_۰, \dots, v_\ell$ دنباله رأس‌هایی باشد که الگوریتم به ترتیب پیدا می‌کند[۱۷]. به استقرا روی t نشان می‌دهیم که مسیری از s به v_t با طول t وجود دارد.

- **پایه**: اگر $t = ۰$ باشد، آنگاه $v_۰ = s$ زیرا s اولین رأسی است که الگوریتم پیدا می‌کند و به وضوح مسیری از s به $v_۰$ با طول صفر وجود دارد.
- **گذار**: فرض کنید مسیری از s به $v_{t-۱}$ با طول $t - ۱$ وجود داشته باشد. توجه کنید که الگوریتم رأس v_t را به واسطه وجود یالی مانند (v, v_t) پیدا میکند که راس v قبل از v_t پیدا شده است؛یعنی $v = v_i$ برای یک $۰ \le i \le t - ۱$. طبق فرض استقرا مسیری با طول i از s به v وجود دارد و چون $(v, v_t) \in E$ لذا مسیری از s به v_t با طول t وجود دارد.

حال فرض کنید مسیری مانند $v_۰, \dots, v_\ell$ از $v_۰ = s$ به $v = v_\ell$ وجود داشته باشد. نشان می‌دهیم که بعد از خاتمه الگوریتم رأس $v = v_\ell$ پیدا می‌شود. فرض خلف کنید که چنین نباشد. چون الگوریتم در همان ابتدا راس $v_۰ = s$ را پیدا می‌کند، پس رأس‌های v_i و $v_{i+۱}$ در مسیر مذکور وجود دارند به‌طوری‌که الگوریتم بعد از خاتمه رأس v_i را پیدا کرده است ولی راس $v_{i+۱}$ را پیدا نکرده است. اما این با فرض خاتمه یافتن الگوریتم در تناقض است. پس فرض خلف باطل بود و الگوریتم رأس $v = v_\ell$ را پیدا می‌کند. می‌شود و این قضیه اثبات می‌شود.
■

دو روش معروف برای پیمایش وجود دارد که در واقع پیاده‌سازی خاص الگوریتم ۱ با داده ساختارهای مخصوص به‌خود هستند:

- **جستجوی اول عمق**

در جستجوی اول عمق[۱۸]، پیمایش از یک رأس آغاز می‌شود. هر رأس که پردازش می‌شود یکی از رئوس مجاور آن که قبلا ملاقات نشده است انتخاب می‌شود و پیمایش رأس مجاور ادامه پیدا می‌کند. اگر رأس مجاوری وجود نداشت که قبلا ملاقات نشده باشد یک سطح به عقب برمی‌گردد، به عبارتی این پیمایش رأس‌ها به صورت عمقی طی می‌کند، همچنین در این پیمایش می‌توان مرتبه توپولوژیکی گراف را پیدا کرد. این نوع پیمایش را داده ساختار پشته[۱۹] می‌توان ذخیره کرد.

- **جستجوی اول سطح**

در جستجوی اول سطح[۲۰] پیمایش از یک رأس آغاز می‌شود. آن رأس و کلیه رئوس مجاورش ملاقات می‌شود سپس پیمایش از رأس مجاور ادامه پیدا می‌کند. در این نوع پیمایش رأس‌ها به صورت لایه‌ای پیمایش می‌شوند، همچنین در این پیمایش کوتاه‌ترین مسیر در گرتف نیز یافت می‌شود. این نوع پیمایش را در داده ساختار صف[۲۱] می‌توان ذخیره کرد.

---
[۱۷] marks as explored
[۱۸] Deep First Search
[۱۹] stack
[۲۰] Breadth First Search
[۲۱] queue