اثبات :

$$f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) f_l$$

از تعریف f_l برحسب δ_l استفاده می‌کنیم:

$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k}$$

Use $\quad P_l(1) = 1 \leftarrow (\cos 0 = 1)$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(f_k(0)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)\sin^2\delta_l}{k}$$

$$\rightarrow \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(f(0)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l = \sigma \quad \blacksquare$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(f(0))$$

این رابطه نه فقط در مورد برخوردهای الاستیک بلکه در مورد برخوردها (پراکندگی‌های) غیر الاستیک هم صحیح است.

تقریب Born

(1) $f_{\vec k}(\theta)$ را قبلاً برحسب پتانسیل V تعریف کرده بودیم:

$$f_k(\theta) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \, e^{-i\vec k'\cdot\vec x'} V(\vec x') \psi_{\vec k}(\vec x')$$

که البته فرض می‌کنیم $V(\vec x) = V(r)$ است که در آن $r = |\vec x|$ است.

با استفاده از تجزیه $e^{-i\vec k'\cdot\vec x'}$ ، $\psi_{\vec k}(\vec x')$ و $f_k(\theta)$ برحسب امواج جزئی و مقایسه دو طرف رابطه ابتدا خواهیم داشت:

$$(\star) \qquad \boxed{f_l = \frac{-2m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} dr\, r^2 \, V(r)\, j_l(\rho)\, R_l(\rho)} \qquad rk \equiv \rho$$

• از طرفی داشتیم:

$$R_l(r) = B_l \left(h_l^{(2)}(\rho) + S_l(E)\, h_l^{(1)}(\rho) \right) \underset{B_l = \frac{1}{2}}{=} \left(j_l(\rho)\cos\delta_l - n_l(\rho)\sin\delta_l \right)$$

(در برخورد الاستیک) $S_l(E) = e^{2i\delta_l}$

• در حد $\delta_l \to 0$ ($\sin\delta_l \to \delta_l$ ، $\cos\delta_l \to 1$) و در نتیجه داریم: (از جمله دوم متناسب با δ_l صرف‌نظر می‌کنیم) $\leftarrow$

$$\boxed{R_\ell(\rho) \underset{\delta_\ell \to 0}{\sim} j_\ell(\rho)}$$

با در نظر گرفتن این رابطه در $(\star)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{f_\ell \simeq -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty dr \, r^2 \, V(r) \, \big(j_\ell(kr)\big)^2}$$

از طرفی داشتیم:

$$f_\ell = \frac{e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell}{k} \longrightarrow \frac{\delta_\ell}{k} = f_\ell \rightarrow \delta_\ell = k f_\ell$$

به این ترتیب δ_ℓ اختلاف فاز جزئی $\longleftarrow$

$$\boxed{\delta_\ell \simeq -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty dr \, r^2 \, V(r) \, \big(j_\ell(kr)\big)^2}$$

اولین تقریب Born

$$(*) \quad \psi_{\vec{k}}(\vec{x}) \simeq e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec{k}}(\theta,\varphi)$$

$$f_{\vec{k}}(\theta,\varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \; e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \, V(\vec{x}') \, \psi_{\vec{k}}(\vec{x}')$$

$$\cong \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \; e^{-i\vec{k}'\cdot x'} \, V(\vec{x}) \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}'}$$

$$= \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\int d^3x' \; e^{i\vec{x}'(\vec{k}-\vec{k}')} V(\vec{x}') = \boxed{\frac{-m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}')}$$

دامنه پراکندگی متناسب است با تبدیل فوریه پتانسیل پراکندگی

مثال: پتانسیل یوکاوا Yukawa

$$V(r) = a\frac{e^{-\mu r}}{r} \xrightarrow[\text{میتوان نشان داد}]{} \tilde{V}(\vec{p}) = \frac{4\pi a}{\vec{p}^2+\mu^2}$$

$$\rightarrow \tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}') = \frac{4\pi a}{(\vec{k}-\vec{k}')^2+\mu^2}$$

$$(\vec{k}-\vec{k}')^2 = \vec{k}^2 + \vec{k}'^2 - 2kk'\cos\theta \qquad \theta = \measuredangle(\vec{k},\vec{k}')$$

$$\underset{k=k'}{=} 2k^2 - 2k^2\cos\theta = 2k^2(1-\cos\theta) \qquad \vec{k}' = k\hat{e}_r = k\frac{\vec{x}}{r}$$

$$= 4k^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \longrightarrow k' = |\vec{k}'| = k\frac{r}{r} = k$$

$$= \left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}') = \frac{4\pi a}{4\vec{k}^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\mu^2}$$

$$\rightarrow f_k(\theta,\varphi) = \frac{-m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{4\pi a}{4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}+\mu^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\theta,\varphi)|^2 = \frac{a^2}{\left(4\frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\hbar^2\mu^2}{2m}\right)^2} \quad ; \quad E_k = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}$$

$$\mu\to 0 \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16\,E_k^2\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Rutherford scattering. for $V(r) = \frac{a}{r}$

طول پراکندگی — Scattering length

$$q^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

ما قبلاً مسئله پراکندگی برای پتانسیل

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \; ; & 0<r<a \\ 0 \; ; & r \geq a \end{cases}$$

را حل کرده بودیم.

$$(I) \quad R_\ell^{I}(qr) = A j_\ell(qr) \qquad 0<r<a$$

$$(II) \quad R_\ell^{II}(kr) = B j_\ell(kr) + C n_\ell(kr) = B\left(j_\ell(kr) + \frac{C}{B} n_\ell(kr)\right)$$

$$= B\left(j_\ell(kr) - tg\,\delta_\ell\, n_\ell(kr)\right)$$

$$-\frac{C}{B} = tg\,\delta_\ell$$

شرایط مرزی:

$$q \frac{1}{j_\ell(\rho)} j_\ell'(\rho)\Big|_{\rho=qa} = k\left(\frac{j_\ell'(\rho) - tg\delta_\ell\, n_\ell'(\rho)}{j_\ell(\rho) - tg\delta_\ell\, n_\ell(\rho)}\right)_{\rho=ka}$$

$$\longrightarrow tg\,\delta_\ell = \frac{k j_\ell(qa)\, j_\ell'(ka) - q\, j_\ell(ka)\, j_\ell'(qa)}{k\, n_\ell'(ka)\, j_\ell(qa) - q\, j_\ell'(qa)\, n_\ell(ka)}$$

در حد انرژی‌های پایین $(k \to 0)$

$$j_\ell(ka) \sim (ka)^\ell \qquad j_\ell'(ka) \sim (ka)^{\ell-1}$$

$$n_\ell(ka) \sim (ka)^{-\ell-1} \qquad n_\ell'(ka) \sim (ka)^{\ell-2}$$

$$tg\,\delta_\ell \xrightarrow[k\to 0]{} \sim \frac{-q\, j_\ell'(qa)\, j_\ell(ka)}{-q\, j_\ell'(qa)\, n_\ell(ka)} \sim \frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)} \sim \frac{(ka)^\ell}{(ka)^{-\ell-1}}$$

$$\rightsquigarrow \quad tg\,\delta_\ell \underset{k\to 0}{\simeq} (ka)^{2\ell+1}$$

از طرفی دیدیم

$$\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$$

$$\Rightarrow \sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\frac{tg^2\delta_\ell}{1+tg^2\delta_\ell}$$

$tg\,\delta_\ell$ بسیار کوچک است، پس σ_ℓ را می‌شود تقریباً تخمین زده می‌شود با:

$$\sigma_\ell \sim tg^2\delta_\ell$$

$$\Longrightarrow \sigma_\ell \sim (ka)^{4\ell+2} \quad \text{or} \quad \sigma_\ell \sim (k)^{4\ell} \qquad (1)$$

بدین ترتیب σ_ℓ بیشترین سهم خود را از $\ell=0$ می‌گیرد.

(۲) ما می‌توانیم $tg\,\delta_0$ را بدست آوریم.

$$tg\,\delta_0(E) = \frac{k\,tg(qa) - q\,tg\,ka}{q + k\,tg(ka)\,tg(qa)}$$

$$-\frac{tg\,\delta_0}{k} = -\frac{tg\,qa - \frac{q}{k}tg\,ka}{\underbrace{q + k\,tg\,ka\;tg\,qa}_{\text{for } k\to 0 \;\longrightarrow\; 0}} \xrightarrow{k\to 0} -\frac{tg\,qa}{q} + \underbrace{\frac{1}{k}\,tg\,ka}_{\xrightarrow[k\to 0]{} a}$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{k\to 0} -\frac{tg\,\delta_0}{k} = a - \frac{tg\,qa}{q} = a\left(1 - \frac{tg\,qa}{qa}\right) \equiv a_s}$$

طول پراکندگی

$$qa = \frac{a\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \underset{E\to 0}{\sim} a\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} = \zeta$$

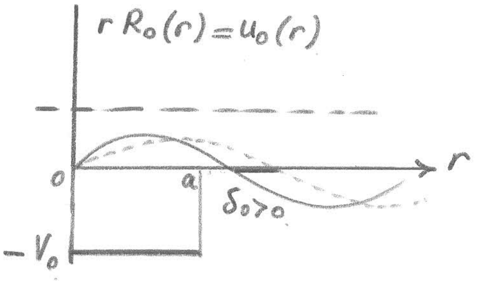
و $a =$ بُرد نیرو (پتانسیل)

$$\Rightarrow \quad a_s = a\left(1 - \frac{tg\,\zeta}{\zeta}\right) \sim a\left(1 - 1 - \frac{\zeta^2}{3} + \cdots\right) \sim -a\frac{\zeta^2}{3}$$

اگر $tg\,\zeta \simeq \zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \cdots$

$$a_s \simeq -a\frac{\zeta^2}{3} = -\frac{a^3}{3}\left(\frac{2mV_0}{\hbar}\right)$$

اگر $V_0 > 0$ باشد (پتانسیل جاذب)، در اینصورت در تقریب اول a_s طول پراکندگی منفی می‌شود و این درست است چون قبلاً دیده بودیم که برای پتانسیل جاذب $\delta_0 > 0$ است، به این ترتیب از روی تعریف $a_s = \lim_{k\to 0} -\frac{tg\,\delta_0}{k}$ می‌توان نتیجه گرفت که a_s منفی است (چون $tg\,\delta_0 > 0$ چون $\delta_0 > 0$)



$V_0 > 0$

تشدید پراکندگی Resonance Scattering

قبلاً شرط مرزی مسئله پراکندگی از پتانسیل $-V_0\theta(a-r)$ را دیدیم

$$\alpha_\ell \equiv q\,\frac{1}{j_\ell(\rho)}\,j_\ell'(\rho)\Big|_{\rho=qa} = k\,\frac{j_\ell'(\rho)-\operatorname{tg}\delta_\ell\,n_\ell'(\rho)}{j_\ell(\rho)-\operatorname{tg}\delta_\ell\,n_\ell(\rho)}\Big|_{\rho=ka}$$

$$\operatorname{tg}\delta_\ell = \frac{\alpha_\ell\,j_\ell(\rho)-k\,j_\ell'(\rho)}{\alpha_\ell\,n_\ell(\rho)-k\,n_\ell'(\rho)}\Big|_{\rho=ka}$$

شرط (۱)

در حد $ka\to 0$

$\rho \ll \ell$

$ka \ll \ell$

پراکندگی با انرژی کم

low-energy scattering

$$j_\ell(\rho)\longrightarrow\frac{\rho^\ell}{(2\ell+1)!!}$$

$$n_\ell(\rho)\longrightarrow\frac{(2\ell+1)!!}{\rho^{\ell+1}}$$

$$n!!\begin{cases} n(n-2)\cdots 5\times 3\times 1 & n>0 \text{ فرد} \\ n(n-2)\cdots 6\times 4\times 2 & n>0 \text{ زوج} \\ 1 & n=-1,0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\delta_\ell \sim \frac{(2\ell+1)}{\left((2\ell+1)!!\right)^2}\,(ka)^{2\ell+1}\,\frac{\ell-a\alpha_\ell}{\ell+1+a\alpha_\ell}$$

حال اگر $\boxed{\ell+1+a\alpha_\ell=0}$ باشد در این صورت $\operatorname{tg}\delta_\ell\to\infty$

$$\operatorname{tg}\delta_\ell\to\infty \qquad \delta_\ell=\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\pi \quad , \quad \sin^2\delta_\ell=1$$

$$\sigma_\ell=\frac{4\pi(2\ell+1)}{k^2}\,\underbrace{\sin^2\delta_\ell}_{\substack{=1\\ \max}} = \frac{4\pi(2\ell+1)}{k^2}$$

بزرگترین مقداری که σ_ℓ می‌تواند داشته باشد.

شرط (۲)

حالا می‌خواهیم فرض کنیم $ka \ll \ell \ll qa$ (پتانسیل ∞ عمیق است)

for $qa\gg\ell$ $\quad j_\ell(qa)\longrightarrow\frac{1}{qa}\sin\left(qa-\frac{\ell\pi}{2}\right)$

$$\alpha_\ell = q\,\frac{1}{j_\ell(\rho)}\,j_\ell'(\rho)\Big|_{\rho=qa} \xrightarrow{qa\to\infty} q\,\frac{-\frac{1}{\rho^2}\sin\left(\rho-\frac{\ell\pi}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho-\frac{\ell\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\rho}\sin\left(\rho-\frac{\ell\pi}{2}\right)}$$

$$=\left[-\frac{q}{\rho}+q\operatorname{cotg}\left(\rho-\frac{\ell\pi}{2}\right)\right]\Big|_{qa=\rho} = -\frac{1}{a}+q\operatorname{cotg}\left(qa-\frac{\ell\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\alpha_\ell \xrightarrow[qa\gg\ell]{} -\frac{1}{a}+q\operatorname{cotg}\left(qa-\frac{\ell\pi}{2}\right)}$$

• حال همین رابطه را در شرط تشدید جایگزین می‌کنیم:

$$l+1+a\alpha_l=0$$

$$(l+1)+a\left(-\frac{1}{a}+q\,\mathrm{cotg}\left(qa-\frac{l\pi}{2}\right)\right)=(l+1)+\left(-1+qa\,\mathrm{cotg}\left(qa-\frac{l\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\quad l+qa\,\mathrm{cotg}\left(qa-\frac{l\pi}{2}\right)=0$$

$$\mathrm{cotg}\left(qa-\frac{l\pi}{2}\right)=-\frac{l}{qa}\xrightarrow[qa\to\infty]{}0$$

در حد $qa \gg l$ $\quad \mathrm{cotg}\left(qa-\frac{l\pi}{2}\right)\approx 0 \Longrightarrow qa-\frac{l\pi}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad n=0,1,\ldots$

این خیلی شبیه شرطی است که قبلاً برای انرژی تشدید بدست آورده بودیم. (E_R = انرژی تشدید را می‌توان از روی این عبارت بدست آورد)

فرمول Breit-Wigner برای پراکندگی تشدیدی

فرض کنید می‌دانیم در چه انرژی تشدید رخ می‌دهد که آن انرژی را با E_R نشان می‌دهیم؛ و $tg\delta_l$ ، σ_l و f_l را حول آن بسط می‌دهیم:

• می‌توان نشان داد که برای $ka \ll l$

$$tg\,\delta_l=-\frac{\gamma(ka)^{2l+1}}{E-E_R}+O\left((ka)^{2l+1}\right)\equiv-\frac{\Gamma_R/2}{E-E_R}+\cdots$$

که در آن $\gamma=\dfrac{-1}{((2l+1)!!)^2\,(a\alpha_l'(E_R))}$ است و $\Gamma_R\equiv 2\gamma(ka)^{2l+1}$ به پهنای تشدید لقب دارد

• با فرض $tg\,\delta_l=-\dfrac{\Gamma_R/2}{E-E_R}$ برای σ_l هم داریم:

$$\sigma_l=\frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\sin^2\delta_l=\frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\,\frac{tg^2\delta_l}{1+tg^2\delta_l}$$

$$\boxed{\sigma_l=\frac{4\pi(2l+1)}{k^2}\left(\frac{\Gamma_R^2/4}{(E-E_R)^2+\Gamma_R^2/4}\right)}$$

توزیع Breit-Wigner برای تشدید در پراکندگی

• از طرفی میتوان نشان داد:

$$f_\ell(k) = \frac{e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell}{k} = \frac{tg\delta_\ell}{k(1-i\,tg\delta_\ell)}$$

$$f_\ell(k) = \frac{-\Gamma_k/2}{k\left(E-E_R+i\Gamma_k/2\right)}$$

دامنه پراکندگی در $E = E_R - i\frac{\Gamma_k}{2}$ قطب دارد.