لطفاً توجه کنید:

این آزمون شامل دو بخش حضوری و غیر حضوری است:

۱. بخش حضوری شامل دو سؤال است. امتیاز این بخش ۲ نمره از ۶ نمره آزمون میان ترم خواهد بود.

۲. بخش غیر حضوری (take home) شامل ۳ سؤال است. زمان تحویل پاسخ این سؤالات **حداکثر ساعت ۲۱ روز پنجشنبه ۱۰ آذر ماه ۱۴۰۱** است. امتیاز این بخش ۴ نمره از ۶ نمره آزمون میان ترم خواهد بود.

بخش غیرحضوری: لطفاً برگه های پاسخنامه آزمون را به شیوه زیر آماده و ارسال کنید:

۱. پاسخهای خود را در صفحات A۴ بنویسید.

۲. جواب‌های خود را به ترتیب سؤالات مرتب نمایید.

۳. نام و نام خانوادگی و شماره دانشجویی خود را در ابتدای برگه پاسخ خود بنویسید.

۴. صفحات را شماره‌گذاری کنید.

۵. فایل پاسخنامه را در قالب یک فایل pdf آماده کنید.
برای کاهش حجم فایل‌های خود می‌توانید به آدرس https://smallpdf.com/compress-pdf یا وبسایت‌های مشابه برای کاهش حجم پی دی اف مراجعه نمایید.

۶. نام فایلی که می‌فرستید شامل اسم و عنوان Midterm باشد. به عنوان نمونه Sohrab_Ahmadi-MT.pdf

۷. پیش از ارسال پاسخ ها از خوانا بودن فایل pdf خود اطمینان حاصل نمایید.

۸. پس از تهیه فایل pdf لطفاً آن را به آدرس زیر ارسال نمایید:

$$qm1.9900.g1@gmail.com$$

۹. **از ارسال هر گونه پاسخنامه به آدرس شخصی اینجانب یا صفحه CW جداً بپرهیزید.**

۱۰. برگه هایی که پس از ساعت اعلام شده پایان بخش غیرحضوری ارسال شوند، تصحیح نخواهند شد.

موفق باشید

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده فیزیک
بخش غیرحضوری آزمون میان ترم درس مکانیک کوانتومی ۳
۷ تا ۱۰ آذر ماه ۱۴۰۱– ۳ سؤال– زمان تحویل برگه ساعت ۲۱:۰۰ روز پنجشنبه ۱۰ آذر ماه ۱۴۰۱

سؤال ۲ (۱۰ نمره): پتانسیل کره سخت

(الف) برای پتانسیل کره سخت

$$V(r) = \begin{cases} +\infty & r < a, \\ 0 & r > a, \end{cases}$$

نشان دهید که تغییر فاز موج s (s-wave) مساوی است با $\delta_0 = -ka$ (۴ نمره).

(ب) طول پراکندگی a_s را برای این پتانسیل محاسبه کنید (۲ نمره).

(ج) نشان دهید که سطح مقطع کل پراکندگی برای این پتانسیل در دو حد $k \to 0$ و $k \gg 1/a$ مساوی است با (۴ نمره)

$$\sigma(k) \quad \to \quad \begin{cases} 4\pi a^2, & k \to 0, \\ 2\pi a^2, & k \gg 1/a. \end{cases}$$

سؤال ۲ (۱۰ نمره): پتانسیل مرکزی و پراکندگی الاستیک

یک دو قطبی الکتریکی متشکل از دو الکترون با بارهای e در نقطه $\boldsymbol{a} = +a\hat{e}_x$ و $-e$ در مکان $-\boldsymbol{a} = -a\hat{e}_x$ که در فاصله $2a$ نسبت به یکدیگر قرار دارند را مطابق شکل در نظر بگیرید. در اینجا $\hat{e}_x$ بردار واحد در جهت x است. ذره ای با بار الکتریکی e و جرم m با عدد موج $\boldsymbol{k} = k\hat{e}_z$، که در آن $\hat{e}_z$ بردار واحد در جهت z است، از این دو قطبی پراکنده می شود. به این ترتیب پتانسیل بوجود آمده از این دو قطبی

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}|} + \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|},$$

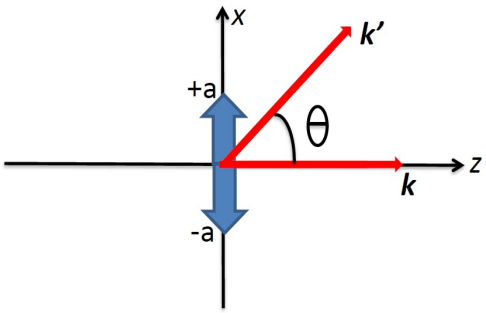
خواهد شد.

در شکل زاویه پراکندگی θ بصورت زاویه بین بردار $\boldsymbol{k}$ و بردار پراکندگی $\boldsymbol{k}'$ نشان داده شده است که در آن $\boldsymbol{k}'$ در صفحه xـz تعریف شده است.

(الف) با استفاده از تقریب اول بورن $f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r})d^3r$ دامنه پراکندگی $f_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}')$ ذره باردار از این دوقطبی را بر حسب θ بدست بیاورید (۶ نمره).

راهنمایی: برای حل انتگرال $I \equiv \int_0^\infty dx \sin(qx)$ می توانید از جایگزینی زیر استفاده کنید:

$$I = \lim_{\alpha\to 0}\int_0^\infty dx e^{-\alpha x}\sin(qx).$$



(ب) نشان دهید که سطح مقطع کل پراکندگی $\sigma_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{k}')$ در زاویه

$\theta = \arcsin\left(\frac{\pi}{2ak}(2n+1)\right)$ بیشینه می شود (۴ نمره).

دانشگاه صنعتی شریف ـ دانشکده فیزیک
بخش غیرحضوری آزمون میان ترم درس مکانیک کوانتومی ۳
۷ تا ۱۰ آذر ماه ۱۴۰۱– ۳ سؤال– زمان تحویل برگه ساعت ۲۱:۰۰ روز پنجشنبه ۱۰ آذر ماه ۱۴۰۱

سؤال ۳ (۴ نمره): پراکندگی الکترونها

در یک آزمایش پراکندگی یک الکترون با جرم m و تکانه $\boldsymbol{k}$ با زاویه θ در یک پتانسیل مرکزی وابسته به اسپین

$$V(\boldsymbol{r}) = e^{-\mu r^2}(A + B\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r})$$

پراکنده می شود. در این پتانسیل $\mu > 0$، $(A$ ،$B)$ پارامترهای حقیقی ثابت و $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ماتریسهای پاؤلی می باشند. اگر الکترون فرودی ویژه حالت ماتریس σ_x به ازای ویژه مقدار $+1$ باشد،

(الف) مقدار $f_\uparrow$ و $f_\downarrow$ در $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = \begin{pmatrix} f_\uparrow \\ f_\downarrow \end{pmatrix}$ را با استفاده از رابطه کلی

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' V(\boldsymbol{r'}) e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r'})$$

در تقریب اول بورن بدست آورید. برای محاسبه در دستگاه مختصات کروی می توانید از انتگرالهایی که در انتهای سؤال آمده است استفاده کنید (۲ نمره).

(ب) نشان دهید که

$$\frac{d\sigma_\uparrow}{d\Omega} + \frac{d\sigma_\downarrow}{d\Omega} = \frac{m^2\pi}{4\hbar^4\mu^3} e^{-k^2(1-\cos\theta)/2\mu}\left(A^2 + \frac{B^2k^2(1-\cos\theta)}{2\mu^2}\right),$$

که در آن $\frac{d\sigma_i}{d\Omega}, i = \uparrow,\downarrow$ سطح مقطع پراکندگی برخورد الاستیک در جهات اسپین بالا و پایین الکترون است (۲ نمره).

راهنمایی: برای انتگرالگیری از روابط زیر استفاده کنید:

$$\int_{-1}^{+1} dz e^{-iaz} = 2j_0(a), \qquad \int_{-1}^{+1} dz z e^{-iaz} = -2ij_1(a),$$

$$\int_0^\infty r\sin(qr)e^{-\mu r^2}dr = \frac{e^{-q^2/4\mu}\sqrt{\pi}q}{4\mu^{3/2}}, \qquad \int_0^\infty r^2\cos(qr)e^{-\mu r^2}dr = -\frac{e^{-q^2/4\mu}\sqrt{\pi}(q^2-2\mu)}{8\mu^{5/2}},$$

که در آن $j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$ و $j_1(z) = -\frac{d}{dz}j_0(z)$ توابع بسل کروی هستند.