QM-2-L -14041204

Monday, February 16, 2026 12:46 PM

معادله شرودینگر ذره باردار در حضور میدان الکترومغناطیس :

a) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - q\varphi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}$

یادآوری :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad m\ddot{\vec{x}} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) = \vec{F}_L$$

b) $H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{P}_i$$

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \dot{x}_i = \frac{1}{m}\left(P_i - \frac{q}{c}A_i\right)$$

تعریف ← تکانه جنبشی $\boxed{m\dot{\vec{x}} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}}$

در مکانیک کوانتومی :

عملگر تکانه $\vec{P} \longleftrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ $\qquad \vec{A}(\vec{x},t) \longleftrightarrow \vec{A}(\vec{x},t)$

عملگر مکان $\vec{x} \longleftrightarrow \vec{x}$ $\qquad \varphi(\vec{x},t) \longleftrightarrow \varphi(\vec{x},t)$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi\right)\psi(\vec{x},t)}$$

معادله شرودینگر در حضور میدان الکترومغناطیس

روابط جابجایی $\qquad$ تکانه کانونیک $P_i$

$$[x_i, P_j] = i\hbar\,\delta_{ij}$$

$$[x_i, m\dot{x}_j] = [x_i, P_j - \frac{q}{c}A_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad m\dot{x}_i = P_i - \frac{q}{c}A_i$$

$$[x_i, x_j] = 0 = [P_i, P_j]$$

$$[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = [P_i - \frac{q}{c}A_i, P_j - \frac{q}{c}A_j] = \cancel{[P_i, P_j]} - \frac{q}{c}\underbrace{[A_i, P_j]}_{(a)} - \frac{q}{c}\underbrace{[P_i, A_j]}_{(b)} + \frac{q^2}{c^2}\cancel{[A_i, A_j]}$$

(a) $$[A_i, P_j]f = -i\hbar[A_i, \partial_j]f(\vec{x},t)$$
$$= -i\hbar\left(A_i\partial_j f - \partial_j(A_i f)\right) = -i\hbar\left(\cancel{A_i\partial_j f} - (\partial_j A_i)f - \cancel{A_i\partial_j f}\right)$$
$$= +i\hbar\,\partial_j A_i\, f$$

$$\longrightarrow \boxed{[A_i, P_j] = i\hbar\,\partial_j A_i = -\frac{\hbar}{i}\partial_j A_i}$$

$$\longrightarrow \boxed{[A_i, p_j] = i\hbar\, \partial_j A_i = \frac{-\hbar}{i}\, \partial_j A_i}$$

(b) $$[p_i, A_j] f = -i\hbar\, [\partial_i, A_j] f$$
$$= -i\hbar\, \left(\partial_i (A_j f) - A_j \partial_i f\right) = -i\hbar \left((\partial_i A_j) f + \cancel{A_j \partial_i f} - \cancel{A_j \partial_i f}\right)$$
$$= -i\hbar\, (\partial_i A_j)\, f$$

$$\boxed{[p_i, A_j] = \frac{\hbar}{i}\, \partial_i A_j}$$

نتیجه

$$[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = -\frac{q}{c} \left( [A_i, p_j] + [p_i, A_j] \right)$$
$$= -\frac{q}{c} \left(\frac{-\hbar}{i}\right) (\partial_j A_i - \partial_i A_j) = -\frac{q}{c} \frac{\hbar}{i} F_{ij}$$
$$= i\hbar \frac{q}{c} F_{ij} = i\hbar \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} B_k$$

$$\boxed{[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = i\hbar \frac{q}{c} \epsilon_{ijk} B_k}$$

---

ناوردایی پیمانه‌ای معادله شرودینگر :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left( \frac{1}{2m} \left( \vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \lambda(\vec{x}, t)$$
$$\varphi'(\vec{x}, t) = \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(\vec{x}, t)$$

اگر درخواست کنیم که معادله شرودینگر تحت تبدیلات پیمانه‌ای فوق ناوردا باشد، در آن صورت تابع موج باید به صورت زیر تغییر کند :

$$\boxed{\psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left( \frac{ie}{\hbar c} \lambda(\vec{x}, t) \right) \psi(\vec{x}, t)}$$

نکته: با وجود اینکه تغییر $\psi$ به صورت یک فاز است و چگالی احتمال در نتیجه این فاز تغییر نمی‌کند ولی وجود فاز می‌تواند اثر آزمایشگاهی دارد

Aharonov – Bohm effect

$\longrightarrow$ تمرین سری ۱ و گزارش طلایی

---

معادله ویژه مقداری انرژی

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \left( \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\varphi \right) \psi(\vec{x}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi\right)\psi(\vec{x},t)$$

اگر φ، $\vec{A}$ به صورت صریح به زمان بستگی نداشته باشد، همیلتونی به زمان وابسته نیست:

$$\psi(\vec{x},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\,\psi(\vec{x})$$

معادله ویژه مقداری :

$$\boxed{\left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi\right)\psi(\vec{x}) = E\,\psi(\vec{x})}$$

فرض : پیمانه کولنی $\varphi = 0 \;,\; \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

در پیمانه کولنی

$$\frac{1}{2m}\Big(-\hbar^2\vec{\nabla}^2 - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}_{=0\ \text{صفر}} - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\nabla} - \frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\nabla} + \frac{q^2}{c^2}\vec{A}^2\Big)\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi - \frac{q}{mc}\frac{\hbar}{i}\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi}_{(1)} + \frac{q^2}{2mc^2}\underbrace{\vec{A}^2\psi}_{(2)} = E\psi(\vec{x})}$$

میدان مغناطیسی یکنواخت

در ادامه جملات (۱) و (۲) را جداگانه بررسی می‌کنیم

فرض : انتخاب ساده‌ترین پیمانه برای اینکه میدان مغناطیسی در جهت z باشد

$\vec{B} = B\hat{e}_z = (0,0,B)$

پیمانه متقارن

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B} \Rightarrow -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,x_j B_k = A_i$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}\epsilon_{123}\,x_2 B_3 = -\frac{1}{2}yB$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}\epsilon_{213}\,x_1 B_3 = +\frac{1}{2}xB$$

$$\boxed{\vec{A} = -\frac{1}{2}B\,(y,-x,0)}$$

(۱) جمله اول (1) $\quad -\dfrac{q}{mc}\dfrac{\hbar}{i}\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi = -\dfrac{q}{mc}\vec{A}\cdot\vec{P}\psi = \dfrac{q}{2mc}(\vec{x}\times\vec{B})\cdot\vec{P}\psi$

$$= \frac{q}{2mc}\epsilon_{ijk}\,x_i B_j P_k\psi = -\frac{q}{2mc}\epsilon_{ikj}\,x_i P_k B_j\psi$$

$$= -\frac{q}{2mc}(\vec{x}\times\vec{P})\cdot\vec{B}\psi = -\frac{q}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B}\psi$$

به این ترتیب جمله اول (۱) $\quad = -\dfrac{q\hbar}{2mc}\dfrac{\vec{L}}{\hbar}\cdot\vec{B}\psi \qquad$ الکترون $\quad q=-e,\; m=m_e$

تعریف $\quad \dfrac{e\hbar}{2m_e c} \equiv \mu_B \quad$ Bohr Magneton

$$\vec{\mu} = \mu_B\frac{\vec{L}}{\hbar} \qquad \text{Magnetic Moment}$$

جمله پارامغناطیسی

جمله اول (1) $= \vec{\mu}_B\cdot\vec{B}\,\psi$

اگر میدان مغناطیسی در جهت z باشد

$\vec{\mu}_B\cdot\vec{B} = \mu_B\dfrac{L_z}{\hbar}B \;;\; \mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e c}$

جمله پارامغناطیسی

اگر میدان مغناطیسی در جهت $z$ باشد

$$\boxed{\vec{\mu}_B \cdot \vec{B} = \mu_B \frac{L_z}{\hbar} B \;;\; \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}}$$

(2) جمله دوم $\qquad \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2\psi = \frac{q^2}{8mc^2}\vec{B}^2\rho^2$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} B\,(y,-x,0) \;\rightarrow\; \vec{A}^2 = \frac{1}{4}B^2\underbrace{(x^2+y^2)}_{\rho^2}$$

$\vec{x}$ در دستگاه استوانه‌ای $= (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$

جمله دیامغناطیسی $\qquad \boxed{\text{جمله دوم } (2) = \frac{e^2}{8m_e c^2}\vec{B}^2\rho^2}$

سؤال: نسبت دو جمله، کدام جمله اثر بیشتری دارد؟

نسبت بی‌بعد

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{\frac{\cancel{e^2}}{\cancel{4}\cancel{8}\cancel{m_e c^2}}\vec{B}^2\langle\rho^2\rangle^{a_0^2}}{\frac{\cancel{e}}{\cancel{2m_e c}}\underbrace{\langle\vec{B}\cdot\vec{L}\rangle}_{B\hbar}} = \frac{e^2}{4\hbar c}\frac{B}{e}a_0^2 = \frac{1}{4}\alpha\frac{B}{\frac{e}{a_0^2}} = 1.1\times10^{-10}\,B$$

a) $\langle\rho^2\rangle = a_0^2 \qquad a_0$ Bohr's radius $\qquad a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha}\;;\;\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$

b) $\langle\vec{B}\cdot\vec{L}\rangle = B\langle L_z\rangle = B\hbar m_\ell \sim B\hbar$

بعداً در تئوری اختلال این مقادیر دقیق محاسبه می‌شوند

تخمین

$$L_z\,|nlm_\ell\rangle = \hbar m_\ell\,|nlm_\ell\rangle$$

نتیجه:

$$(2) = (1)\left(1.1\times10^{-10}B\right)$$

i) $B \sim 100T = 10^6 G$ اگر میدان مغناطیسی کوچک باشد (بزرگترین میدان مغناطیسی در آزمایشگاه)

$\rightarrow (2) \cong (1)\,(10^{-4}) \Rightarrow (2) \ll (1) \leftarrow$

ii) $B \sim 10^{15} - 10^{18}\,G$ اگر میدان مغناطیسی بزرگ باشد

$(2) = (1)\left(1.1\times10^{-10}\times10^{15}\right) \sim (1)\,10^5 \Rightarrow (2) \gg (1) \leftarrow$

$$\text{جمله اول} + \text{جمله دوم} = \left(\vec{\mu}_B\cdot\vec{B} + \frac{e^2B^2\rho^2}{8m_e c^2}\right)\psi(\vec{x},t)$$

توضیح: در تئوری اختلال یاد می‌گیریم. $\quad \chi_m > 0$ بخش پارامغناطیسی $\quad \chi_m < 0$ بخش دیامغناطیسی

---

Normal Zeeman Effect $\qquad$ اثر نرمال زیمن ←

$$H = H_0 + H_B$$
$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r}$$

کافی است جمله اول در نظر گرفته شود (جمله خطی در B)

$$H_B = \frac{-q}{2m_e c}BL_z$$

میدان مغناطیسی ضعیف در جهت $z$:

میدان مغناطیسی ضعیف در جهت z :

$$H_B = \frac{-q}{2m_e c} B L_z$$

مطلوب است تغییر طیف انرژی اتم هیدروژن گونه

یادآوری: طیف انرژی اتم هیدروژن

$$E_n = 1Ry\left(\frac{-1}{n^2}\right)$$

$n = 1, 2, \ldots$

$l = 0, 1, \ldots n-1$

$-l \leqslant m_l \leqslant l$

$$1Ry = \frac{1}{2} mc^2\alpha^2 \sim 13.6\,eV$$

$$H_0 \,|n l m_l\rangle = E_n \,|n l m_l\rangle \qquad (1)$$

نکته: $[H_0, L_z] = 0 \rightarrow [H_0, H] = 0 \rightarrow$ هر دو همیلتونی ویژه توابع مشترک دارند

بنابراین معادله ویژه مقداری

$$H\,|n l m_l\rangle = E\,|n l m_l\rangle$$

$$\left(H_0 - \frac{qB}{2m_e c} L_z\right)|n l m_l\rangle = E\,|n l m_l\rangle$$

Use (1) & $L_z\,|n l m_l\rangle = \hbar m_l\,|n l m_l\rangle$

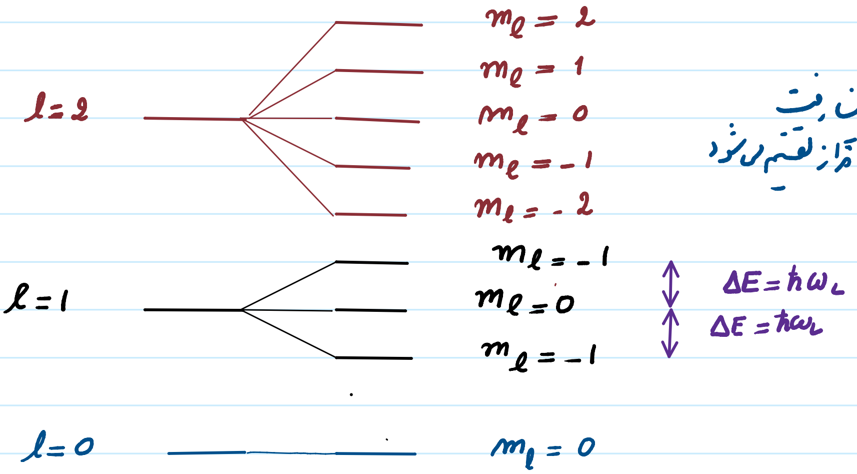
$$\left(E_n - \frac{qB}{2m_e c}\hbar m_l\right)|n l m_l\rangle = E\,|n l m_l\rangle$$

$$\longrightarrow \quad E_{n m_l} = E_n - \frac{qB\hbar}{2m_e c} m_l = E_n + \hbar\omega_L m_l$$

Larmor فرکانس $\omega_L \equiv \dfrac{eB}{2m_e c}$      با فرض $q = -e$

$$\Delta E = E_{n, m_l+1} - E_{n, m_l} = \cancel{E_n} + \hbar\omega_L \cancel{(m_l} + 1) - \cancel{E_n} - \cancel{\hbar\omega_L m_l}$$
$$= \hbar\omega_L$$

$$\Delta E = \hbar\left(\frac{eB}{2m_e c}\right) = 13.6 \times 4 \times 10^{-10}\, B$$




به این ترتیب تبهگنی ترازها از بین رفت
هر تراز انرژی به $2l+1$ تراز تقسیم می‌شود