# مروری بر الکترودینامیک کلاسیک :

## معادلات ماکسول در حالت :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=0$$

معادلات همگن ماکسول

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

معادلات غیرهمگن ماکسول

$$\vec{B}=\vec{B}(\vec{x},t)$$
$$\vec{E}=\vec{E}(\vec{x},t)$$
$$\rho=\rho(\vec{x},t)$$
$$\vec{J}=\vec{J}(\vec{x},t)$$

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\longrightarrow \int\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x=-\int\vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,d^3x=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int\rho\, d^3x}_{Q}=0 \qquad \dot{Q}=0$$

بار پایسته

$$Q\equiv\int\rho(\vec{x},t)\,d^3x$$

معادله حرکت ذره باردار (بار $q=-e$) درحضور میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

$$\vec{F}_L=m\ddot{\vec{x}}=q\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

نیروی لورنتس

سؤال: چگونه می‌توان این معادله را با استفاده از فرمالیسم لاگرانژی بدست آورد؟

تعریف میدان‌های پیمانه‌ای (پتانسیل برداری، پتانسیل اسکالر)

$$\vec{A}(\vec{x},t)\quad,\quad\varphi(\vec{x},t)$$

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \;\curvearrowright\; \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

2) $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}=0 \;\curvearrowright\; \vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$

$$\curvearrowright\; \vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\curvearrowright\; \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

تبدیلات پیمانه‌ای :

$$\vec{A}(\vec{x},t)\longrightarrow\vec{A}'(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x},t)+\vec{\nabla}\lambda(\vec{x},t)$$
$$\varphi(\vec{x},t)\longrightarrow\varphi'(\vec{x},t)=\varphi(\vec{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda(\vec{x},t)$$

تقارن پیمانه‌ای :

$$\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda)=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla}\times\vec{A}' = \vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$$ پیمانه:

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\varphi - \cancel{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}\lambda}\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$$

نتیجه:

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا هستند

local U(1) gauge transformation

معادلات ماکسول تحت تبدیلات پیمانه‌ای ناوردا هستند

با توجه به اینکه این قانون، یک قانون بنیادی طبیعت است. می‌توان پرسید که چگونه می‌توان معادلات شرودینگر

را به گونه‌ای نوشت که تحت این تبدیلات ناوردا باشد؟ (بعداً)

---

انتخاب پیمانه مناسب برای حل معادلات ماکسول:

(a) پیمانه کولنی:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \;\curvearrowright\; \vec{\nabla}\cdot\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho$

$$\curvearrowright\; -\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{=0} = 4\pi\rho \longrightarrow \boxed{\Delta\varphi = -4\pi\rho}$$

(b) پیمانه لورنتس (پیمانه هموردا) (covariant)

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \qquad A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = 0 \rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi$$

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \;\curvearrowright\; \dots \;\curvearrowright\; -\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}} = 4\pi\rho$

$$\boxed{\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = -4\pi\rho}$$ معادله موج (ناهمگن)

2) $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$-\Delta\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$-\Delta \vec{A} + \nabla(\vec{\nabla}\cdot \vec{A}) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$-\left(\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) + \vec{\nabla}\Big(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}}}_{\partial_\mu A^\mu = 0}\Big) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

✓

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}}$$

معادله حرکت ذره باردار در حضور میدان الکتریکی و مغناطیسی در فرمالیسم لاگرانژ

$$L = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

$$U = q\,\varphi(\vec{x},t) - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\cdot\dot{\vec{x}}$$

$\vec{x}$ مکان ذره

$\dot{\vec{x}}$ سرعت ذره

$q$ بار ذره

معادله Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

✓ $$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\,\partial_i \varphi + \frac{q}{c}(\partial_i A_j)\,\dot{x}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i \xrightarrow[\frac{d}{dt}]{} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\frac{d}{dt}A_i$$

$$\frac{d}{dt}A_i(\vec{x},t) = \frac{\partial A_i}{\partial t} + (\partial_j A_i)\,\dot{x}_j$$

✓ $$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c}\dot{x}_j(\partial_j A_i)$$

معادله حرکت

$$-q\,\partial_i\varphi + \frac{q}{c}(\partial_i A_j)\,v_j = m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c}v_j(\partial_j A_i)$$

$$\boxed{m\ddot{x}_i = q\left(-\partial_i\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}v_j\,\underbrace{(\partial_i A_j - \partial_j A_i)}_{F_{ij}}}$$

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} B_k$$

جمله اول

$$q\left(-\partial_i\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) = qE_i$$

جمله دوم

$$\frac{q}{c}v_j F_{ij} = \frac{q}{c}v_j\,\epsilon_{ijk}B_k = \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})_i$$

نتیجه

$$m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})_i$$

لعبت مرادی

نتیجه

$$m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})_i$$

بصورت برداری

$$\boxed{m\ddot{\vec{x}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}(\vec{v}\times\vec{B})}$$

نیروی لورنتس

مکانیک کوانتومی ← فرمالیسم همیلتون

$$i\hbar\,\partial_t\psi(\vec{x},t) = H\psi(\vec{x},t)$$

$$H = T + U$$

فرمالیسم همیلتونی در مکانیک کلاسیک

$$L = L(\vec{x},\dot{\vec{x}},t)$$

$$H = H(\vec{x},\vec{p},t) \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

معادلات حرکت

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i}$$

$$\curvearrowright \quad H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$$

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} = \partial_i V(\vec{x}) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} = \dot{x}_i$$

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m} \curvearrowright \ddot{x}_i = \frac{\dot{p}_i}{m} = \frac{-1}{m}\partial_i V \curvearrowright m\ddot{x}_i = -\partial_i V = F_i$$

معادله نیوتن ( معادله حرکت)

سوال : همیلتونی در حضور میدان الکترومغناطیس

ادعا $\quad H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi$

معادلات حرکت

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i$$

$$2)\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i$$

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{2m}\times 2\times\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\left(-\frac{e}{c}\partial_i A_j\right) + e\,\partial_i\varphi = -\dot{p}_i$$

$$\dot{p}_i = \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\partial_i A_j - e\,\partial_i\varphi$$

$$2)\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{2m}\times 2\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right) = \dot{x}_i \curvearrowright \boxed{v_i = \frac{1}{m}\left(p_i - \frac{e}{c}A_i\right)} \ \star$$

$$a)\ \ddot{x}_i = \frac{1}{m}\left(\dot{p}_i - \frac{e}{c}\frac{d}{dt}A_i\right) = \frac{1}{m}\left(\dot{p}_i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e}{c}v_j\partial_j A_i\right)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j\,\partial_j A_i$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \, \partial_j A_i$$

b) $$\dot{p}_i = \frac{e}{mc}\left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)\partial_i A_j - e\,\partial_i \varphi = \frac{e}{c} v_j \, \partial_i A_j - e\,\partial_i\varphi$$

(b) $\rightsquigarrow$ (a)

$$\ddot{x}_i = \frac{1}{m}\left(\frac{e}{c} v_j \, \partial_i A_j - e\,\partial_i\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e}{c} v_j \, \partial_j A_i\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\frac{e}{c} v_j \underbrace{(\partial_i A_j - \partial_j A_i)}_{F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k} + e\left(-\partial_i\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\frac{e}{c}\epsilon_{ijk} v_j B_k + e E_i\right\}$$

$$\rightarrow \boxed{m\ddot{x}_i = e\left(E_i + \frac{1}{c}(\vec{v}\times\vec{B})_i\right)}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi}$$ : نتیجه