

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف
مکانیک کوانتومی - نیمسال اول ۱۴۰۴-۴۰۵
آزمون میان ترم - ۲۵ آذر ۱۴۰۴ - ۵ سؤال - وقت: ۲:۱۵ ساعت

مسئله ۱: (۵ نمره)

ذره‌ای در چاه پتانسیل یک بعدی نامتناهی

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x > a \end{cases}$$

قرار دارد. تابع موج آن در لحظه $t = 0$ عبارت است از $\psi(x) = Nx$.

(الف) ثابت بهنجارش N را بدست آورید.

(ب) این تابع موج را بر حسب توابع موج چاه پتانسیل فوق بسط دهید و ضرایب بسط را تعیین نمایید.

(ج) تابع موج $\psi(x, t)$ را در زمان دلخواه t بدست آورید.

(د) با چه احتمالی ذره در حالت دوم برانگیخته با انرژی E_2 قرار می گیرد.

مسئله ۲: (۴ نمره)

یک سد پتانسیل $V(x) = V_0\theta(a - |x|)$ با فرض $V_0 > 0$ را در نظر بگیرید. شاری از ذرات با جرم m و انرژی $E > 0$ ضرایب بازتاب (R) و تراگسیل (T) را در کلاس به صورت زیر بدست آوردیم

$$\begin{aligned} R &= e^{-2ika} \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(2\kappa a)}{2i\kappa k \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}, \\ T &= e^{-2ika} \frac{2i\kappa k}{2i\kappa k \cosh(2\kappa a) + (k^2 - \kappa^2) \sinh(2\kappa a)}. \end{aligned} \quad (1)$$

(الف) با نوشتن معادلات ویژه مقداری، تعاریف مناسبی برای k در منطقه ای که پتانسیل صفر است و κ در منطقه ای که پتانسیل غیر صفر است بدست آورید.

(ب) با توجه به روابط بالا و با فرض $\kappa a \gg 1$ چگالی احتمال تونل زنی را به صورت تقریبی تعیین کنید.

مسئله ۳: (۵ نمره)

شاری از ذرات با جرم m و انرژی $E > 0$ را در نظر بگیرید که از چپ به راست به طرف یک پتانسیل $V(x) = V_0\delta(x)$ با $V_0 > 0$ در حال حرکت می باشند.

(الف) دامنه تراگسیل (T)، بازتابش (R) و چگالی احتمال تراگسیل $|T|^2$ را بدست آورید.

(ب) مقدار $|T|^2$ را برای دو حالت $|V_0| \gg \frac{\hbar^2 k}{m}$ و $|V_0| \ll \frac{\hbar^2 k}{m}$ که در آن $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ است را بدست آورید. در مورد تعبیر فیزیکی پاسخ بدست آمده بحث کنید.

مسئله ۴: (۶ نمره)

همیلتونی نوسانگر هماهنگ کوانتومی یک بعدی عبارت است از $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ ، که در آن فرکانس نوسانگر $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ بر حسب ثابت فنر k و جرم m داده شده است. با توجه به تعریف عملگرهای $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ و $\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}x_0}\frac{\hbar}{i}(a - a^\dagger)$ ، می توان همیلتونی را بر حسب عملگر شمارش $\hat{n} = a^\dagger a$ نوشت و مقدار ویژه آن را تعیین کرد.

(الف) با استفاده از رابطه $a|0\rangle = 0$ ویژه حالت عملگر H در حالت پایه نوسانگر در فضای تکانه، یعنی $\psi_0(p) = \langle p|0\rangle$ را بدست آورید و آن را به یک نرم کنید.

راهنمایی: برای این کار باید ابتدا $\langle p|a|0\rangle = 0$ را محاسبه کنید.

(ب) چگونه می توان فقط با استفاده از نتیجه قسمت ب، ویژه حالت عملگر H در حالت پایه نوسانگر در فضای تکانه، یعنی $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ را بدست آورد؟

(ج) با استفاده از تعاریف و نتایج فوق $\psi_1(x) = \langle x|1\rangle$ را بدست آورید (نیازی به تعیین ضریب نرمالیزاسیون نیست).

(د) فرض کنید که ذره در حالت پایه این نوسانگر هماهنگ قرار دارد، ولی ناگهان ثابت فنر k چهار برابر می شود. با چه احتمالی ذره در حالت پایه نوسانگر جدید قرار می گیرد؟

مسئله ۵: (۴ نمره)

یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی یک بعدی را با همیلتونی $H = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ در نظر بگیرید.

(الف) ذره ای در حالت $|\psi\rangle = N(|0\rangle + \lambda|2\rangle)$ ، که در آن N ثابت بهنجارش است، قرار دارد. مقدار چشمداشتی $\langle \hat{x} \rangle$ و $\langle \hat{x}^2 \rangle$ را در این حالت بدست آورید.

(ب) برای $\lambda = 1$ عدم قطعیت Δx چقدر است؟