
دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف
مکانیک کوانتومی ۱ - نیمسال اول ۱۴۰۵-۱۴۰۴
تمرین سری ۴
موعد تحویل: یکشنبه ۱۶ آذرماه ۱۴۰۴
نحوه تحویل: روز یکشنبه ۱۶ آذر ساعت ۹ صبح در ابتدای کلاس درس

نکات مهم:

۱. لطفاً به تمام سوالات به صورت کامل و خوانا پاسخ دهید.
۲. لطفاً نظم و روند پاسخ‌گویی به سوالات را از ابتدا تا پایان پاسخنامه‌های خود حفظ کنید.
۳. لطفاً از تحویل دادن پاسخنامه‌های خود بعد از زمان مقرر خودداری کنید؛ بدیهی است در این صورت نمره‌ای به آنها تعلق نخواهد گرفت.
۴. لطفاً از تحویل دادن پاسخنامه‌های خود به صورت الکترونیکی خودداری کنید.
۵. حتی الامکان پاسخهای خود را در برگه‌های A۴ بنویسید.
۶. لطفاً پاسخنامه‌های خود را به هم منگنه کنید.
۷. لطفاً پاسخهای خود را با خودکار قرمز ننویسید.

مسئله ۱ (۱۰ نمره)

ذره ای را با جرم m در میدان پتانسیل زیر در نظر بگیرید ($V_2 = \text{const}$)،

$$V(x) = V_1(x) + V_2\delta(x - x_0).$$

(الف) با انتگرالگیری از معادله شرودینگر مستقل از زمان در بازه $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ و در نهایت حدگیری $\epsilon \rightarrow 0^+$ مقدار $\psi'(x_0^+) - \psi'(x_0^-)$ را بدست آورید.

(ب) فرض کنید $V_1 = V_2\theta(\frac{x_0}{2} - |x|)$ و $V_2 = -|V_2| < 0$ و $E < 0$ که در آن $|E| < |V_2|$ و $x_0 > 0$ است. مقادیر ویژه انرژی معادله شرودینگر مستقل از زمان را به صورت نموداری (کیفی) بدست آورید.

مسئله ۲ (۱۰ نمره)

شاری از ذرات با جرم m و انرژی $E > 0$ را در نظر بگیرید که از چپ به راست به طرف یک پتانسیل $V(x) = V_0\delta(x)$ با $V_0 > 0$ در حال حرکت می باشند.

(الف) دامنه تراگسیل (T)، بازتابش (R) و چگالی احتمال تراگسیل $|T|^2$ را بدست آورید.

(ب) مقدار $|T|^2$ را برای دو حالت $|V_0| \gg \frac{\hbar^2 k}{m}$ و $|V_0| \ll \frac{\hbar^2 k}{m}$ که در آن $k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ است را بدست آورید. در مورد تعبیر فیزیکی پاسخ بدست آمده بحث کنید.

مسئله ۳ (۱۰ نمره):

(الف) پتانسیل دلخواهی را در نظر بگیرید که در محدوده متناهی از محور x تعریف شده است. جوابهای موج تخت معادله شرودینگر در محدوده قبل و بعد از پتانسیل به ترتیب به صورت $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ و $Ce^{ikx} + De^{-ikx}$ داده شده اند. اگر داشته باشیم،

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix},$$

که در آن ماتریس S به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}.$$

ادعا می کنیم که ماتریس S یکانی است. توجه کنید که این ادعا در صورتی درست است که

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1, \quad |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1, \quad S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0.$$

ابتدا درستی این روابط را تحقیق کنید و سپس نشان دهید که S یکانی است.

(ب) نشان دهید که ماتریس پراکندگی مربوط به پتانسیل $V(x) = \frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} \delta(x - b)$ عبارت است از:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2ika}{2ika - \lambda} & \frac{\lambda}{2ika - \lambda} e^{-2ikb} \\ \frac{\lambda}{2ika - \lambda} e^{2ikb} & \frac{2ika}{2ika - \lambda} \end{pmatrix}$$

(ب-۱) نشان دهید که S ماتریس یکانی است.

(ب-۲) تحت چه شرایطی عناصر ماتریس فوق بینهایت می شوند؟ فرض کنید $\lambda < 0$ و نشان دهید که تحت این شرایط خاص حالت‌های مقید ظاهر می شوند.