

دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۱ - نیمسال اول ۱۴۰۵-۱۴۰۴

تمرین سری ۳

موعد تحویل: یکشنبه ۲ آذرماه ۱۴۰۴

نحوه تحویل: روز یکشنبه ۲ آذر ساعت ۹ صبح در ابتدای کلاس درس

نکات مهم:

۱. لطفاً به تمام سوالات به صورت کامل و خوانا پاسخ دهید.
۲. لطفاً نظم و روند پاسخ‌گویی به سوالات را از ابتدا تا پایان پاسخنامه‌های خود حفظ کنید.
۳. لطفاً از تحویل دادن پاسخنامه‌های خود بعد از زمان مقرر خودداری کنید؛ بدیهی است در این صورت نمره‌ای به آنها تعلق نخواهد گرفت.
۴. لطفاً از تحویل دادن پاسخنامه‌های خود به صورت الکترونیکی خودداری کنید.
۵. حتی الامکان پاسخهای خود را در برگه‌های A۴ بنویسید.
۶. لطفاً پاسخنامه‌های خود را به هم منگنه کنید.
۷. لطفاً پاسخهای خود را با خودکار قرمز ننویسید.

مسئله ۱ (۱۰ نمره)

ذره‌ای در حالت پایه جعبه‌ای است که دیواره‌های آن در $x = \pm a$ قرار دارند. دیواره‌های جعبه ناگهان به $x = \pm b$ (که در آن $b > a$ است) برده می‌شوند. احتمال اینکه ذره در پتانسیل جدید در حالت پایه یافت شود چقدر است؟ احتمال اینکه ذره در اولین حالت برانگیخته باشد چقدر است؟ جواب ساده این مورد توضیح ساده‌ای دارد. این توضیح چیست؟

مسئله ۲ (۱۰ نمره)

(الف) رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \hat{B} \rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \hat{B} \right\rangle + \left\langle \hat{A} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \left\langle [\hat{A}, \hat{H}] \hat{B} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar} \left\langle \hat{A} [\hat{B}, \hat{H}] \right\rangle. \quad (۱)$$

(ب) عملگرهای $\hat{P}$, $\hat{T}_a$, $\hat{D}_\lambda$ و $\hat{F}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} (\hat{P}\psi)(x) &= \psi(-x), & (\hat{T}_a\psi)(x) &= \psi(x-a), \\ (\hat{D}_\lambda\psi)(x) &= \lambda^{3/2}\psi(\lambda x), & (\hat{F}\psi)(\mathbf{k}) &= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\psi}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

که در آن λ یک عدد است.

(ب-۱) برای هر یک از عملگرهای فوق، معکوس عملگر را بدست آورید.

(ب-۲) نشان دهید

$$\hat{F}\hat{P} = \hat{P}\hat{F}, \quad \hat{F}^2 = \hat{P}, \quad \hat{F}\hat{T}_a = \hat{E}_a\hat{F},$$

که در آن $(\hat{P}\tilde{\psi})(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}(-\mathbf{k})$ و $(\hat{E}_a\psi)(x) \equiv e^{-ia\cdot x}\psi(x)$

(ب-۳) استدلال کنید که چرا عملگرهای فوق یکانی (unitary) هستند.
راهنمایی: برای عملگر یکانی U داریم: $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$. به همین ترتیب می توان نشان داد که برای عملگر یکانی رابطه $(U\psi, U\phi) = (\psi, \phi)$ صحیح است.

مسئله ۳ (۱۰ نمره): PT-symmetric quantum mechanics

در مکانیک کوانتومی عملگرهای انعکاس در مکان و زمان به صورت زیر داده شده اند:

$$(\hat{P}\psi)(x, t) = \psi(-x, t), \quad (\hat{T}\psi)(x, t) = \psi^*(x, -t).$$

به این ترتیب عملگر $\hat{J} = \hat{P}\hat{T}$ انعکاس همزمان در مکان و زمان است.

(الف) نشان دهید $\hat{J}^2 = 1$.

(ب) اثبات کنید که اثر عملگر $\hat{J}$ بر هر تابع دلخواه f از دو عملگر مکان $\hat{x}$ و تکانه $\hat{p}$ به صورت زیر است:

$$\hat{J}f(\hat{x})\hat{J}^{-1} = f^*(-\hat{x}), \quad \hat{J}f(\hat{p})\hat{J}^{-1} = f^*(\hat{p}),$$

(ج) نشان دهید که همیلتونی

$$\hat{H}_{(\alpha)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{x}^2(i\hat{x})^\alpha$$

برای $\alpha \in [-1, \infty)$ تحت تبدیل PT ناورد است (یعنی $\hat{H}_{(\alpha)}$ و $\hat{J}$ با هم جابجا می شوند).