
دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی - نیمسال اول

تمرین سری ۱

موعده تحویل: یکشنبه ۴ آبان ۱۴۰۴

نحوه تحویل: روز یکشنبه ۴ آبان ساعت ۹ صبح در ابتدای کلاس درس

مسئله ۱ (۱۰ نمره): تابع توزیع تابش جسم سیاه

تابع توزیع چگالی طیف انرژی تابشی در فرکانس برای یک جسم سیاه به صورت زیر است

$$\rho_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (1)$$

که در آن k_B ثابت بولتزمن است.

(الف) نشان دهید که تابع توزیع چگالی طیف انرژی بر حسب طول موج به صورت زیر خواهد بود

$$\rho_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

(ب) با استفاده از رابطه (۱)، رابطه معادل جابه‌جایی وین در طول موج‌ها را به دست آورید.

(ج) با فرض اینکه خورشید یک جسم سیاه با دمای ۵۸۰۰ کلوین باشد، طول موج و فرکانس بیشینه تابشی خورشید را به دست آورید.

(د) در قسمت قبل طول موج و فرکانس بیشینه تابشی خورشید را به دست آورده‌اید، حال با استفاده از رابطه $\nu = \frac{c}{\lambda}$ طول موج بیشینه را به فرکانس تبدیل کنید. آیا این فرکانس به دست آمده از این طریق با فرکانس بیشینه تابشی برابر است؟ جواب خود به این سوال را به طور کامل تحلیل کنید.

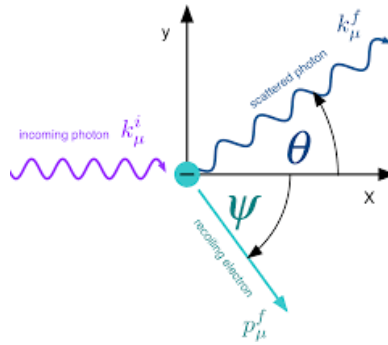
مسئله ۲ (۱۰ نمره): پراکندگی کامپتون

این اثر در سال ۱۹۲۳ توسط کامپتون^۱ برای تایید (نظریه) ذره‌ای نور انجام شد. در این آزمایش پراکندگی پرتوهای X از الکترون‌های آزاد مورد بررسی قرار گرفت. در نتیجه این آزمایش مشاهده شد که طول موج پرتوهای پراکنده شده بیشتر از طول موج پرتوهای فرودی می‌باشند. اختلاف این دو طول موج با زاویه پراکندگی و ویژگی‌های الکترون بستگی دارد.

(آ) آیا می‌توان این اثر را با فیزیک کلاسیک (مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس کلاسیک) توضیح داد؟

(ب) حال با در نظر گرفتن شکل ۱ و با استفاده از معلومات خود از نسبیت خاص و فیزیک کوانتومی، نشان دهید اختلاف

¹Compton



شکل ۱: پراکندگی کامپتون

طول موج پرتو پراکنده شده با طول موج پرتو اولیه فرودی برحسب زاویه θ به شکل زیر می باشد

$$\lambda' - \lambda = \lambda_e^C (1 - \cos(\theta)), \quad (۲)$$

که λ' طول موج پرتو پراکنده شده، λ طول موج پرتو فرودی و $\lambda_e^C = \frac{h}{m_e c}$ که m جرم الکترون و c سرعت نور می باشد، طول موج کامپتون می باشند.

(ج) طول موج کامپتون الکترون را حساب کنید.

(د) آیا می توان اثر کامپتون را با استفاده از نور مرئی مشاهده کرد؟

(ه) بیشینه انرژی جنبشی منتقل شده به الکترون را به دست آورید.

(و) زاویه ای که تحت آن الکترون پس زده می شود را به دست آورید.

(ز) در یک برخورد کامپتون، فوتون فرودی با طول موج 400nm (نور بنفش) از یک الکترون تحت زاویه 180° به سمت عقب پراکنده می شود. انرژی تلف شده فوتون در این برخورد را حساب کرده و با توجه به مقدار به دست آمده توضیح دهید که آیا نور بنفش می تواند الکترون ها را از سطح فلزات با برخورد کامپتون جدا کند یا خیر.

راهنمایی: برای نور که یک ذره بدون جرم می باشد، داریم

$$E = pc = \hbar\omega, \quad (۳)$$

طوری که c سرعت نور، p تکانه نور، $\hbar$ ثابت پلانک و ω فرکانس نور می باشند که طول موج نور نیز از $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ که λ طول موج نور می باشد، بدست می آید. بدین ترتیب، نور می بایست از ذراتی که فوتون نام دارند تشکیل شده است که انرژی و تکانه معینی حمل می کنند.

مسئله ۳ (۵ نمره): اثر کامپتون معکوس

همانطور که می دانید، در اثر کامپتون برای به دست آوردن رابطه ای بین طول موج فوتون قبل و بعد از برخورد یعنی رابطه ای

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (۴)$$

فرض کردیم که الکترون ثابت است. حال در این سوال می خواهیم با مواردی روبرو شویم که ذره ی پراکنده کننده، ساکن نیست.

(الف) در آزمایش کامپتون فرض کنید که سرعت اولیه الکترون پیش از برخورد برابر v است؛ همچنین فرض کنید سرعت اولیه الکترون با سرعت اولیه فوتون در یک راستا باشد. طول موج فوتون پراکنده شده و طول موج فوتون اولیه چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند؟

(ب) وقتی که یک ذره باردار، بخشی از انرژی خود را به فوتون منتقل می‌کند با پدیده اثر کامپتون معکوس مواجهیم. فرض کنید یک فوتون نور مرئی توسط پراکندگی از یک پروتون پراانرژی، انرژی می‌گیرد. اگر پروتون اندازه حرکتی برابر $10^{10} \text{ eV}/c$ داشته باشد، بیشینه انرژی نهایی یک فوتون در ابتدا زرد رنگ گسیل شده توسط یک اتم سدیم ($\lambda_0 = 2.1 \text{ nm}$) چقدر است؟