دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۱ ـ نیم سال اول ۴۰۵-۱۴۰۴

آزمون پایان ترم ـ وقت: ۲.۵ ساعت

موعد تحویل: تا قبل از ساعت ۱۲:۰۰ روز جمعه ۱۷ بهمن ۱۴۰۴

لطفاً به نحوه تهیه و ارسال فایل pdf توجه نمایید

برای تهیه و تحویل برگه های آزمون لطفا به نکات زیر توجه کنید:

۱. آزمون رأس ساعت اعلام شده در برنامه آزمونهای پایان ترم شروع می شود.

۲. همه دانشجویانی که مایل به شرکت در آزمون پایان ترم هستند موظفند در کلاس مجازی درس در همین ساعت حضور داشته باشند و در حضور و غیاب مجازی شرکت نمایند.

۳. لطفاً به محض باز نمودن فایل سؤالات، حضور خود را در کلاس در chatbox اعلام نمایید. از زمان اعلام حضور در کلاس ۲.۵ ساعت وقت برای پاسخ به سؤالات خواهید داشت.

۴. لطفاً برگه های آزمون را به شیوه زیر آماده کنید:

- پاسخهای خود را در صفحات A۴ بنویسید.
  لطفاً فرمت داده شده در سایت درس را رعایت نمایید (صفحه دوم این برگه).
- لطفاً جواب‌های خود را به ترتیب سؤالات مرتب نمایید.
- حتما نام و نام خانوادگی، شماره دانشجویی و شماره ردیف خود را در ابتدای پاسخنامه بنویسید.
- صفحات را شماره‌گذاری کنید.
- در انتهای آزمون برگه پاسخنامه را در قالب یک فایل pdf آماده کنید. برای کاهش حجم فایل‌های پی دی اف خود می‌توانید به آدرس https://smallpdf.com/compress-pdf یا وبسایت‌های مشابه مراجعه نمایید.
- نام فایلی که می‌فرستید شامل اسم و عنوان Final باشد. به عنوان نمونه Sohrab_Ahmadi-Final.pdf

۵. **پیش از ارسال پاسخ ها از خوانا بودن فایل pdf خود اطمینان حاصل نمایید.**

۶. پس از تهیه فایل pdf لطفاً آن را به یکی از دو آدرس زیر ارسال نمایید:

- دانشجویانی که در گروه ۱ تمرین (یکشنبه ها) شرکت می کردند به آدرس $qm1.9900.g1@gmail.com$
- دانشجویانی که در گروه ۲ تمرین (دوشنبه ها) شرکت می کردند به آدرس $qm1.9900.g2@gmail.com$

۷. **از ارسال هر گونه پاسخنامه به آدرس شخصی اینجانب یا صفحه CW جداً بپرهیزید.**

۸. بدیهی است که فقط برگه های دانشجویانی که در ابتدای ساعت در کلاس حضور داشته اند، تصحیح خواهند شد.

۹. برگه هایی که پس از ساعت اعلام شده برای پایان آزمون به یکی از دو آدرس فوق ارسال شده اند، تصحیح نخواهند شد.

دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۱ ـ نیمسال اول ۴۰۵ـ۱۴۰۴

آزمون پایان ترم ـ ۱۷ بهمن ۱۴۰۴ ـ ۴ سؤال ـ وقت: ۲.۵ ساعت

موعد تحویل: تا قبل از ساعت ۱۲:۰۰ روز جمعه ۱۷ بهمن ۱۴۰۴

لطفاً به نحوه تهیه و ارسال فایل pdf توجه نمایید

مسئله اول: (۵ نمره)

ذره ای در حالت پایه پتانسیل یک بعدی بینهایت بلندی است که دیواره های آن در $x=0$ و $x=a$ قرار دارند. یکی از دیواره های جعبه ناگهان به $x=2a$ برده می شود، در حالیکه دیگری در همان $x=0$ نگه داشته می شود.

(الف) احتمال اینکه ذره در پتانسیل جدید کماکان در حالت پایه باشد چقدر است؟

(ب) احتمال اینکه ذره در پتانسیل جدید در اولین حالت برانگیخته باشد چقدر است؟

(ج) احتمال اینکه انرژی ذره در نتیجه این تغییر ناگهانی تغییر نکند چقدر است؟

مسئله دوم: (۵ نمره)

معادله ویژه مقداری $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ را در نظر بگیرید که در آن a عملگر کاهنده نوسانگر هماهنگ ساده است.

(الف) با استفاده از قضیه بسط $|\alpha\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ بر حسب ویژه حالتهای $|n\rangle$ نوسانگر هماهنگ است، نشان دهید $\langle n|a|\alpha\rangle = C_0 \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}}$ که در آن $C_0 = \langle 0|\alpha\rangle$ است.

(ب) با استفاده از رابطه بالا برای $\langle n|a|\alpha\rangle$ مقدار $|\alpha\rangle$ را بدست آورید.

(ج) با استفاده از فرض $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ مقدار C_0 را بدست آورید.

(د) با فرض $|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle$ که در آن ω فرکانس نوسانگر هماهنگ ساده است و

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

نشان دهید $\langle \alpha, t|\hat{x}|\alpha, t\rangle = \sqrt{2}x_0|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$، که در آن δ از رابطه $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$ بدست میاید.

یادآوری: $\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a + a^\dagger\right)$ و $\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}x_0}\frac{\hbar}{i}\left(a - a^\dagger\right)$.

مسئله سوم (۵ نمره)

ذره ای را در حالت پایه اتم هیدروژن $\psi(\boldsymbol{r}) = R_{10}(r)Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{2}{a_0^{3/2}\sqrt{4\pi}} e^{-r/a_0}$ در نظر بگیرید (a_0 شعاع اتم بوهر است)،

(الف) مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$\langle x\rangle, \qquad \langle r\rangle, \qquad \langle x^2\rangle, \qquad \langle r^2\rangle.$$

یادآوری: $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ در دستگاه مختصات کروی عبارت است از: $\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

(ب) با استفاده از این نتایج Δx و Δr را محاسبه کنید.

(ج) احتمال یافتن الکترون بر روی یک کره با شعاع Δr را تخمین بزنید.

دانشکده فیزیک ـ دانشگاه صنعتی شریف

مکانیک کوانتومی ۱ ـ نیمسال اول ۴۰۵ـ۱۴۰۴

آزمون پایان ترم ـ ۱۷ بهمن ۱۴۰۴ ـ ۴ سؤال ـ وقت: ۲.۵ ساعت

موعد تحویل: تا قبل از ساعت ۱۲:۰۰ روز جمعه ۱۷ بهمن ۱۴۰۴

لطفاً به نحوه تهیه و ارسال فایل pdf توجه نمایید

مسئله چهارم (۵ نمره)

عملگر یکانی (unitary) $U_{\delta\varphi} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}\right)$ را در نظر بگیرید. در اینجا $\delta\boldsymbol{\varphi} = \delta\varphi\boldsymbol{n}$ و $\boldsymbol{L}$ عملگر تکانه زاویه ای و مولد دوران کوچک به اندازه زاویه $\delta\varphi$ حول محور $\boldsymbol{n}$.

(الف) نشان دهید که اثر $U_{\delta\varphi}$ بر عملگر دلخواه A عبارت است از: $A' = U_{\delta\varphi}AU_{\delta\varphi}^{\dagger}$.

(ب) با استفاده از این رابطه نشان دهید:

(ب ـ ۱) برای همیلتونی H با تقارن دورانی داریم: $[L_i, H] = 0$.

(ب ـ ۲) اگر $\boldsymbol{v}$ یک عملگر برداری دلخواه (مانند $\boldsymbol{x}$ یا $\boldsymbol{p}$) باشد، نشان دهید که $[L_i, v_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}v_k$.

(ج) ضریب بهنجارش $C_{\pm}$ را در رابطه

$$L_{\pm}|\ell, m\rangle = C_{\pm}|\ell, m \pm 1\rangle$$

که در آن $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ است، بدست آورید.

انتگرالهای مفید

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x^k e^{-\gamma x}dx &= \frac{k!}{\gamma^{k+1}}, \quad \mathrm{Re}\gamma > 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \\
\int_0^{\pi} \sin^{2k+1} x dx &= \frac{2^{k+1}k!}{(2k+1)!!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \\
\int_0^{b} x^2 e^{-\alpha x}dx &= \frac{2}{\alpha^3}\left(1 - e^{-\alpha b}\right) - \frac{2be^{-\alpha b}}{\alpha^2} - \frac{b^2 e^{-\alpha b}}{\alpha}.
\end{aligned}$$