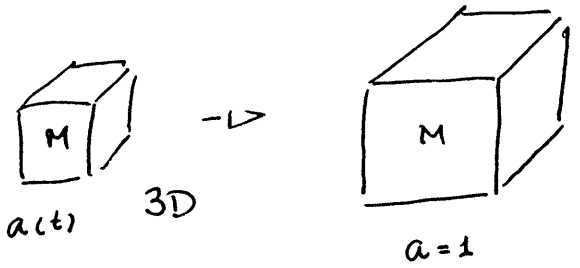
معادله اول فریدمن $H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$ در مکانیک نیوتنی $K\alpha - \bar{E}$ ↓ انرژی سیستم

معادله پیوستگی $\rho = \rho(a)$



پایستگی جرم: $\rho = \frac{M}{V} \rightarrow \frac{\rho(a=1)}{\rho(a)} = \frac{V(a)}{V(a=1)}$

a) $X > 100\ Mpc$ ، کیهان همگن $\rightarrow \frac{\rho(a)}{\rho(a=1)} = \frac{X^3}{(Xa)^3} = \frac{1}{a^3}$

Comoving distance

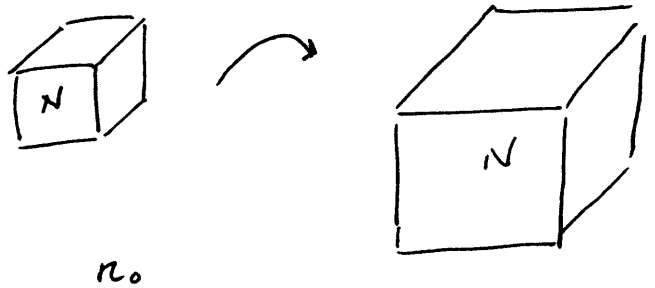
Matter - era $\rho(a) = \rho_0 a^{-3}$

b) سیال نسبیتی (Relativistic fluid) مانند تابش پس‌زمینه کیهان

$E = KT \sim m_0 c^2$ ↓ جرم سکون ، $E \alpha \frac{1}{a}$ ↓ انرژی سیال

در اثر انبساط عالم ابتدا به دلیل افزایش حجم، چگالی به صورت a^{-3} کم می‌شود. همچنین ذره نیز بخشی از انرژی خود را از دست می‌دهد (برای ذره نسبیتی) و به تبع آن جرم ذرات کاهش می‌یابد.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{V}{c})^2}}$$



پایستگی تعداد ذرات

$$N = N$$

$$na^3 = n_0 1^3 \rightarrow n = \frac{n_0}{a^3}$$

2)

$$n = \frac{n_0}{a^3} \cdot \frac{m_0}{m_0} = \frac{\rho_0}{a^3} \cdot \frac{1}{m_0} = \rho_0 a^{-3} \frac{1}{ma}$$

m_0: جرم ذره در زمان حال

m: جرم ذره

- ستاره نوترونی - CMB

$$\rho = \rho_0 a^{-4} \quad \boxed{\rho = \rho_0 a^{-4}}$$

راه‌حل دوم:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

(نسبیت) ← (مکانیک نیوتنی) ← (پایستگی جرم و انرژی)

(پایستگی جرم)

در مکانیک نیوتنی: (به معنی وجود چشمه یا چاه یک)

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}) \neq 0$$

ولی در مکانیک نسبیتی اگر چشمه وجود داشته باشیم باعث تغییر جگالی می‌شود.

معادله پیوستگی

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$$

نسبیت

سیال غیر نسبیتی $P = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \rightarrow \rho \propto a^{-3}$

سیال نسبیتی بودن

$$\epsilon = \frac{P/c^2}{\rho} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{P}{\rho}\right) = \left(\frac{V_s}{c}\right)^2$$

V_s: سرعت صوت $\propto \sigma$ (σ انرژی جنبشی ذرات) $\propto T$

1- داخل کهکشان: $V \sim 200\ Km/s \rightarrow \frac{P/c^2}{\rho} \sim 10^{-6}$ نیوتنی

2- داخل ستاره: $T = 10^7\ Kelvin = 1\ KeV$

$m_{proton} \approx 1\ GeV$.

$$\frac{E_{Thermal}}{E_0} = \frac{T}{m} = \frac{1\ KeV = 10^{-6}}{1\ GeV}$$

3, $p_r = \frac{1}{3}\rho \quad , \quad c=1$ برای سیال فوتونی

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{1}{3}\rho\right) = 0 \rightarrow \dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \rightarrow \rho \propto a^{-4}$$

$$\text{I} \begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho & \simeq \text{معادله انرژی در مکانیک نیوتنی} \\ \text{II} \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 & \equiv \text{پیوستگی} \end{cases}$$

مشتق ↓

$\Delta =$ معادله نیرو در مکانیک نیوتنی :

$$2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\left(\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2}\right) - \frac{2K}{a^3}\dot{a} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}$$

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2$$ می‌توان a^2 را در رابطه (I) ضرب کرد

$$2\ddot{a}\dot{a} = \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho}a^2 + 2\dot{a}a\rho\right)$$ پس مشتق گرفت

$$a\frac{\ddot{a}}{a^2} = \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{a^2}{a^2}\left(-3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\rho\right)$$ ρ را از معادله II جایگذاری کنیم

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

↓

انرژی نسبیتی - این بدان معنی است که نیروی گرانشی دارای از بین مشتق ذرات تشکیل دهنده جسم افزایش می یابد.

4,

مواد تشکیل دهنده کیهان (مولفه‌های)	
30٪	1) ماده (سیال غیرنسبتی) $\rho \propto a^{-3}$
10^{-5}	2) تابش (سیال نسبتی) $\rho \propto a^{-4}$
70٪	3) ثابت کیهانشناسی ← می‌توان از آن تحت سیال با خواص ترمودینامیکی ویژه‌ای کرد

↑ سهم مولفه

$\rho =$ ثابت

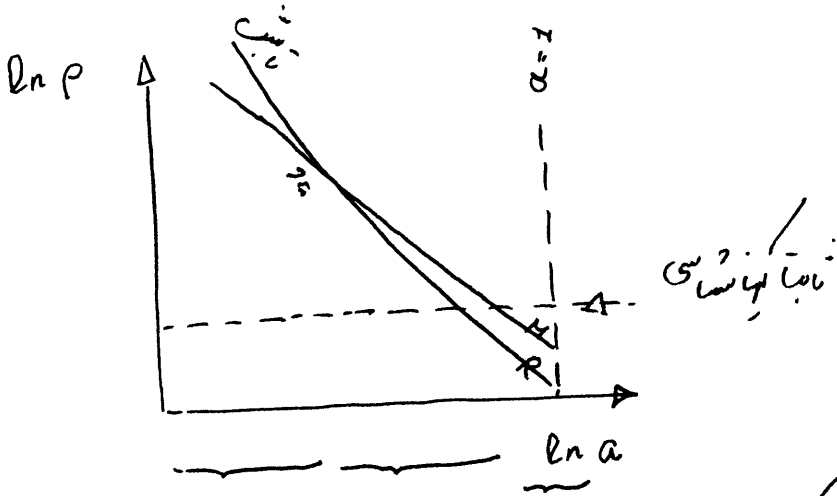
↙ در نسبیت عام یک جمله هندسی است.

نسبیت عام

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\Lambda g_{\mu\nu}$$

↓ جمله هندسی ⟶ تبدیل $\rho = -P$ ↓ سیال با ویژگی

$$P = -\rho \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + (-\rho)) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = \text{constant}$$



$$\rho = \rho_M + \rho_R + \rho_\Lambda = \rho_M^{\circ} a^{-3} + \rho_R^{\circ} a^{-4} + \rho_\Lambda$$

↓ حجم کل عالم

$$= \rho_{M\,(lumi)}^{(0)} a^{-3} + \rho_{DM}^{(0)} a^{-3} + \rho_{CMB}^{(0)} a^{-4} + \rho_\nu^{(0)} a^{-4} + \rho_\Lambda$$

برای دورانی که مولفه‌های تشکیل دهنده کیهان هیچ کدام برهم کنشی با هم ندارند.

5,

سئوال : دینامیک کیهان در طول تحول آن چگونه است ؟

کیهان تخت $K = 0$

تابش غالب : Radiation dominated era

a) $\rho \propto a^{-4}$, $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-4}$ $\xrightarrow{\text{حل معادله}}$ $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ $\rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}$

$\begin{cases} t_i \rightarrow 4t_i \\ a_i \rightarrow 2a_i \end{cases}$

b) ماده غالب : Matter dominated era

$\rho \propto a^{-3}$: $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-3}$ $\xrightarrow{\text{حل معادله}}$ $a \propto t^{\frac{2}{3}}$

$\rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}$

$\begin{cases} t_i \rightarrow 2^{3/2} t_i \sim 2.8\, t_i \\ a_i \rightarrow 2a_i \end{cases}$

- تابش انبساط را کند می کند زیرا در اثر انبساط انرژی خود را از دست داده ، انرژی خود را به جای پایین تر نسبت کیهانی می دهند در نتیجه اگر در کیهان موازی در نظر بگیریم که تنها متشکل از ماده و دیگر متشکل از تابش باشد جهان ماده غالب سریعتر منبسط می شود . به بیان دیگر تشعشع و تابش از گرانش دارد ، انبساط را کند می کند . البته از آنجایی که زمان دوران تابش غالب بسیار کمتر از دوران ماده غالب است ، کیهان در دوران تابش غالب کمتر منبسط شده است .

$V_{M-D} > V_{R-D}$: دقت انبساط

دوباره زمانی کیهان

c) ثابت کیهانشناسی غالب : Cosmological constant dominated era

$\rho = \text{const} \rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \rightarrow a \propto e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t}$

دوباره کیهان وارد فاز انبساط تند شونده می شود !

تابش : $a \propto t^{1/2} \rightarrow \dot{a} \propto \frac{1}{2} t^{-1/2} \longrightarrow \ddot{a} = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$

ماده : $a \propto t^{2/3} \rightarrow \dot{a} \propto \frac{2}{3} t^{-1/3} \longrightarrow \ddot{a} = -\frac{2}{9} t^{-4/3}$

} شتاب کند شونده

ثابت کیهانشناسی : $a \propto e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t} \rightarrow \dot{a} \propto \dots e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t} \rightarrow \ddot{a} \propto \dots e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t}$ شتاب تند شونده

انبساط تند شونده می تواند بدلیل رفتار دانه ای گرانش در کیهان رقیق باشد!

■ مدل انفجار بزرگ "Big-Bang Model"

- انبساط عالم
- سنتز هسته ای
- تابش پس زمینه کیهانی

} شواهد عمده مدل انفجار بزرگ

□ در زمان تابش غالب، ماده و تابش باهم کوپل شدند، برهم کنش الکترومغناطیسی بین ماده (یون) و تابش

سیال نسبیتی + ماده باریونی + ماده تاریک

سیال فوتونی ← برهم کنش EM ← پلاسما (به صورت یونیده)

انبساط کیهان → کاهش دما → کاهش انرژی جنبشی → تبدیل پلاسما به ماده معمولی

سیال پلاسما یک محیط کدر برای فوتون ها است و در فاصله کم پراکنده می شوند

طول پویش آزاد فوتون بسیار کم است

(در یک زمان خاص)

پلاسما ⟹ فوتون

کاهش دما ↓

ماده معمولی

کاهش دما: کاهش سطح مقطع پراکندگی ↓

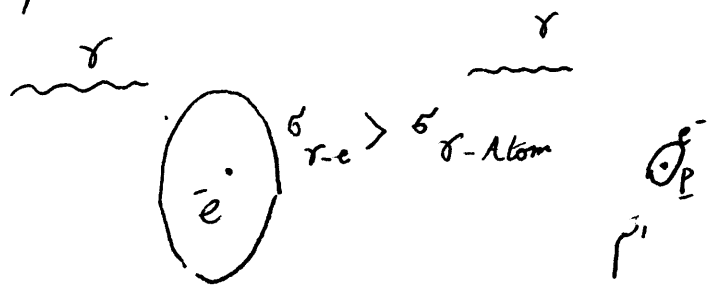
فوتون

در این مرحله طول پویش آزاد فوتون ها بسیار بزرگتر از افق کیهان است

طول پویش آزاد: $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$

چگالی

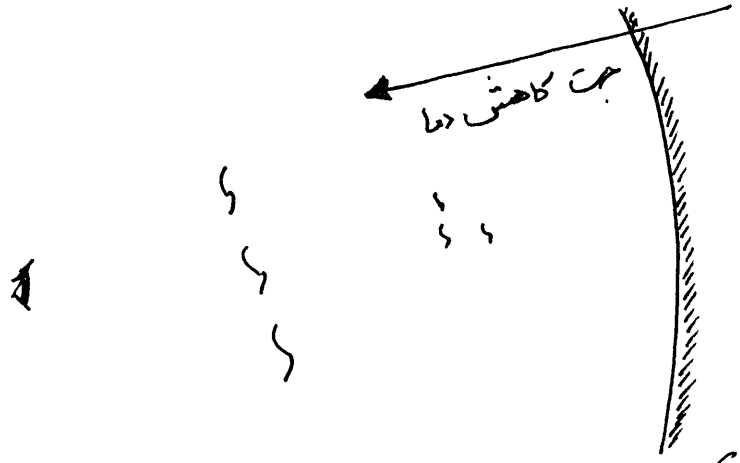
Compton Scattering:



- سطح متصل پراکندگی الکترون بزرگتر از کیهان اتم است، چون الکترون انرژی پیوسته دارد درحالیکه در اتم ترازهای انرژی وجود دارد که اگر فوتون بخواهد با الکترون اتم پراکنده شود باید انرژی خاص داشته باشد.

در محیط بین‌ستاره‌ای محیط کدر است (به دلیل پراکندگی زیاد)

آخرین سطح پراکندگی، ساختگی است که کیهان را قبل از آن نمی‌توان مشاهده کرد.



"last Scattering Surface"

آخرین سطح که فوتون پراکنده شده

فوتون های "MicroWave" بدین ترتیب انرژی آن کم شده است.