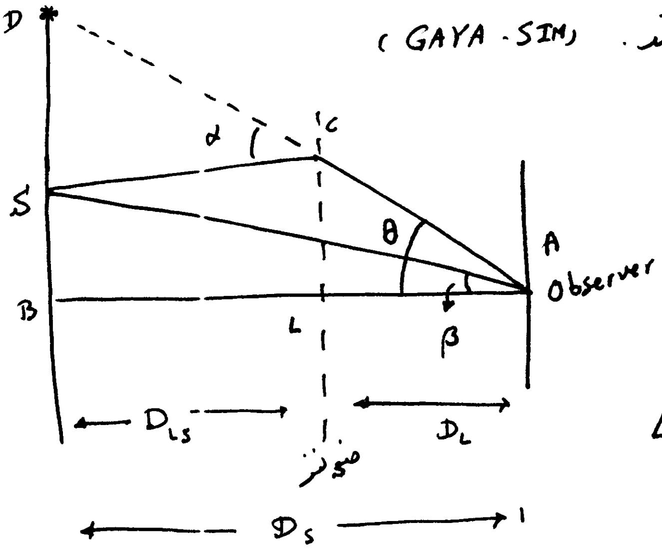
کیهان‌شناسی - جلسه ۱۲ ۸۷/۱۱/۳۱

در فضای تخت می‌خواهیم ارتباط بین محل تصویر و چشمه را بدست آوریم. البته در ریزهمگرایی گرانشی محل تصاویر را نمی‌توان مشخص کرد.
ولی تلسکوپ‌های نسل آینده با اخترسنجی محل تصاویر را می‌توانند پیدا کنند. (GAYA - SIM)



سؤال: چه نگاشتی از β به θ وجود دارد.

با فرض این که فواصل بین لنز، عدسی و چشمه به اندازه‌ای است که فواصل بی‌نهایت است.

ضمناً α، β و θ بسیار کوچک است.

$$\triangle ABD: \ \overline{BD} = \overline{BS} + \overline{SD}$$

$$\theta D_S = \beta D_S + \alpha D_{LS}$$

مقاله: جبهه موج رسیده به لنز بدلیل اختلاف فاصله لنز تا نقاط مختلف موج کروی باعث شود که نور در یک صفحه شکسته نمی‌شود. A&A

$$\rightarrow \theta = \beta + \frac{D_{LS}}{D_S} \cdot \underbrace{\frac{4GM}{c^2 b}}_{\alpha} \ \rightarrow \ \theta = \beta + \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L \theta}$$

$$b \sim LC = \theta D_L$$

$$\rightarrow \begin{cases} \theta^2 = \beta\theta + \theta_E^2 \\ \theta_E^2 = \dfrac{4GM}{c^2} \dfrac{D_{LS}}{D_S D_L} \end{cases}$$ زاویه انیشتین

$\theta_E = 0$ لنز نداشته باشیم $\rightarrow \theta = \beta$

$$\theta_E \neq 0: \quad \theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0 \ \rightarrow \ \theta = \frac{\beta \pm (\beta^2 + 4\theta_E^2)^{1/2}}{2}$$

$$(+) \quad \theta^+ = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}, \quad \theta > \beta$$

$$(-) \quad \theta^- = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2} \quad \theta < \beta$$

21

$$|\theta^-| = \frac{\beta}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{2\theta_E}{\beta}\right)^2} - 1\right]$$

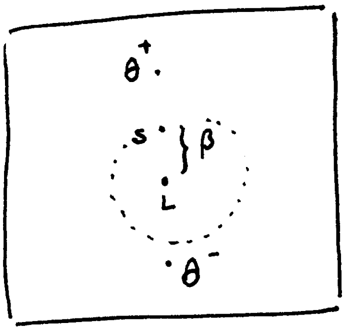
شرط

$$\sqrt{1+\left(\frac{2\theta_E}{\beta}\right)^2} - 1 > 2 \xrightarrow{\text{در این صورت}} |\theta^-| > \beta$$

$$\left(\frac{2\theta_E}{\beta}\right)^2 > 8 \Rightarrow \frac{\theta_E}{\beta} > \sqrt{2} \longrightarrow \boxed{\theta_E > \sqrt{2}\,\beta}$$

* اگر $\beta < \frac{\theta_E}{\sqrt{2}}$ ← به گونه ای که تصویر دوم خارج از دایره به شعاع β خواهد بود.

* با شرط



$$|\theta^+| + |\theta^-| = \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}$$

فاصله بین دو تا تصویر

زمانی که ناظر، لنز و چشمه هم خط باشند $\beta = 0$

در این صورت $\theta^+ + \theta^- = 2\theta_E$

تصویر در حلقه انیشتین $\theta^+ = \theta^- = \theta_E$

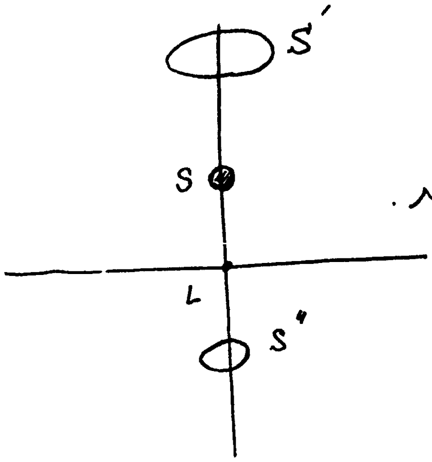
$$|\theta^+| - |\theta^-| = \beta$$

$$|\theta^+| = \beta + |\theta^-|$$

با استفاده از دو رابطه

و با داشتن
$$\begin{cases} |\theta^+| - |\theta^-| = \beta \\ |\theta^+| + |\theta^-| = \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \end{cases}$$

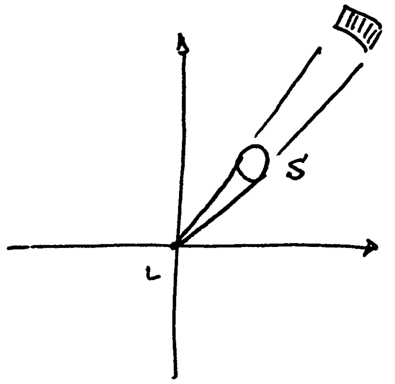
محل تصاویر می توانیم محل چشمه زاویه انیشتین را بدست آوریم از آنجایی که در مقیاس کهکشانی $\theta_E \sim 1\ mas$ است و چون تفکیک تلسکوپ های موجود نمی تواند تصاویر را بدست آورد



بدلیل گذاشت لنز به یک تصویر ایجاد می شود.

بدلیل همگرایی گرانشی زاویه فضایی که تصویر را می بینیم بزرگتر می شود نور بیشتری به ما می رسد.

می خواهیم تغییر شکل چشمه را در اثر همگرایی گرانشی بررسی کنیم.



$$dA_s = \beta \, d\varphi \, d\beta$$

$$dA_I = \theta \, d\varphi \, d\theta$$

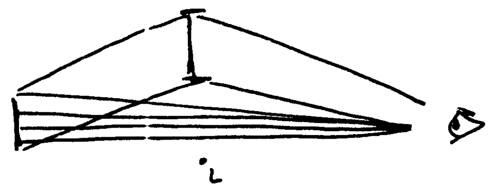
$d\varphi$ تغییر نمی کند چون تصویر تغییر جهت نمی دهد.

در نتیجه سطحی که از آن نوری رسد بزرگتر می شود در نتیجه نور بیشتری به ما می رسد. در نتیجه در اثر همگرایی گرانشی سطح مقطع نور تصویر افزایش می یابد.

Amplification $\quad A = \dfrac{dS_I}{\underbrace{dA_s}_{\text{سطح}}} = \dfrac{\theta \, d\theta}{\beta \, d\beta}$

از آنجایی که $Flux$ $\left(\dfrac{\text{انرژی}}{\text{در واحد زمان در واحد سطح}} \right)$ ثابت است.

سطح مقطع نور را افزایش می دهد.



$$\theta^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}\right)$$

$$\frac{d\theta^{\pm}}{d\beta} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}\right)$$

تصویر مثبت

$$A^{+} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}\right)\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}\right)$$

تصویر منفی

$$A^{-} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}\right)\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}\right)$$

$$A^{+} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}} + 1\right)$$

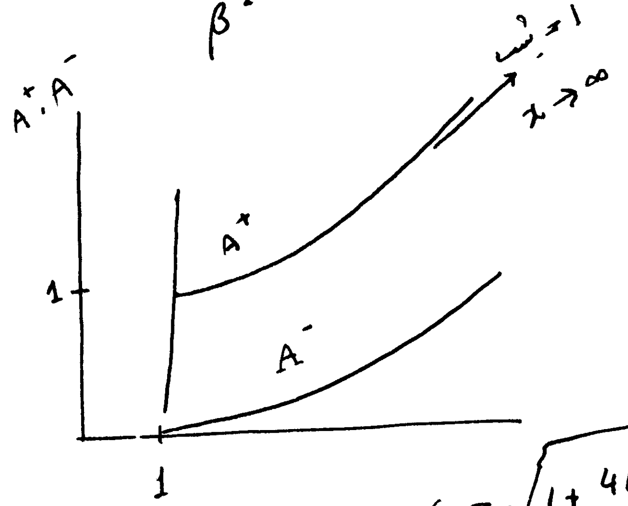
$$x \equiv \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}$$

$$A^{-} = \frac{1}{4}\left(-2 + \sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{4\theta_E^2}{\beta^2}} \equiv x \qquad y = x + \frac{1}{x} \geq 2$$

$A^+ > 1$ همواره بزرگتر از یک است .

سئوال : در چه زمانی $A^- > 1$



$$x \equiv \sqrt{1+\frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}$$

$\beta \to \infty$ لنز وجود ندارد .

$$\frac{1}{4}\left(-2 + x + \frac{1}{x}\right) > 1$$

$$x + \frac{1}{x} > 6$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

تمرین : شرط مورد نیاز برای $A^- > 1$ را بدست آورید .

$$\rightarrow \quad \sqrt{1+\frac{4\theta_E^2}{\beta^2}} > 3 + 2\sqrt{2}$$

$$A_t = A^+ + A^- = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4\theta_E^2}{\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\theta_E^2}{\beta^2}}}\right)$$

کل تقویت نور با این فرض که سطح را المان دیفرانسیلی در نظر بگیریم

$$A_t = \frac{\beta^2 + 2\theta_E^2}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \qquad u = \frac{\beta}{\theta_E}$$

نرمالیزه شده زاویه تصویر به زاویه انیشتین

$$A_t = \frac{2 + u^2}{u\sqrt{4 + u^2}}$$

Simple Paczynski Light Curve

درحالیکه ستاره دور در زیر همگرای گرانشی - u تابعی از زمان است درنتیجه تقویت نور ستاره با زمان تغییر خواهد کرد .

$u \to \infty$ لنز گرانشی رخ نمی دهد $\quad A = 1$

$u \to 0 \; : \quad A \to \infty$