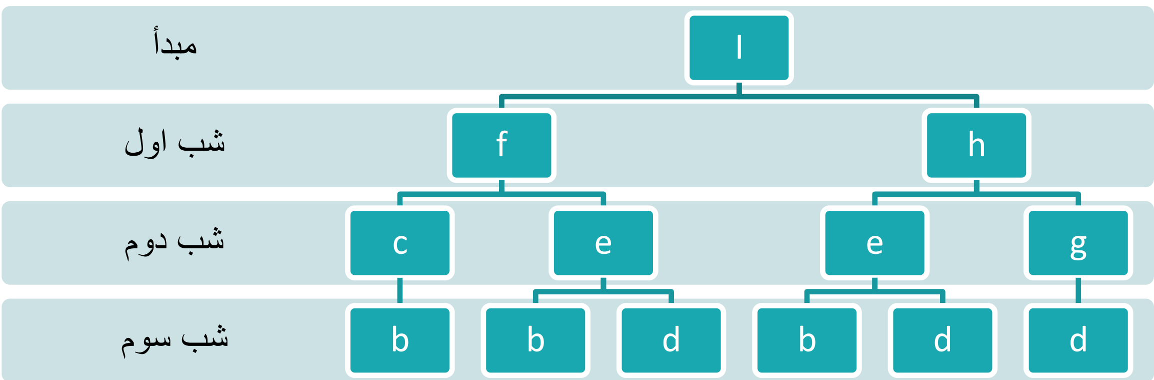
نظریه‌ی بازی‌ها

این مجموعه پاسخ به سوالات انتهای فصل کتاب نظریه بازی ها – نشر نی است که توسط دستیاران درس نظریه بازی‌ها آقایان و خانم ها مهرداد پورقاسم، حسن ابوذرپور، فاطمه اصغری، سعید حجتی‌نژاد، محمدصدرا حیدری، سپیده عبداللهی، پریماه صفریان، مرضیه علی‌اکبرپور، ملیکا عبدی، امیرمسعود باقری، علی امینی تهیه شده است. این جزوه صرفا برای استفاده شخصی است و تضمینی وجود ندارد تمام تمارین بدرستی و یا بصورت کامل حل شده باشند. دستیاران این درس از افراد بسیار خبره و با دانش در حوزه نظریه بازی‌ها هستند که تسلط ایشان این جزوه را بسیار غنی و مورد اتکا می‌کند. از همه این عزیزان برای زمانی که در تهیه این حل‌تمرین گذاشتند، متشکرم. همچنین از شما درخواست دارم چنانچه موارد اشتباهی را ملاحظه فرمودید به بنده با ایمیل rahmati@sharif.edu اطلاع دهید.

۱. فصل اول

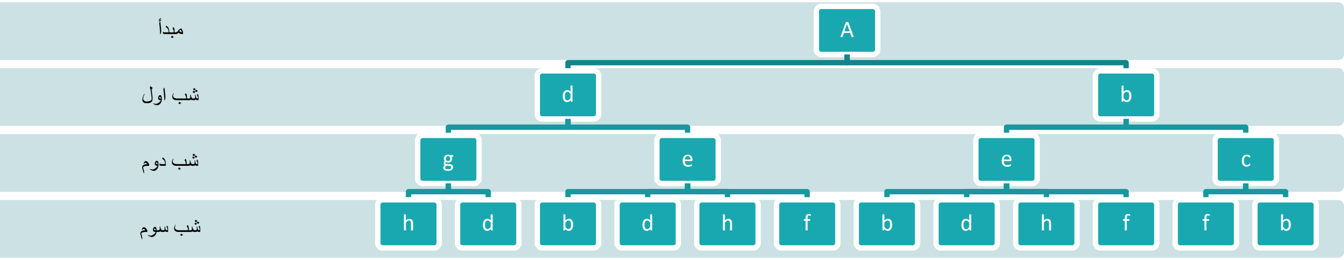
فصل ۱، تمرین ۱: سعید حجتی نژاد

برای کشیدن جدول ابتدا نیاز داریم که تمام حرکات هر بازیکن را مشخص کنیم. به همین منظور نمودار تمام مسیرهای ممکن ناو جنگی کشور I را در شکل ۱ مشاهده می‌کنید



شکل ۱مسیرهای ممکن کشور I برای حمله به کشور A

همچنین تمام مسیرهای ممکن نیروهای دفاعی کشور A را در شکل ۲ مشاهده می‌کنید:



شکل ۲مسیرهای ممکن نیروی دفاعی کشور A

با توجه به اینکه غیرممکن است نیروهای دو کشور در شب اول با هم برخورد کنند، مکان نیروها در شب اول مهم نیست و حالت‌های مختلف را باشروع از شب دوم می‌سازیم. همچنین با توجه به اینکه نیروهای کشور I در شب سوم حتما در یکی از نقاط b یا d قرار دارد، قرار داشتن نیروهای دفاعی کشور A در شب سوم فقط در این دو نقطه منطقی است و تمام نقاط دیگر نسبت به یکی از این دو نقطه مغلوب هستند. بنابراین می‌توان گزینه‌های اقامت شب سوم در تمام نقاط غیر از b و d را از برنامه دفاعی کشور A حذف کرد. با استفاده از تمام حرکات ممکن هر کشور و توضیحات گفته شده، می‌توان جدول زیر را ترسیم کرد.

کشور A

کشور I	c-b	e-b	e-d	g-d
c-b	-1 , 1	-1 , 1	1 , -1	1 , -1
e-b	-1 , 1	-1 , 1	-1 , 1	1 , -1
e-d	1 , -1	-1 , 1	-1 , 1	-1 , 1
g-d	1 , -1	1 , -1	-1 , 1	-1 , 1

اگر بهترین پاسخ‌های محض هر بازیگر را نسبت به هر حرکت محض بازیگر دیگر بیابید. در این صورت مشاهده می‌کنید که بهترین پاسخ‌های محض هیچ تقاطعی ندارند. در نتیجه این بازی، تعادل محض ندارد.

کشور A

کشور I	c-b	e-b	e-d	g-d
c-b	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1	$\underline{1}$, -1
e-b	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1
e-d	$\underline{1}$, -1	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$
g-d	$\underline{1}$, -1	$\underline{1}$, -1	-1 , $\underline{1}$	-1 , $\underline{1}$

برای محاسبه پاسخ ترکیبی، از تقارن بهره می‌گیریم. از آنجایی که حرکت cb با حرکت gd متقارن است، باید آنها را با احتمال برابر بازی کند. همچنین حرکت eb با حرکت ed متقارن است و باید آنها را هم با احتمال برابر بازی کند. بنابراین به جدول زیر می‌رسیم:

کشور A

			q1	0.5-q1	0.5-q1	q1
			c-b	e-b	e-d	g-d
	p1	c-b	-1 , 1	-1 , 1	1 , -1	1 , -1
کشور I	0.5-p1	e-b	-1 , 1	-1 , 1	-1 , 1	1 , -1
	0.5-p1	e-d	1 , -1	-1 , 1	-1 , 1	-1 , 1
	p1	g-d	1 , -1	1 , -1	-1 , 1	-1 , 1

$$U_I(cb.Q) = 0$$

$$U_I(eb.Q) = -1 \times 2 \times (0.5 - q_1) = 2q_1 - 1$$

$$U_I(gd.Q) = 0$$

$$U_I(ed.Q) = -1 \times 2 \times (0.5 - q_1) = 2q_1 - 1$$

از آنجایی که در تعادل، کشور A احتمال q_1 را به نحوی انتخاب می‌کند که کشور I بین حرکات خود بی‌تفاوت باشد، خواهیم داشت:

$$U_I(cb.Q) = U_I(eb.Q) = 2q_1 - 1 = 0$$

$$\rightarrow \quad q_1 = 0.5$$

به همین روش برای مطلوبیت کشور A داریم:

$$U_A(cb.P) = 0$$

$$U_A(eb.P) = 2 \times (0.5 - p_1) = 1 - 2p_1$$

$$U_A(gd.P) = 0$$

$$U_A(ed.P) = 2 \times (0.5 - p_1) = 1 - 2p_1$$

از آنجایی که در تعادل، کشور I احتمال p_1 را به نحوی انتخاب می‌کند که کشور A بین حرکات خود بی‌تفاوت باشد، خواهیم داشت:

$$U_A(cb.Q) = U_I(eb.Q) = 1 - 2p_1 = 0$$

$$\rightarrow \quad p_1 = 0.5$$

فصل ۱ تمرین ۲: مهرداد پورقاسم

در جدول نخست (جدول ۱)، برای بازیگر ۱، حرکت B اکیداً مغلوب حرکت T می‌شود و ازآنجاکه می‌دانیم در تعادل هرگز بازی نمی‌شود می‌توانیم سطر مربوط به آن را حذف کنیم.

		بازیگر ۲		
		L	C	R
بازیگر ۱	T	(۲،۰)	(۱،۱)	(۴،۲)
	M	(۳،۴)	(۱،۲)	(۲،۳)
	B	(۱،۳)	(۰،۲)	(۳،۰)

جدول ۱

در جدول جدید (جدول ۲)، برای بازیگر ۲، حرکت C اکیداً مغلوب حرکت R می‌شود.

		بازیگر ۲		
		L	C	R
بازیگر ۱	T	(۲،۰)	(۱،۱)	(۴،۲)
	M	(۳،۴)	(۱،۲)	(۲،۳)

جدول ۲

در جدول جدید (جدول ۳)، برای هیچ‌یک از بازیگرها، دیگر هیچ حرکت اکیداً مغلوبی وجود ندارد.

		بازیگر ۲	
		L	R
بازیگر ۱	T	(۲،۰)	(۴،۲)
	M	(۳،۴)	(۲،۳)

جدول ۳

برای ادامه‌ی حل، جدول ۳ را در نظر بگیرید.

a) تعادل‌های نش محض

(L,T) نمی‌تواند یک تعادل نش برای این بازی باشد؛ چراکه بازیگر ۲ با انتخاب R به جای L می‌تواند پیامد خود را از ۰ به ۲ افزایش دهد.

(M,R) نمی‌تواند یک تعادل نش برای این بازی باشد؛ چراکه بازیگر ۲ با انتخاب L به جای R می‌تواند پیامد خود را از ۳ به ۴ افزایش دهد.

(T,R) و (M,L) تعادل‌های نش این بازی است؛ چراکه هیچ‌یک بازیگرها نمی‌توانند با تخطی پیامد خود را افزایش دهند.

b) تعادل‌های نش ترکیبی

فرض کنید بازیگر ۲، انتخاب‌های R و L را به ترتیب با احتمال‌های q و $1-q$ بازی می‌کند، $\sigma_2 = (q, 1-q)$. سپس، با به ازای یک انتخاب ترکیبی مشخص از سوی بازیگر ۲، پیامد انتظاری بازیگر ۱ از حرکت T برابر است با:

$$u_1(T, \sigma_2) = 2 \times q + 4 \times (1-q) = 4 - 2q$$

و پیامد انتظاری او از حرکت T برابر است با:

$$u_1(M, \sigma_2) = 3 \times q + 2 \times (1-q) = q + 2$$

بنابراین، او انتخاب T را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$u_1(T, \sigma_2) > u_1(M, \sigma_2) \;\Rightarrow\; 4 - 2q > q + 2 \;\Rightarrow q < \frac{2}{3}$$

درنتیجه، بهترین واکنش بازیگر ۱ برابر خواهد بود با:

$$B_1(\sigma_2) = (p, 1-p) = \begin{cases} (1,0) & \text{if } q < {}^{2}\!/_{3} \\ (0,1) & \text{if } q > {}^{2}\!/_{3} \\ \{(p, 1-p) \mid p \in [0,1]\} & \text{if } q = {}^{2}\!/_{3} \end{cases}$$

به‌طور مشابه ما می‌توانیم تابع بهترین واکنش بازیگر ۲ را نیز به دست بیاوریم:

پیامد انتظاری بازیگر ۲ از حرکت L:

$$u_2(\sigma_1, L) = 0 \times p + 4 \times (1-p) = 4 - 4p$$

پیامد انتظاری بازیگر ۲ از حرکت R:

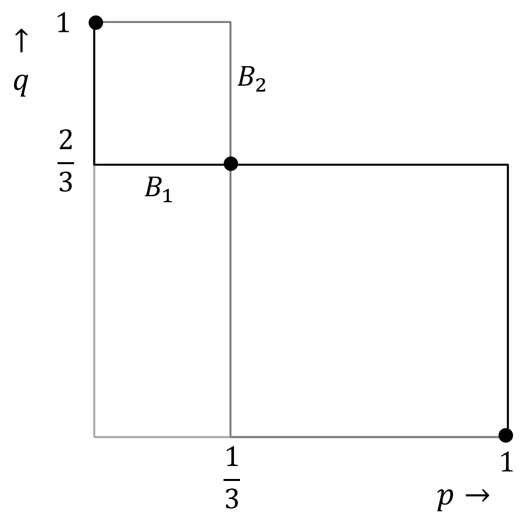
$$u_2(\sigma_1, R) = 2 \times p + 3 \times (1-p) = 3 - p$$

بازیگر ۲ انتخاب L را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$u_2(\sigma_1, L) > u_2(\sigma_1, R) \Rightarrow\ 4 - 4p > 3 - p\ \Rightarrow p < \frac{1}{3}$$

درنتیجه، بهترین واکنش بازیگر ۲ برابر خواهد بود با:

$$B_2(\sigma_1) = (q, 1-q) = \begin{cases} (1,0) & \text{if } p < {}^1\!/_3 \\ (0,1) & \text{if } p > {}^1\!/_3 \\ \{(q, 1-q) \mid q \in [0,1]\} & \text{if } p = {}^1\!/_3 \end{cases}$$



شکل ۳- توابع بهترین واکنش بازیگرها

همان‌طور که مشاهده می‌کنید بازی سه تعادل نش ترکیبی دارد. تعادل‌های ترکیبی بازی عبارت‌اند از:

$$(p, q) = (0,1), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (1,0)$$

فصل ۱ تمرین ۳: حسن ابوذرپور

اگر سهم مطالبه شده بازیگر ۲ را برابر با x در نظر بگیریم(دقت شود که بازیگر ۲ هر عدد مثبتی را می‌تواند انتخاب کند). در این صورت بهترین پاسخ بازیگر ۱ انتخاب سهم $1 - x$ می‌باشد. همچنین به دلیل وجود تقارن بازیگر ۲ نیز از بهترین پاسخ بازیگر ۱ بیشترین سود را می‌برد و تمایلی برای خروج از تعادل ندارد. لذا حرکت $\{(1 - x, x) | 0 \leq x \leq 1\}$ تعادل نش این بازی خواهد بود. انتخاب بالاتر سبب خواهد شد به هردوبازیگر چیزی نرسد و انتخاب پایین‌تر سبب خواهد شد که از پیامد بیشتر محروم شوند.

فصل ۱ تمرین ۴: حسن ابوذرپور

a) با فرض اطلاعات کامل در رابطه با انجام بازی، انتخاب هر یک از بازیگران عدد ۱ است.

بازیگران برای انتخاب حرکتی که منجر به برنده شدن آنها گردد، از حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب استفاده می‌کنند. برای این امر در ابتدا در نظر بگیرید که مجموعه انتخابی هر بازیگر $A_1 \subseteq \{1,2,...,100\}$ باشد. انتخاب عدد ۳۳ نسبتا غالب بر تمام اعداد بزرگتر از خودش می‌باشد چرا که علی القاعده انتظار می‌رود یک سوم میانگین اعداد انتخاب شده از ۳۳ کمتر باشند، لذا انتخاب عدد ۳۳ به هیچ عنوان نسبت به اعداد بزرگتر از ۳۳ عدد اشتباهی نیست. برای نمونه اگر تمام بازیگران عدد ۳۴ را انتخاب کنند، بازیگری که انتخاب ۳۳ را انجام دهد برنده بازی می‌شود. دقت شود که انتخاب ۳۳ انتخاب نسبتا غالب به شمار می‌رود نه انتخاب اکیدا غالب. برای فهم بهتر حالتی را درنظر بگیرید که تمامی بازیگران ۱۰۰ را بازی کنند، در این حالت انتخاب ۳۳ با انتخاب هرعدد زیر ۱۰۰ بازیگر برنده را مشخص خواهد کرد. پس انتخاب ۳۳ نسبتا غالب بر اعداد بزرگترش است. درنتیجه هر بازیگر مجموعه حرکات انتخابی خود را به $A_2 \subseteq \{1,2,...,33\}$ محدود خواهد کرد. با استدلال مشابه در مجموعه A_2 انتخاب عدد ۱۱ انتخاب نسبتا غالب بر اعداد بالاترش می‌باشد و مجموعه حرکات مدنظر هر بازیگر به $A_3 \subseteq \{1,2,...,11\}$ خواهد رسید. به همین ترتیب با حذف حرکات نسبتا مغلوب به عدد ۱ خواهیم رسید.

b) این گزاره در حالت $N > 2$ برقرار است. برای نشان دادن اینکه هیچ حرکتی بر حرکت محض دیگر غلبه اکید ندارد، درگام اول ابتدا در حالتی که همه بازیگران انتخاب ۱۰۰ را بازی کنند، نشان می‌دهیم هیچ یک از انتخاب‌های زیر ۱۰۰ بر انتخاب دیگری غلبه اکید ندارد. فرض کنید حالتی را که داشته باشیم : $s_2 = \cdots = s_N = 100$ ، آن‌گاه به راحتی می‌توان نشان داد نفر اول به ازای هر $s_1 < 100$ برنده می‌شود. پس هیچ‌کدام از انتخاب‌های ۱ تا ۹۹ برهم غلبه اکید ندارند. (اما انتخاب هر عدد زیر ۱۰۰ غلبه اکید بر ۱۰۰ خواهد داشت.)

حال درگام دوم فرض کنید که $s_2 = \cdots = s_N = 1$ و $s_1 > 1$، آن‌گاه مجددا هرفرد با انتخاب $s_1 > 1$ بازنده می‌شود.

$$s_1 - \frac{1(N-1)+s_1}{3N} > \frac{N-1+s_1}{3N} - 1 \Longleftrightarrow (3N-1)s_1 > -2N-1+s_1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow N+2 > (2-3N)s_1 \ \checkmark$$

پس در این حالت نیز هیچ‌کدام از استراتژی‌های ۲ تا N غلبه اکید بریکدیگر ندارند.

تاکنون نشان دادیم که انتخاب‌های ۱ تا ۹۹ و انتخاب‌های ۲ تا ۱۰۰ بر یکدیگرغلبه اکید ندارند. حال در گام نهایی کافی‌است نشان دهیم که هیچ‌کدام از انتخاب‌های ۱ و ۱۰۰ نیز برهم غلبه اکید ندارد. درقسمت اول سوال نشان دادیم که انتخاب ۱۰۰ بر انتخاب ۱ غلبه ندارد. برای نشان دادن این‌که ۱ هم بر صد غلبه ندارد، درنظر بگیرید $s_3 = \cdots = s_N = 100$ و $s_2 = 2$، در این حالت $s_1 = 1$ باعث بازنده شدن فرد می‌شود.

$$if\ s_1 = 1: \frac{100(N-2)+1+2}{3N} > 2 \Longleftrightarrow N > 2 \ \checkmark$$

به عبارت دیگر هیچ حرکت اکیدا غالب محضی بر حرکت دیگر وجود ندارد. یعنی به ازای هر بازیگر i ام خواهیم داشت:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_\mathrm{i}, s_{-i}) \quad \forall \ (s_\mathrm{i}, s_{-i})\epsilon s \ \ with \, s_i^* \neq \ s_\mathrm{i}$$

اما در حالت $N = 2$ حالتی وجود خواهد داشت که انتخاب ۱ اکیدا غالب بر انتخاب ۱۰۰ خواهد بود.

c) فرض کنید یکی از بازیگران حرکت ترکیبی انتخاب بین ۱ تا a را با احتمال $\frac{1}{a}$ بازی کند.

حالت اول: فرض کنید تمامی بازیگران دیگر انتخاب ۱۰۰ را بازی کنند:

در این‌صورت پیامد انتخاب ۱۰۰ برای بازیگر مذکور برابر با $\frac{1}{N}$ است که در حالت مجانبی به صفر میل میکند و پیامد انتخاب حرکت ترکیبی برابر با ۱ خواهد بود چرا که قطعا حرکت وی به ثلث میانگین نزدیک‌تر می‌باشد. (هرحرکت ترکیبی کوچکتر از ۱۰۰ اکیدا غالب بر انتخاب ۱۰۰ خواهد بود.)

حالت دوم: تمامی بازیگران انتخاب ۱۰۰ را همزمان بازی نکنند:

در این حالت با انتخاب عدد ۱۰۰ قطعا بازیگر مذکور بازنده خواهد بود و پیامد ۰ بدست می‌آورد. می‌توان حالتی متصور شد که بازیگر حرکت ترکیبی را به نحوی بازی کند تا انتخابیش به ثلث میانگین نزدیک‌تر بوده و پیامد بزرگتر مساوی صفر نصیبش گردد. برای نمونه با انتخاب $a = 33$ بازیگر می‌تواند برنده بازی شود. تصور کنید حالتی را که تمامی بازیگران انتخاب ۱ را بازی کنند. در این حالت به احتمال $\frac{1}{33}$ بازیگر انتخاب ۱ را بازی می‌کند و پیامد $\frac{1}{N}$ را بدست می‌آورد. به ازای حالت‌های دیگر نیز بازیگر با احتمال لااقل $\frac{1}{33}$ پیامد بیشتر از ۰ نصیبش می‌شود و انتخاب حرکت ترکیبی تمامی حالات را دربر می‌گیرد.

پس در هردو حالت حرکت ترکیبی وجود دارد که اکیدا بر انتخاب ۱۰۰ غلبه کند.

d) اگر انتخاب ۹۹ اکیدا مغلوب باشد، باید داشته باشیم:

$$u_i(99, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall \ (s_i, s_{-i})\epsilon \mathrm{S} \text{ with } \mathrm{s_i} \neq 99$$

حال اگر بازیگر اول ۹۹ را انتخاب کند و باقی بازیگران همگی انتخاب ۱۰۰ را بازی کنند، در اینصورت خواهیم داشت:

$$u_1(99{,}100, \ldots, 100) < u_1(s_i, 100, \ldots, 100) \longrightarrow 1 < u_1^*$$

این درحالی است که پیامد بزرگتر از ۱ برای هیچ یک از بازیگران امکان پذیر نمی‌باشد. پس در نتیجه انتخاب ۹۹ اکیدا مغلوب نخواهد بود.

e) در نظر بگیرید که بازیگران از حرکات ترکیبی قیدشده در بخش c استفاده می‌کنند. حرکت ترکیبی بازیکن i ام انتخاب هرعدد بین ۱ تا a با احتمال $1/a$ می‌باشد.

در رابطه با ترتیب حذف حرکات ابتدا با درنظر گرفتن فضای $A_i^0 \subseteq \{1,2,\ldots,100\}$ برای هر بازیگر انتخاب۱۰۰ را بافرض $a = 99$ حذف می‌کنیم. پس فضای تصمیم‌گیری هر بازیگربه $A_i^1 \subseteq \{1,2,\ldots,99\}$ تقلیل می‌یابد. درگام بعدی با در

نظر گرفتن $a = 98$ در فضای A_i^1 انتخاب ۹۹ را برای هر بازیگر حذف می‌کنیم تا به فضای $A_i^3 \subseteq \{1,2,...,98\}$ برسیم. به همین ترتیب حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب را انجام می‌دهیم تا در گام kام با در نظر گرفتن $a = 100 - k$ حرکت $101 - k$ را حذف می‌کنیم و فضای تصمیم‌گیری هر بازیگر به فضای $A_i^k \subseteq \{1,2,...,100 - \mathrm{k}\}$ تقلیل یابد. در گام ۹۹ ام با حذف انتخاب ۲ با در نظر گرفتن $a = 1$ فضای تصمیم گیری به مجموعه تک عضوی $A_i^{99} \subseteq \{1\}$ تبدیل خواهد شد.

حال منحصربفرد بودن این انتخاب را اثبات می‌کنیم.

درنظر بگیرید که (a_i^*, a_{-i}^*) تنها حرکت‌های باقی‌مانده پس از حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب باشد. حال فرض خلف کنید که (a_i^*, a_{-i}^*) تعادل نش این بازی نباشند. درواقع حرکت دیگری وجود دارد که بازیگر i را به مطلوبیت بالاتری می‌رساند.

$$u_i\ (\ a_i^*, a_{-i}^*\ )\ < u_i\ (\ a_i^*, a_{-i}'\ ) \quad \forall\ \ a_i' \epsilon \mathrm{A}$$

اما از آنجا که در فرض داشتیم (a_i^*, a_{-i}^*) تنها حرکت‌های باقی‌مانده پس از حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب هستند، پس باید حرکت $a_i'' \epsilon \mathrm{A}_i$ امی وجود داشته باشد که اکیدا غالب بر حرکت a_i' قرارگیرد و در فرایند حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب حرکت a_i' را حذف کند

$$u_i\ (a_i'\ , a_{-i}\ )\ < u_i(a_i'', a_{-i}) \qquad \forall\ \ a_{-i} \epsilon \mathrm{A}$$

همچنین رابطه زیر نیز برقرار است

$$u_i(\ a_i', a_{-i}^*\ ) < u_i(a_i'', a_{-i}^*)$$

حال با توجه به اینکه حرکت a_i^* تاکنون حذف نشده‌است، دوحالت پیش می‌آید.

۱) اگر $a_i'' = a_i^*$ باشد، در اینصورت $u_i(\ a_i^*, a_{-i}^*) > u_i(a_i', a_{-i}^*)$ که این مخالف فرض ما است.

۲) $a_i'' \neq a_i^*$ باشد، دراینصورت یک a_i''' وجود دارد که اکیدا غالب بر a_i'', a_i^* است. یعنی :

$$u_i(\ a_i', a_{-i}^*) < u_i(a_i'', a_{-i}^*) < u_i(a_i''', a_{-i}^*\ )$$

حال اگر $a_i''' = a_i^*$ باشد، مشابه حالت ۱ فرض ما غلط است و اگر $a_i''' \neq a_i^*$ باشد، مجددا $\hat{a}_i$ تعریف می‌شود و نهایتا انقدر این مسیر ادامه پیدا می‌کند که مجموعه A بدست آمده منحصر بفرد شود.

پس انتخاب ۱ برای هر تعداد از N باقی‌مانده منحصربفرد است .

f) برای این بخش به دنبال کوچکترین عدد در فضای تصمیم‌گیری بازیگران هستیم. x, y, z از چپ به راست به ترتیب کوچکترین عدد فضای تصمیم‌گیری برای بازیگر ۱ و ۲ و ۳ هستند.

فرض کنید بازیگر دو انتخاب ۱۰۰ را بازی کند (بزرگترین انتخاب در فضای تصمیم‌گیری). اگر z و x هردو کوچکتر از ثلث میانگین باشند، عدد بزرگتر برنده خواهد بود و اگر هر دو سمت راست ثلث میانگین باشند، عدد کوچکتر برنده خواهد شد. برای بررسی حالتی که ثلث میانگین میان انتخاب‌های z و x است داریم:

حالت اول $x < z$:

اگر z و x هردو کمتر از میانگین باشند، بازیگر سوم برنده خواهد شد. اگر در طرفین میانگین قرار بگیرند، برنده بازی مبهم است. در این صورت بازیگر ۱ در شرایط زیر برنده است :

$$\frac{1}{3}average - x < z - \frac{1}{3}average \Leftrightarrow \frac{2}{3}average - x < z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}(x + y + z) - x < z \Leftrightarrow 2y - 7x < 7z \overset{y=100}{\Longleftrightarrow} 200 - 7x < 7z(*)$$

با فرض $x < z$ داریم:

$$x < z \Longleftrightarrow 7x < 7z \Leftrightarrow 200 - 7z < 200 - 7x \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} 200 - 7z < 7z \Longleftrightarrow$$

$$200 < 14z \Leftrightarrow 2y < 14z$$

$$\text{Or } 14.28 < z \ (**)$$

بازیگر ۱ از حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب استفاده می‌کند. با توجه به رابطه‌ی $(**)$ و این‌که $x < z$ بازیگر ۱ اعداد بزرگتر از ۱۴ را به عنوان استراتژی نسبتا مغلوب حذف می‌کند. پس فضای تصمیم‌گیری نخست وی عبارت است از $A_i^1 = \{1,2,\ldots,14\}$. برای نمونه در حالت مرزی، فرض کنید $z = 15$ و $x = 14$ باشد. در این‌صورت ثلث میانگین برابر ۱۴.۳۳ بوده و بازیگر ۱ برنده می‌شود.

حال در گام دوم فرض می‌کنیم که بازیگر دوم بزگترین انتخاب را در فضای تصمیم‌گیری فوق بازی کند. یعنی ۱۴. مجددا x و z را می‌یابیم.

$$2y < 14z \overset{y=14}{\Longleftrightarrow} z > 2$$

مشابه استدلال گام نخست دراین حالت نیز بازیگر ۱ حرکات بیشتر از ۲ را حذف می‌کند. لذا فضای تصمیم‌گیری به صورت $A_i^2 = \{1,2\}$ می‌باشد.

درگام سوم نیز بازیگر دوم حرکت ۲ را انتخاب می‌کند فلذا فضای تصمیم‌گیری بازیگر ۱ با توجه به رابطه $2y < 14z \overset{y=2}{\Longleftrightarrow} z > 1$ به $A_i^3 = \{1\}$ تبدیل خواهد شد.

حالت دوم $x > z$:

در حالتی که اعداد در طرفین میانگین باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{3}average - z > x - \frac{1}{3}average \Leftrightarrow 200 - 7x > 7z$$

با فرض $x > z$ به $200 - 7z > 200 - 7x$ خواهیم رسید که باتوجه به رابطه بالا به $z < 14.28$ منجر می‌شود. با قید $x > z$ انتخاب $A_i^1 = \{1,2,...,14\}$ برای بازیگر ۱ نسبتا غالب بر اعداد بالاتر از ۱۴ خواهد بود. برای نمونه در حالت مرزی فرض کنید $z = 13$ و $x = 14$ باشد. ثلث میانگین در این نمونه برابر ۱۴.۱۱ بوده و بازیگر ۱ برنده می‌شود. در فضای $x > z$ با انتخاب $A_i^1 = \{1,2,...,14\}$ بازیگر ۱ برنده خواهد شد. سایر گام‌ها نیز مشابه حالت نخست ادامه پیدا می‌کند.

g) در حالت نقض فرض عقلانی بازی کردن بازیگران و فرض عدم تبانی بین بازیگران می‌توان به جواب‌های مختلفی رسید.

فصل ۱، تمرین ۵: محمدصدرا حیدری

ابتدا تعادل‌های محض را پیدا می‌کنیم.

«بازیگر ۲»

«بازیگر ۱»		L	C	R
	U	(۱۰, ۰)	(۰, ۰)	(−۱, ۱۵)
	M	(−۱۲, ۱)	(۸, ۸)	(−۱, −۱)
	D	(۵, ۱)	(۸, −۱)	(۰, ۰)

بنابراین تنها تعادل نش محض بازی برابر است با:

$$EQ_1 = \{M, C\}$$

برای محاسبه تعادل‌های ترکیبی اول به این نکته توجه می‌کنیم که برای هر دو بازیگر، تمام حرکاتشان امکان این را دارند که بهترین واکنش در مقابل حرکت بازیگر دیگر باشند بنابراین در این بازی هیچ حرکت اکیداً مغلوبی نداریم و نمی‌توانیم به کمک حذف آن جدول را ساده‌تر کنیم. بنابراین لازم است تمام حالت‌های ممکن را بررسی کنیم.

توجه داشته باشید در بررسی حالت‌های مختلف، می‌توانیم از حذف حرکات اکیدا مغلوب استفاده کرده و جدول را ساده کنیم.

- **بازیگر ۱ بین حرکات U و M ترکیب کند.**

	L	C	R
U	(10, 0)	(0, 0)	(-1, 15)
M	(-12, 1)	(8, 8)	(-1, -1)

در این حالت حرکت L توسط حرکت ترکیبی $(0, 0.5, 0.5)$ بازیگر ۲ اکیداً مغلوب شده و می‌توان آن را حذف کرد.

		q	$1-q$
		C	R
p	U	(0, 0)	(-1, 15)
$1-p$	M	(8, 8)	(-1, -1)

برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۱ بدیهی است که $q = 0$ باشد. ولی می‌دانیم بازیگر ۱ اگر بداند حریفش حرکت R را بازی می‌کند، هیچگاه حرکات U و M را بازی نمی‌کند. بنابراین در این حالت تعادلی نداریم.

- **بازیگر ۱ بین حرکات U و D ترکیب کند.**

	L	C	R
U	$(10, 0)$	$(0, 0)$	$(-1, 15)$
D	$(5, 1)$	$(8, -1)$	$(0, 0)$

در این حالت نیز حرکت C توسط حرکت ترکیبی $(0.5, 0, 0.5)$ مغلوب شده و نمی‌تواند پایه حرکت ترکیبی در تعادل باشد.

		q	$1-q$
		L	R
p	U	$(10, 0)$	$(-1, 15)$
$1-p$	D	$(5, 1)$	$(0, 0)$

برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ داریم:

$$\begin{matrix} u_2(L) = 1 - p \\ u_2(R) = 15p \end{matrix} \Longrightarrow 1 - p = 15p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$$

حال برای بازیگر ۱ داریم:

$$\begin{matrix} u_1(U) = 10q - 1 + q \\ u_1(D) = 5q \end{matrix} \Rightarrow 11q - 1 = 5q \Rightarrow q = \frac{1}{6}$$

و مطلوبیت او از حرکاتش برابراست با:

$$u_1(U, D) = \frac{5}{6}$$

$$u_1(M) = -\frac{17}{6}$$

بنابراین این حالت یک تعادل نش خواهد بود.

$$EQ_2 = \left\{\left(\frac{1}{16}, 0, \frac{15}{16}\right), \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right)\right\}$$

- **بازیگر ۱ بین حرکات M و D ترکیب کند.**

	L	C	R
M	$(-12, 1)$	$(8, 8)$	$(-1, -1)$
D	$(5, 1)$	$(8, -1)$	$(0, 0)$

حرکت R توسط حرکت ترکیبی $(0.66, 0, 0.34)$ مغلوب شده و نمی‌تواند پایه حرکت ترکیبی در تعادل باشد.

		q	$1-q$
		L	C
p	M	$(-12, 1)$	$(8, 8)$
$1-p$	D	$(5, 1)$	$(8, -1)$

برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۱ بدیهی‌است که بازیگر ۲ فقط باید حرکت C را انجام دهد و $q = 0$ باشد. در این حالت بازیگر ۱ هرگز حرکت U را بازی نمی‌کند و می‌تواند بین M و D ترکیب کند. حال برای آن که بازیگر ۲ حرکت C را بازی کند می‌بایست:

$$u_2(C) \geq u_2(L)$$

$$8p - 1 + p \geq 1 \Rightarrow 9p \geq 2 \Rightarrow p \geq \frac{2}{9}$$

بنابراین در این حالت بی‌نهایت تعادل نش داریم.

حال باید حالاتی را بررسی کنیم که بازیگر ۱ بین هر سه حرکتش ترکیب کند.

- **بازیگر ۲ ترکیب نکند.**

برای آن که بازیگر ۱ بین هر سه حرکتش ترکیب کند می‌بایست بین آن‌ها بی‌تفاوت باشد و هیچ حرکت محضی از بازیگر ۲ وجود ندارد که به‌ازای آن مطلوبیت بازیگر ۱ از همه حرکاتش برابر باشد. بنابراین چنین تعادلی نداریم.

- **بازیگر ۲ بین L و C ترکیب کند.**

		q	$1-q$
		L	C
$1-r-s$	U	$(10,0)$	$(0,0)$
r	M	$(-12,1)$	$(8,8)$
s	D	$(5,1)$	$(8,-1)$

برای بازیگر ۱ داریم:

$$\begin{aligned} u_1(M) &= -12q + 8 - 8q \\ u_1(D) &= 5q + 8 - 8q \end{aligned} \Rightarrow -12q = 5q \Rightarrow q = 0$$

که در این صورت حرکت مطلوبیت حرکت U برای بازیگر ۱ برابر با ۰ شده و از دو حرکت دیگر کمتر است. بنابراین در این حالت تعادلی نداریم.

- **بازیگر ۲ بین L و R ترکیب کند.**

		q	$1-q$
		L	R
$1-r-s$	U	$(10,0)$	$(-1,15)$
r	M	$(-12,1)$	$(-1,-1)$
s	D	$(5,1)$	$(0,0)$

در این حالت حرکت M توسط حرکت ترکیبی $(0.5, 0, 0.5)$ مغلوب شده و نمی‌تواند پایه حرکت ترکیبی در تعادل باشد. بنابراین چنین تعادلی نیز نداریم.

- **بازیگر ۲ بین C و R ترکیب کند.**

		q	$1-q$
		C	R
$1-r-s$	U	$(0,0)$	$(-1,15)$
r	M	$(8,8)$	$(-1,-1)$
s	D	$(8,-1)$	$(0,0)$

در این حالت حرکت U توسط حرکت ترکیبی $(0, 0.5, 0.5)$ مغلوب شده و نمی‌تواند پایه حرکت ترکیبی در تعادل باشد.

- **بازیگر ۲ بین هر سه حرکتش ترکیب کند.**

		p	$1-p-q$	q
		L	C	R
$1-r-s$	U	$(10,0)$	$(0,0)$	$(-1,15)$
r	M	$(-12,1)$	$(8,8)$	$(-1,-1)$
s	D	$(5,1)$	$(8,-1)$	$(0,0)$

برای بازیگر ۱ داریم:

$$u_1(U) = 10p - q$$
$$u_1(M) = -12p + 8 - 8p - 8q - q = 8 - 20p - 9q$$
$$u_1(D) = 5p + 8 - 8p - 8q = 8 - 3p - 8q$$

بنابراین داریم:

$$8 - 20p - 9q = 8 - 3p - 8q \Rightarrow 20p + 9q = 3p + 8q \Rightarrow 17p = -q \Rightarrow p = -\frac{1}{17}q$$

نتیجه بالا نشان می‌دهد p و q غیرهم علامت هستند و اگر یکی مثبت باشد دیگری منفی خواهد بود که برای احتمال قابل قبول نیست. پس تنها حالت ممکن برابراست با:

$$p = q = 0$$

در این صورت بازیگر ۲ حرکت محض C را بازی می‌کند که قبلاً نشان دادیم چنین تعادلی ممکن نیست. پس در این حالت نیز تعادلی نداریم.

در نهایت تعادل‌های بازی برابرشد با:

$$EQ_1 = \{(0,1,0),(0,1,0)\}$$
$$EQ_2 = \left\{\left(\frac{1}{16},0,\frac{15}{16}\right),\left(\frac{1}{6},0,\frac{5}{6}\right)\right\}$$
$$EQ_\infty = \left\{\left(0,\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right),(0,1,0)\right\}$$

که تعادل آخر به‌ازای همه حرکات ترکیبی با احتمال $\sigma_1(U) = 0$ و $\sigma_1(M) \geq \frac{2}{9}$ برقرار است.

فصل ۱ تمرین ۶، حسن ابوذرپور

مسیر اول: برای بازیگر اول، انتخاب U بر انتخاب D نسبتا غلبه دارد. چرا که به ازای هر انتخاب از بازیگر دوم بر اساس جدول پیامدهای بازی $(s_2 \epsilon \{L,M,R\})$ ، انتخاب حرکت U پیامدهای بزرگتر و یا مساوی با انتخاب D دارد.

$$u_1(U,s_2) \geq u_1(D,s_2)$$

درواقع با انتخاب حرکت L از سمت بازیگر دوم، انتخاب U و D پیامد ۲ واحدی به بازیگر ۱می‌رساند. اگر بازیگر دوم حرکت M را انتخاب کند انتخاب U و D پیامد ۱ واحدی به بازیگر ۱ رسانده، و با انتخاب حرکت R، بازیگر ۱ انتخاب U را بر انتخاب D ترجیح می‌دهد(۰ > ۱−). پس ازآنجا که حرکت D نسبتا مغلوب تلقی می‌شود، از ماتریس پیامدها حذف می‌شود.

بازیگر۲

		L	M	R
بازیگر ۱	U	(۲،۱)	(۱،۱)	(۰،۰)
	C	(۱،۲)	(۳،۱)	(۲،۱)

حال نوبت به بازیگر دوم می‌رسد. برای بازیگر دوم، حرکت L اکیدا بر حرکت R غلبه دارد. چراکه بدون درنظر گرفتن انتخاب بازیگر ۱، انتخاب L برای بازیگر دوم پیامد بیشتری خواهد داشت. (انتخاب U پیامد ۰<۱ و با انتخاب C پیامد ۱<۲) به عبارت دیگر در فضای $(s_1 \epsilon \{U, C\})$ داریم:

$$u_2(s_1, L) > u_2(s_1, R)$$

انتخاب R اکیدا مغلوب بر L می‌باشد (هر انتخاب اکیدا مغلوبی، نسبتا مغلوب نیز است.) لذا ما انتخاب R را از فضای انتخاب بازیگر ۲ حذف می‌کنیم و جدول پیامدهای بازی را مجدد بازنویسی می‌کنیم.

بازیگر۲

		L	M
بازیگر ۱	U	(۲،۱)	(۱،۱)
	C	(۱،۲)	(۳،۱)

در گام بعد، دقت شود که کماکان ما انتخاب‌های بازیگر ۲ را بطور کامل بررسی نکرده‌ایم. حرکت M برای بازیگر دوم، انتخاب نسبتا مغلوب نسبت به L می‌باشد. درواقع هنگامی که بازیگر ۱ U را انتخاب کند، پیامد انتخاب M و L برای بازیگر دوم برابر ۱ است. اما با انتخاب C، بازیگر دوم از انتخاب L عایدی بیشتری خواهد داشت (۱<۲). به عبارت دیگر برای هرکدام از انتخاب‌ها توسط بازیگر ۱ $(s_1 \epsilon \{U, C\})$ داریم:

$$u_2(s_1, M) \leq u_2(s_1, L)$$

پس با حذف انتخاب M برای بازیگر دوم جدول پیامدها را بازنویسی می‌کنیم.

بازیگر ۲

		L
بازیگر ۱	U	(۲،۱)
	C	(۱،۲)

حال برای بازیگر یک انتخاب U یک انتخاب اکیدا غالب بر C خواهد بود (پس بنابراین انتخاب U نسبتا غالب بر C نیز می‌باشد). از این رو بعد از حذف انتخاب C، مجموعه انتخاب (U,L) تعادل بازی با روش حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب در مسیر اول است.

مسیر دوم: در این مسیر قصد داریم با ترتیبی متفاوت، حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب را انجام دهیم. برخلاف مسیر اول، در این حالت ابتدا از حذف حرکات نسبتا مغلوب برای بازیگر دوم شروع می‌کنیم. حرکت M یک حرکت نسبتا غالب بر R تلقی می‌شود. چرا که با انتخاب حرکت U توسط بازیگر ۱، پیامد انتخاب M برای بازیگر دوم بیشتر است (۱<۰) و با انتخاب C و D توسط بازیگر ۱، بازیگر دوم نسبت به انتخاب بین M و R بی‌تفاوت است. درواقع به ازای تمام انتخاب‌های بازیگر ۱ ($s_1\epsilon\{U,C,D\}$) داریم:

$$u_2(s_1,M) \geq u_2(s_1,R)$$

لذا با حذف انتخاب R برای بازیگر دوم، ماتریس پیامدها به شکل زیر می‌شود:

بازیگر۲

		L	M
	U	(۲،۱)	(۱،۱)
بازیگر ۱	C	(۱،۲)	(۳،۱)
	D	(۲،−۲)	(۱، −۱)

برای بازیگر ۱ در این حالت انتخاب نسبتا مغلوبی وجود ندارد. انتخاب‌های U و D پیامدهای یکسانی به ازای هر انتخاب بازیگر ۲، به بازیگر ۱ می‌دهد. و انتخاب C به ازای انتخاب L توسط بازیگر ۲ پیامد پیامد کمتر (۲<۱) و به ازای انتخاب M توسط بازیگر ۲ پیامد بیشتری (۳<۱) به بازیگر ۱ می‌دهد. پس در این مسیر تعادلی از طریق حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب وجود ندارد. پس مشاهده کردیم ترتیب حذف در روش حذف پیاپی حرکت‌های نسبتا مغلوب دارای اهمیت است و روی جواب اثر دارد.

همانطور که قید شد از مسیر دوم، با حذف حرکات نسبتا ضعیف به تعادل نمی‌رسیم. اما با حذف حرکات نسبتا مغلوب در مسیر اول به تعادل رسیدم و این نتیجه به دست آمده یکسان است. حال تعادل نش محض بازی را بررسی می‌کنیم.

بازیگر۲

		L	M	R
بازیگر ۱	U	(۲،۱)	(۱،۱)	(۰،۰)
	C	(۱،۲)	(۳،۱)	(۲،۱)
	D	(۲،-۲)	(۱،-۱)	(-۱،-۱)

که با توجه به بهترین پاسخ هر بازیگر، انتخاب (U,L) تعادل نش بازی است. اما لزوما این تعادل نش، تنها تعادل نش بازی نمی‌باشد. چرا که این بازی حداقل یک تعادل نش ترکیبی نیز خواهد داشت.

برای به دست آوردن تعادل نش ترکیبی این بازی در نظر بگیرید بازیگر ۱ با احتمال $p, q, 1-p-q$ به ترتیب انتخاب U, C, D را بازی کند و بازیگر دوم با احتمال $x, y, 1-x-y$ به ترتیب انتخاب L, M, R را بازی کند.

بازیگر۲

		L (x)	M (y)	R $(1-x-y)$
بازیگر ۱	U (p)	(۲،۱)	(۱،۱)	(۰،۰)
	C (q)	(۱،۲)	(۳،۱)	(۲،۱)
	D (۱-p-q)	(۲،-۲)	(۱، -۱)	(-۱،-۱)

برای به‌دست آوردن تعادل نش ترکیبی حالتی را درنظر بگیرید بازیگر اول بین C,U ترکیب کند. در این صورت برای بازیگر ۲ داریم:

$$u_2(L|p+q=1) = 2-p \ ,u_2(M|p+q=1) = 1\ ,u_2(R|p+q=1) = 1-p$$

پس بازیگر ۲ حرکت R را بازی نمی‌کند و با احتمال $p=1$ بین دو حرکت L, M بی‌تفاوت می‌شود. حال برای این‌که بازیگر اول بین C,U بی‌تفاوت شود:

$$(2*x)+\big(1*(1-x)\big) = 1*x+3*(1-x) \Longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

پس تعادل ترکیبی بازی برابر است با $\left\{(1,0,0),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)\right\}$

همچنین دقت شود که بازیگر ۱ انگیزه تخطی از تعادل و بازی کردن حرکت D را ندارد. چرا که انتخاب‌های D,U پیامدهای یکسانی برای بازیگر ۱ به همراه دارد.

لذا نتیجه روش حذف پیاپی حرکات نسبتا مغلوب در حالت یکتا لزوما تنها تعادل نش بازی نیست و تعادل نش‌های دیگر نیز وجود دارند.

فصل ۱، تمرین ۷: محمدصدرا حیدری

$$P(Q) = \alpha - \beta Q, \quad Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$$

قسمت a)

سود تولیدکننده iام برابراست با:

$$\pi_i = q_i P(Q) - q_i c$$

q_{-i} را برابر با مقدار تولید شده توسط بنگاه‌ها به جز بنگاه iام تعریف می‌کنیم.

$$q_{-i} = \sum_{j \neq i}^{N} q_j \Longrightarrow \pi_i = [\alpha - \beta q_{-i} - \beta q_i - c]\, q_i$$

در اثر بیشینه‌سازی تابع سود بنگاه، تابع بهترین واکنش هر بنگاه در ازای مقدار تولید شده توسط سایر بنگاه‌ها برابراست با:

$$\left.\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}\right|_{q_i^*} = \alpha - \beta q_{-i} - 2\beta q_i^* - c = 0$$

$$BR_i(q_{-i}) = \frac{1}{2\beta}[\alpha - \beta q_{-i} - c]$$

از تقارن موجود در مسئله می‌دانیم در حالت تعادل همه بنگاه‌ها مقدار یکسان تولید می‌کنند و تعادل نش محل تقاطع توابع بهترین پاسخ‌های همه بازیگران است. بنابراین:

$$\forall i,j \quad q_i^* = q_j^* = q_c \Rightarrow q_{-i} = (N-1)\, q_c$$

$$q_c = \frac{1}{2\beta}[\alpha - \beta(N-1)q_c - c] \Longrightarrow q_c = \frac{\alpha - c}{\beta(N+1)}$$

درنهایت مقدار کل تولید و قیمت تعادلی ناشی از آن برابر است با:

$$Q_c = N\, q_c = \frac{N}{N+1}\frac{\alpha - c}{\beta} \Longrightarrow P_c = \alpha - \frac{N}{N+1}(\alpha - c) = \frac{1}{N+1}\alpha + \frac{N}{N+1}c$$

در تعداد زیاد بنگاه‌ها داریم:

$$\lim_{N\to\infty} P_c = c$$

همانطور که اثبات شد در تعداد بالای بنگاه‌ها، قیمت تعادلی به مقدار هزینه حاشیه‌ای میل می‌کند که همان قیمت تعادلی در بازاری با رقابت کامل است.

قسمت b)

سود تولیدکننده iام برابر است با:

$$\pi_i = q_i P(Q) - q_i c_i$$

q_{-i} را برابر با مقدار تولید شده توسط بنگاه‌ها به جز بنگاه iام تعریف می‌کنیم.

$$q_{-i} = \sum_{j\neq i}^{N} q_j \Rightarrow \pi_i = [\alpha - \beta q_{-i} - \beta q_i - c_i]\, q_i$$

در اثر بیشینه‌سازی تابع سود بنگاه، تابع بهترین واکنش هر بنگاه در ازای مقدار تولید شده توسط سایر بنگاه‌ها برابر است با:

$$\left.\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}\right|_{q_i^*} = \alpha - \beta q_{-i} - 2\beta q_i^* - c_i = 0$$

$$BR_i(q_{-i}) = \frac{1}{2\beta}[\alpha - \beta q_{-i} - c_i] = q_i^*$$

در حالت تعادل می‌دانیم به‌ازای هر بنگاه i:

$$q_i^* = \frac{1}{2\beta}(\alpha - \beta q_{-i}^* - c_i)$$

با جمع کردن روی همه بنگاه‌ها داریم:

$$Q^* = \sum_{i=0}^{N} q_i^* = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2\beta}(\alpha - \beta q_{-i}^* - c_i) = \frac{1}{2\beta}\left(\sum_{i=0}^{N} \alpha - \beta \sum_{i=0}^{N} q_{-i}^* - \sum_{i=0}^{N} c_i\right)$$

می‌دانیم در جمع همه q_{-i}^*ها هر q_i^* یکبار حذف شده است و به عبارت دیگر $\sum_{i=0}^{N} q_{-i}^* = (N-1)Q^*$. بنابراین:

$$Q^* = \frac{1}{2\beta}\left(N\alpha - \beta(N-1)Q^* - \sum_{i=0}^{N} c_i\right) \Rightarrow Q^* = \frac{N}{N+1}\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\beta(N+1)}\sum_{i=0}^{N} c_i$$

فصل ۱، تمرین ۸: محمدصدرا حیدری

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$$

در مدل برتراند بنگاه‌ها در قیمت با هم رقابت می‌کنند و فرض می‌کنیم برای این کار توانایی تولید هر مقدار محصول را داشته باشند. در ادامه فرض می‌کنیم بنگاه‌ها هزینه ثابت ندارند و هزینه حاشیه‌ای تولید بنگاه i برابر با c_i می‌باشد.

$$\pi_i = q_i p_i - q_i c_i = q_i(p_i - c_i) = (a - p_i + bp_j)(p_i - c_i)$$

تابع بهترین پاسخ قیمتی بنگاه i در مقابل قیمت انتخابی بنگاه j را از بیشینه‌سازی سود محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i}\right|_{p_i^*} = a - 2p_i^* + bp_j + c_i = 0$$

$$\Longrightarrow\ BR_i(p_j) = \frac{1}{2}(a + bp_j + c_i)$$

و با همین مراحل بالا برای بنگاه j داریم:

$$BR_j(p_i) = \frac{1}{2}(a + bp_i + c_j)$$

در حالت تعادل داریم:

$$p_i^* = \frac{1}{2}\left(a + b\left[\frac{1}{2}(a + bp_i^* + c_j)\right] + c_i\right) = \frac{a}{2} + \frac{ba}{4} + \frac{b^2}{4}p_i^* + \frac{b}{4}c_j + \frac{1}{2}c_i$$

$$\Rightarrow p_i^*\left(1 - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{a}{4}(2 + b) + \left(\frac{b}{4}c_j + \frac{1}{2}c_i\right)$$

$$\Rightarrow p_i^* = \frac{a}{2 - b} + \frac{bc_j + 2c_i}{4 - b^2}$$

اگر فرض کنیم هزینه حاشیه‌ای تولید برای هر دو بنگاه باهم برابراست دارم:

$$p_i^* = p_j^* = \frac{a}{2 - b} + \frac{c}{2 - b} = \frac{a + c}{2 - b}$$

و مقدار تعادلی تولید برابراست با:

$$q_i^* = q_j^* = a + (b - 1)\frac{a + c}{2 - b} = \frac{a}{2 - b} + \frac{b - 1}{2 - b}c$$

فصل ۱ تمرین ۹: مرضیه علی‌اکبرپور

انحصاری :

$$\max \quad q(25-q) - q \times 1$$

$$q^* = 12$$

کورنو :

$$\max_{q_1} \quad q_1(25-(q_1+q_2)) - q_1$$

$$q_1^* = \frac{24-q_2}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = 8$$

برتراند :

$$P = 1$$

$$\pi_A = \begin{cases} 144-a & a > b \\ 64-a & a < b \end{cases} \qquad \pi_B = \begin{cases} -b & a > b \\ 64-b & a < b \end{cases}$$

* شرکت B بیشتر از 64 رشوه نمی‌دهد.

$$E(\pi_B(b)) = (64-b)F_A(b) + (-b)(1-F_A(b)) = 64F_A(b) - b$$

$$F_A(m) = \frac{m}{64} + \cancel{c}^{\,0}$$: مستقل از b شود

$$E(\pi_A(a)) = (144-a)F_B(a) + (64-a)(1-F_B(a)) = 80F_B(a) + 64 - a$$

$$F_B(m) = \frac{m}{80} + \cancel{y}^{\,\frac{16}{80}=\frac{1}{5}}$$: مستقل از a شود

فصل ۱ تمرین ۱۰: فاطمه اصغری

ابتدا تعادل های نش محض این بازی را بدست می‌آوریم. برای بدست آوردن تعادل‌های نش محض باید بهترین پاسخ (best response) هر بازیکن به حرکت بازیکن دیگر را بیابیم. جایی که این بهترین پاسخ‌ها برهم منطبق می‌شوند، تعادل نش است. ملاحظه می‌شود که این بازی یک تعادل نش محض دارد که در آن بازیکن اول D و بازیکن دوم R را بازی می‌کند.

$b_1(L) = U \qquad b_2(U) = M$

$b_1(M) = M \qquad b_2(M) = L$

$b_1(R) = D \qquad b_2(D) = R$

برای آن که نشان دهیم بازی تعادل نش ترکیبی ندارد، ترکیبات متفاوت استراتژی‌ها را بررسی می‌کنیم و می‌بینیم که بازیکن ۱ نمی‌تواند حرکت ترکیبی داشته باشد. لذا تعادل نش ترکیبی برای این بازی وجود ندارد.

حالت اول: ابتدا فرض کنیم بازیکن ۱ استراتژی U را با احتمال P، و استراتژی M را با احتمال $(1-P)$ بازی می‌کند. برای آن که بازیکن ۲ بین استراتژی‌هایش بی تفاوت شود، داریم:

$\{M, U\}$

$$\underbrace{1 \times P + (-2) \times (1-P)}_{\text{مطلوبیت انتظاری استراتژی } M} = \underbrace{(-2) \times P + 1 \times (1-P)}_{\text{مطلوبیت انتظاری استراتژی } L} = \underbrace{0 \times P + 0(1-P)}_{\text{مطلوبیت انتظاری استراتژی } R}$$

$$\underbrace{(-2) \times P + 1 \times (1-P)}_{\text{مطلوبیت انتظاری استراتژی } L} \geq 0 \rightarrow -3P + 1 \geq 0 \rightarrow P \leq \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{1 \times P + (-2) \times (1-P)}_{\text{مطلوبیت انتظاری استراتژی } M} \geq 0 \rightarrow 3P - 2 \geq 0 \rightarrow P \geq \frac{2}{3}$$

اگر $P \leq \frac{1}{3}$ باشد آن‌گاه استراتژی M توسط بازیکن ۲ بازی نمی‌شود، چون مطلوبیت انتظاری حاصل از آن منفی است. فرض کنیم بازیکن ۲ با احتمال x استراتژی L و با احتمال $1-x$ استراتژی R را بازی می-کند، پس برای بازیکن ۱ داریم:

$$U_1(U) = x, U_1(M) = -2x \rightarrow x = -2x \rightarrow x = 0$$

پس بازیکن ۲ فقط استراتژی R را بازی می‌کند. در این حالت مطلوبیت انتظاری بازیکن یک از بازی کردن استراتژی‌های M و U برابر با صفر است و او انگیزه دارد که استراتژی D را انتخاب کند که مطلوبیت یک نصیبش بشود. پس تعادل نش ترکیبی با تکیه‌گاه M و U نمی‌تواند وجود داشته باشد.

اگر $P \geq \frac{2}{3}$ باشد آن‌گاه استراتژی L توسط بازیکن ۲ بازی نمی‌شود، چون مطلوبیت انتظاری حاصل از آن منفی است. فرض کنیم بازیکن ۲ با احتمال x استراتژی M و با احتمال $1-x$ استراتژی R را بازی می‌کند، پس برای بازیکن ۱ داریم:

$$U_1(U) = -2x, U_1(M) = 1-x \rightarrow x = -2+2x \rightarrow x = -1 \quad contradiction!!!$$

اگر $\frac{1}{3} < P < \frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه هیچ‌کدام از استراتژی‌های M و L توسط بازیکن ۲ با احتمال مثبت بازی نمی‌شود و فقط استراتژی R بازی می‌شود، در این حالت مطلوبیت انتظاری بازیکن یک از بازی کردن استراتژی‌های M و U برابر با صفر است و او انگیزه دارد که استراتژی D را انتخاب کند که مطلوبیت یک نصیبش بشود. پس تعادل نش ترکیبی با تکیه‌گاه M و U نمی‌تواند وجود داشته باشد.

پس تعادل نش ترکیبی‌ای وجود ندارد که بازیکن ۱ دو تا استراتژی U و M را در آن ترکیب کند.

حالت دوم:

$\{M, D\}$ $\quad$ $M: P$ با احتمال $\quad$ $D: 1-P$ با احتمال

$$U_2(L) = P, \qquad U_2(M) = -2P, \qquad U_2(R) = 1-P$$

پس استراتژی M توسط بازیکن ۲ بازی نمی‌شود، فرض کنیم بازیکن ۲ با احتمال x استراتژی L و با احتمال $1-x$ استراتژی R را بازی می‌کند، پس برای بازیکن ۱ داریم:

$$-2x = 1 - x \nrightarrow x = -1 \quad contradiction!!!$$

پس تعادل نش ترکیبی‌ای وجود ندارد که بازیکن ۱ دو تا استراتژی D و M را در آن ترکیب کند.

حالت سوم:

$\{U, D\}$ $\quad U$: P با احتمال $\quad\quad D$: $1-P$ با احتمال

$$U_2(L) = -2P, \qquad U_2(M) = P, \qquad U_2(R) = 1 - P$$

پس استراتژی L توسط بازیکن ۲ بازی نمی‌شود، فرض کنیم بازیکن ۲ با احتمال x استراتژی M و با احتمال $1-x$ استراتژی R را بازی می‌کند، پس برای بازیکن ۱ داریم:

$$-2x = 1 - x \nrightarrow x = -1 \quad contradiction!!!$$

پس تعادل نش ترکیبی‌ای وجود ندارد که بازیکن ۱ دو تا استراتژی D و U را در آن ترکیب کند.

حالت چهارم:

$\{U, M, D\}$ $\quad U$: P با احتمال $\quad M$: Q با احتمال $\quad\quad D$: $1-P-Q$ با احتمال

$$U_2(L) = -2P + Q, \qquad U_2(M) = P - 2Q, \qquad U_2(R) = 1 - P - Q$$

بسته به مقدار P و Q بازیکن ۲ یکی از استراتژی‌های M و L را بازی نمی‌کند. فرض کنیم ابتدا بازیکن ۲ فقط استراتژی L و R را بازی کند. در این صورت استراتژی M برای بازیکن ۱ مغلوب استراتژی D است و لذا با احتمال مثبت در تعادل نش ترکیبی بازی نخواهد شد. به طور مشابه فرض کنیم بازیکن ۲ فقط استراتژی M و R را بازی کند. در این صورت استراتژی U برای بازیکن ۱ مغلوب استراتژی D است و لذا با احتمال مثبت در تعادل نش ترکیبی بازی نخواهد شد. پس تعادل نش ترکیبی‌ای وجود ندارد که بازیکن ۱ هر سه استراتژی D و U و M را در آن ترکیب کند.

فصل ۱ تمرین ۱۱: مهرداد پورقاسم

فرض کنید بازیگر ۱ هر یک از انتخاب‌های U و D را به ترتیب با احتمال‌های p و $1-p$ و بازیگر ۲ هر یک از انتخاب‌های L و R را به ترتیب با احتمال‌های q و $1-q$ بازی می‌کند. در این صورت پیامد انتظاری بازیگر ۳ از حرکت A، $u_3(\sigma_1,\sigma_2,A)$، برابر خواهد بود با:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,A) = pq \times 9 + p(1-q)\times 0 + (1-p)q \times 0 + (1-p)(1-q)\times 0 = 9pq$$

به‌طور مشابه پیامد انتظاری بازیگر ۳ از حرکت‌های B، C و D نیز برابر خواهد بود با:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,B) = 9p(1-q) + 9(1-p)q$$
$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,C) = 9(1-p)(1-q)$$
$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) = 6pq + 6(1-p)(1-q)$$

a) می‌خواهیم نشان دهیم در مقابل هر حرکت ترکیبی بازیگر ۱ و ۲، حرکت D بهترین واکنش بازیگر ۳ نیست.

حرکت D بهترین واکنش است، اگر و تنها اگر پیامد انتظاری بازیگر ۳ از حرکت D، $u_3(\sigma_1,\sigma_2,D)$، بیشتر از پیامد انتظاری او از هر یک از حرکت‌های A، B و C باشد:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \ge u_3(\sigma_1,\sigma_2,A)$$
$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \ge u_3(\sigma_1,\sigma_2,C)$$
$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \ge u_3(\sigma_1,\sigma_2,B)$$

فرض کنید رابطه‌ی اول و دوم برقرار باشد:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \ge u_3(\sigma_1,\sigma_2,A) \;\Rightarrow\; 6pq + 6(1-p)(1-q) \ge 9pq \;\Rightarrow\; \frac{p}{1-p}\,\frac{q}{1-q} \le 2\,.$$
$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \ge u_3(\sigma_1,\sigma_2,C) \Rightarrow 6pq + 6(1-p)(1-q) \ge 9(1-p)(1-q)$$
$$\Rightarrow\; \frac{p}{1-p}\,\frac{q}{1-q} \ge \frac{1}{2}\,.$$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم آیا رابطه‌ی سوم نیز برقرار است یا خیر. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(p,q) = u_3(\sigma_1,\sigma_2,B) - u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) = -2 + 5(p+q) - 10pq$$

اگر بتوانیم نشان دهیم به ازای تمام مقادیر p و q، $f(p,q) > 0$ است، در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم D نمی‌تواند بهترین واکنش باشد. مشتق تابع $f(p,q)$ نسبت به p را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial f(p,q)}{\partial p} = 5 - 10q$$

با توجه به این عبارت، سه حالت خواهیم داشت:

حالت ۱: $q > 1/2$

در این حالت مشتق تابع $f(p,q)$ نسبت به p، همواره مقداری منفی است؛ بنابراین، کمینه مقدار تابع $f(p,q)$ به ازای بیشترین مقدار مجاز برای p به دست می‌آید. مقادیر مجاز برای p از نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \le \frac{p}{1-p}\,\frac{q}{1-q} \le 2 \;\Rightarrow\; \underbrace{\frac{1-q}{1+q}}_{\underline{p}} \le p \le \underbrace{1-\frac{q}{2-q}}_{\overline{p}}$$

اکنون کافی است نشان دهیم رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$f\left(p=\overline{p}=1-\frac{q}{2-q},q\right)=\frac{15q^2-18q+6}{2-q}>0 \text{ for all } q>\frac{1}{2}.$$

به ازای مقادیر مجاز q، مخرج این عبارت مثبت است. کمینه مقدار صورت کسر نیز برابر ۰.۶ و مثبت است؛ بنابراین، مقدار تابع $f(p,q)$ مثبت است و به‌این‌ترتیب، در این حالت انتخاب D نمی‌تواند بهترین واکنش باشد.

حالت ۲: $q < 1/2$

در این حالت مشتق تابع $f(p,q)$ نسبت به p، همواره مقداری مثبت است؛ بنابراین، کمینه مقدار تابع $f(p,q)$ به ازای کمترین مقدار مجاز برای p، به دست می‌آید؛ بنابراین، کافی است نشان دهیم:

$$f\left(p=\underline{p}=\frac{1-q}{1+q},q\right)=\frac{15q^2-12q+3}{1+q}>0 \text{ for all } q<\frac{1}{2}.$$

به ازای مقادیر مجاز q، مخرج این عبارت مثبت است. کمینه مقدار صورت کسر نیز برابر ۰.۶ و مثبت است؛ بنابراین، مقدار تابع $f(p,q)$ مثبت است و به‌این‌ترتیب، در این حالت انتخاب D نمی‌تواند بهترین واکنش باشد.

حالت ۳: $q = 1/2$

$$f\left(p,q=\frac{1}{2}\right)=0.5>0$$

به‌این‌ترتیب، در این حالت نیز انتخاب D نمی‌تواند بهترین واکنش باشد؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم حرکت D هرگز بهترین واکنش بازیگر ۳ نیست.

b) برای اینکه نشان دهیم انتخاب D اکیداً مغلوب نیست، حرکت ترکیبی σ_3 را برای بازیگر ۳ در نظر بگیرید:

$$\sigma_3(A)=\alpha,\qquad \sigma_3(B)=\beta,\qquad \sigma_3(C)=1-\alpha-\beta$$

فرض کنید انتخاب D اکیداً مغلوب حرکت σ_3 باشد. در این صورت، به ازای تمام استراتژی‌های ممکن بازیگر ۱ (σ_1) و بازیگر ۲ (σ_2) داریم: $u_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) > u_3(\sigma_1,\sigma_2,D)$

اگر بازیگر ۱ و ۲ به ترتیب انتخاب‌های U و L را بازی کنند:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 9\alpha$$

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) = 6$$

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) > u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \Rightarrow \alpha > \frac{2}{3}.$$

اگر بازیگر ۱ و ۲ به ترتیب انتخاب‌های D و R را بازی کنند:

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 9\big(1-(\alpha+\beta)\big)$$

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) = 6$$

$$u_3(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) > u_3(\sigma_1,\sigma_2,D) \Rightarrow \alpha+\beta < \frac{1}{3}.$$

به‌این‌ترتیب، ازآنجاکه دو نامساوی بالا هم‌زمان نمی‌توانند برقرار باشند، حرکت σ_3 نمی‌تواند حرکت D را مغلوب کند و نتیجه می‌گیریم حرکت D اکیداً مغلوب نیست.

فصل ۱ تمرین ۱۲: مهرداد پورقاسم

فرض کنید بازیگر ۲ هر یک از انتخاب‌های U و D را به ترتیب با احتمال‌های p و $1-p$ و بازیگر ۳ هر یک از انتخاب‌های l و r را به ترتیب با احتمال‌های q و $1-q$ بازی می‌کند. در این صورت پیامد انتظاری بازیگر ۱ از حرکت L، $u_1(L,\sigma_2,\sigma_3)$، برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} u_1&(L,\sigma_2,\sigma_3) \\ &= pq(\pi+4\varepsilon) + p(1-q)(\pi-4\varepsilon) + (1-p)q(\pi+4\varepsilon) + (1-p)(1-q)(\pi-4\varepsilon) \\ &= \pi + (4\varepsilon)q\big(p+(1-p)\big) + (-4\varepsilon)(1-q)\big(p+(1-p)\big) = \pi + 4\varepsilon(2q-1). \end{aligned}$$

به‌طور مشابه پیامد انتظاری بازیگر ۱ از حرکت‌های M و R نیز برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} u_1&(M,\sigma_2,\sigma_3) \\ &= pq(\pi-\eta) + p(1-q)\left(\pi+\frac{\eta}{2}\right) + (1-p)q\left(\pi+\frac{\eta}{2}\right) + (1-p)(1-q)(\pi-\eta) \\ &= \pi + \eta\left(\frac{3p+3q}{2} - 3pq - 1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1&(R,\sigma_2,\sigma_3) \\ &= pq(\pi-4\varepsilon) + p(1-q)(\pi+4\varepsilon) + (1-p)q(\pi-4\varepsilon) + (1-p)(1-q)(\pi+4\varepsilon) \end{aligned}$$

$$= \pi + (4\varepsilon)(1-q)\big(p + (1-p)\big) + (-4\varepsilon)q\big(p + (1-p)\big) = \pi + 4\varepsilon(1-2q)\ .$$

h) باید نشان دهیم در مقابل هر حرکت ترکیبی بازیگر ۲ و ۳، حرکت M بهترین واکنش بازیگر ۱ نیست.

مشتق پیامد انتخاب M نسبت به p را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u_1(M, \sigma_2, \sigma_3)}{\partial p} = \eta(3/2 - 3q)$$

با توجه به این عبارت ما سه حالت خواهیم داشت:

حالت ۱: $q > 1/2$

در این حالت مشتق پیامد انتخاب M نسبت به p، همواره مقداری منفی است؛ بنابراین، بیشینه مقدار پیامد M به ازای $p = 0$ به دست می‌آید. در این صورت، پیامد M به ازای $p = 0$ برابر است با:

$$u_1(M, \sigma_2, \sigma_3) = \pi + \eta\left(\frac{3}{2}q - 1\right) < \pi + 4\varepsilon\left(\frac{3}{2}q - 1\right) < \pi + 4\varepsilon(2q - 1) = u_1(L, \sigma_2, \sigma_3)$$

دقت کنید که پیامد انتخاب L برای بازیگر ۱ مستقل از p است ؛ بنابراین، این نامساوی برای تمامی مقادیر p برقرار است. به‌این‌ترتیب، در این حالت انتخاب M نمی‌تواند بهترین واکنش باشد.

حالت ۲: $q < 1/2$

در این حالت مشتق پیامد انتخاب M نسبت به p، همواره مقداری مثبت است؛ بنابراین، بیشینه مقدار پیامد M به ازای $p = 1$ به دست می‌آید. در این صورت، پیامد M به ازای $p = 1$ برابر است با:

$$u_1(M, \sigma_2, \sigma_3) = \pi + \eta\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}q\right) < \pi + \eta\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}q - \frac{1}{2}q\right) = \pi + \eta(1 - 2q)$$
$$< \pi + 4\varepsilon(1 - 2q) = u_1(R, \sigma_2, \sigma_3)$$

دقت کنید که پیامد انتخاب R برای بازیگر ۱ مستقل از p است؛ بنابراین، این نامساوی برای تمامی مقادیر p برقرار است. به‌این‌ترتیب، در این حالت انتخاب M نمی‌تواند بهترین واکنش باشد.

حالت ۳: $q = 1/2$

در این حالت:

$$u_1(M, \sigma_2, \sigma_3) = \pi - \frac{\eta}{4} < \pi = u_1(R, \sigma_2, \sigma_3) = u_1(L, \sigma_2, \sigma_3)$$

به‌این‌ترتیب، در این حالت نیز انتخاب M نمی‌تواند بهترین واکنش باشد؛ بنابراین، نتیجه می‌گیریم حرکت M هرگز بهترین واکنش بازیگر ۱ نیست.

i) برای اینکه نشان دهیم انتخاب M اکیداً مغلوب نیست، حرکت ترکیبی σ_1 را برای بازیگر ۱ در نظر بگیرید:

$$\sigma_1(L) = \alpha, \qquad \sigma_1(R) = 1 - \alpha$$

فرض کنید انتخاب M اکیداً مغلوب حرکت σ_1 باشد. در این صورت به ازای تمام استراتژی‌های ممکن بازیگر ۲ (σ_2) و بازیگر ۳ (σ_3) داریم: $u_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > u_1(M, \sigma_2, M)$.

دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۱: $\alpha \leq 1/2$

اگر بازیگر ۲ و ۳ به ترتیب انتخاب‌های U و r را بازی کنند:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \pi - 4\varepsilon(1 - 2\alpha)$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, M) = \pi + \frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow u_1(\sigma_1, \sigma_2, M) \geq u_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,.$$

به‌این‌ترتیب، در این حالت انتخاب M اکیداً مغلوب نیست.

حالت ۲: $\alpha > 1/2$

اگر بازیگر ۲ و ۳ به ترتیب انتخاب‌های D و l را بازی کنند:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \pi - 4\varepsilon(2\alpha - 1)$$

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2, M) = \pi + \frac{\eta}{2}$$

$$\Rightarrow u_1(\sigma_1, \sigma_2, M) \geq u_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,.$$

به‌این‌ترتیب، در این حالت نیز انتخاب M اکیداً مغلوب نیست.

c) برای نمونه، حالتی را در نظر بگیرید که بازیگر ۲ و ۳ با احتمال ۰.۵ انتخاب (U, r) و با احتمال ۰.۵ انتخاب (D, l) را بازی می‌کنند. در این صورت هر انتخاب ترکیبی شامل انتخاب L و R برای بازیگر ۱، برای او پیامد π را به همراه خواهد داشت. درحالی‌که، اگر بازیگر ۱ انتخاب M را بازی کند، پیامد آن برابر $\pi + \eta/2$ خواهد بود. درنتیجه، انتخاب M می‌تواند بهترین واکنش بازیگر ۱باشد.

فصل ۱، تمرین ۱۳: سعید حجتی نژاد

ابتدا تعادل نش محض بازی را بررسی می‌کنیم. برای این کار بهترین پاسخ محض هر بازیگر را به ازای هر حرکت محض بازیگر دیگر می‌یابیم. اگر بهترین پاسخ‌های دو بازیگر در خانه‌هایی تقاطع داشت، آن خانه‌ها تعادل‌های نش محض هستند. خواهیم داشت:

بازیگر ۲

بازیگر ۱

	b1	b2	b3	b4
a1	(0 , $\underline{7}$)	(2 , 5)	($\underline{7}$, 0)	(0 , 1)
a2	(5 , 2)	($\underline{3}$, $\underline{3}$)	(5 , 2)	(0 , 1)
a3	($\underline{7}$, 0)	(2 , 5)	(0 , $\underline{7}$)	(0 , 1)
a4	(0 , $\underline{0}$)	(0 , -2)	(0 , $\underline{0}$)	($\underline{10}$, -1)

همانطور که پیداست حرکت $(a_2 . b_2)$ تنها تعادل نش محض این بازی است. اما برای اینکه بتوانیم نشان دهیم این تعادل، تنها تعادل نش بازی است، باید ثابت کنیم که این بازی تعادل نش ترکیبی ندارد. برای این کار، ابتدا با حذف حرکت‌های اکیدا مغلوب کمی جدول را ساده‌تر می‌کنیم. در صورتی که بازیگر ۲ بین حرکت‌های b_1 و b_3 حرکت ترکیبی با احتمال ۰.۵ انجام دهد، پیامد انتظاری او به ازای هر حرکت بازیگر ۱ به شکل زیر خواهد شد:

بازیگر ۲

بازیگر ۱

	b1 (0.5) , b2 (0.5)	b4
a1	3.5	1
a2	2	1
a3	3.5	1
a4	0	-1

همانطور که مشخص است، حرکت b_4 به این حرکت ترکیبی اکیدا مغلوب است و در نتیجه هیچگاه جزو مجموعه بهترین پاسخ‌ها نخواهد بود. با حذف b_4 به جدول زیر می‌رسیم:

بازیگر ۲

بازیگر ۱

	b1	b2	b3
a1	(0 , 7)	(2 , 5)	(7 , 0)

a2	(5 , 2)	(3 , 3)	(5 , 2)
a3	(7 , 0)	(2 , 5)	(0 , 7)
a4	(0 , 0)	(0 , -2)	(0 , 0)

همانطور که مشخص است، حرکت a_4 نسبت به حرکت a_2 اکیدا مغلوب است. پس از حذف حرکت a_4 به جدول زیر می‌رسیم:

بازیگر ۲

بازیگر ۱		b1	b2	b3
	a1	(0 , 7)	(2 , 5)	(7 , 0)
	a2	(5 , 2)	(3 , 3)	(5 , 2)
	a3	(7 , 0)	(2 , 5)	(0 , 7)

حال باید تمام حالات حرکت ترکیبی را در نظر بگیریم و نشان دهیم که هیچکدام از آنها به تعادل نمی‌رسد. برای اینکار جایگشت‌های مختلف (حالت‌های مختلف بازی ترکیبی) را با حرکت‌های بازیگر ۱ شروع می‌کنیم:

بازیگر ۲

بازیگر ۱			x	y	1-x-y
			b1	b2	b3
	p	a1	(0 , 7)	(2 , 5)	(7 , 0)
	q	a2	(5 , 2)	(3 , 3)	(5 , 2)
	1-p-q	a3	(7 , 0)	(2 , 5)	(0 , 7)

حالت ۱)

فرض کنید بازیگر ۲ بین b_1 و b_2 ترکیب کند، در اینصورت برای بازیگر ۱ خواهیم داشت:

$$U_1(a_1|x+y=1) = 2-2x; \quad U_1(a_2|x+y=1) = 3+2x; \quad U_1(a_3|x+y=1) = 2+5x;$$

پس بازیگر ۱ a_1 را بازی نمی‌کند (زیرا به a_2 اکیدا مغلوب است و مطلوبیت آن همواره کمتر است). برای اینکه بازیگر ۲ بین b_1 و b_2 بی‌تفاوت باشد:

$$U_2(b_1|p=0) = 2q = U_2(b_2|p=0) = 3-2q$$

$$\rightarrow \quad q = \frac{3}{4}$$

در این صورت برای بازیگر ۲ خواهیم داشت:

$$U_2(b_3|p = 0.q = \frac{3}{4}) = 7 - 5q = 7 - \frac{15}{4} = 3.25 > \ U_2(b_1|p = 0.q = \frac{3}{4}) = 1.5$$

در این صورت اصلا بازیگر ۲ انگیزه انحراف به حرکت b_3 دارد و در نتیجه تعادل نش ترکیبی در این حالت برقرار نیست.

حالت ۲)

فرض کنید بازیگر ۲ بین b_1 و b_3 ترکیب کند، در اینصورت برای بازیگر ۱ خواهیم داشت:

$$U_1(a_1|y = 0) = 7 - 7x; \quad U_1(a_2|y = 0) = 5; \quad U_1(a_3|y = 0) = 7x;$$

در اینجا برای بررسی حرکت ترکیبی بازیگر ۱ باید حالت های مختلف را در نظر بگیریم:

a) بازیگر ۱ بین a_1 و a_2 حرکت ترکیبی کند. در این صورت:

$$U_1(a_1) = U_1(a_2) \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{7}$$

که در اینصورت برای بازیگر ۲ خواهیم داشت:

$$U_2(b_1|p + q = 1) = 2 + 5p = U_2(b_3|p + q = 1) = 2 - 2p$$
$$p = 0$$

که در این حالت بازیگر ۲ انگیزه انحراف به حرکت b_2 را دارد و تعادل برقرار نیست.

b) بازیگر ۱ بین a_1 و a_3 ترکیب کند. در این صورت:

$$U_1(a_1) = U_1(a_3) \quad \rightarrow \quad x = 0.5$$

که در اینصورت بازیگر ۱ انگیزه انحراف به حرکت a_2 را دارد و تعادل برقرار نیست.

حالت ۳)

فرض کنید بازیگر ۲ بین سه حرکت خود ترکیب کند. در اینصورت برای بازیگر ۱ خواهیم داشت:

$$U_1(a_1) = 7 - 7x - 5y; \quad U_1(a_2) = 5 - 2y; \quad U_1(a_3) = 7x + 2y;$$

در اینجا نیز باید حالت‌های مختلف را در نظر بگیریم:

a) بازیگر ۱ بین سه حرکت خود ترکیب کند.

$$U_1(a_1) = U_1(a_2) = U_1(a_3)$$
$$y = 2$$

که غیر قابل قبول است. پس در این حالت تعادل برقرار نیست.

b) بازیگر ۱ بین a_1 و a_2 ترکیب کند. در اینصورت حرکت b_3 برای بازیگر ۲ اکیدا مغلوب خواهد شد و بازیگر ۲ باید بین b_1 و b_2 ترکیب کند که این حالت را هم قبلا بررسی کرده بودیم.

c) بازیگر ۱ بین a_1 و a_3 ترکیب کند. در اینصورت حرکت هیچ p وجود نخواهد داشت که بتواند بازیگر ۲ را بین سه حرکت خود بی‌تفاوت کند.

در نتیجه این بازی تعادل نش ترکیبی ندارد و تنها تعادل نش بازی، تعادل نش محض است.

فصل ۱، تمرین ۱۴: سپیده عبداللهی

قسمت a)

حرکت M برای بازیگر ۲ یک بازی بدون ریسک و همواره با پیامد صفر است در حالی که بقیه حرکات پیامدهای سنگین منفی برای بازیگر ۲ می‌توانند داشته باشند.

قسمت b)

بازیگر ۲

		LL	L	M	R
بازیگر ۱	U	(100,2)	(-100,1)	(0,0)	(-100,-100)
	D	(-100,-100)	(100,-49)	(1,0)	(100,2)

پس $\{U,LL\}$ و $\{D,R\}$ دو تعادل محض این بازی اند.

قسمت c)

برای بازیگر ۱ حرکت ترکیبی را در نظر می‌گیریم:

		LL	L	M	R
p	U	(100,2)	(-100,1)	(0,0)	(-100,-100)
$1-p$	D	(-100,-100)	(100,-49)	(1,0)	(100,2)

$$\begin{cases} U_2(LL,\sigma_2) = 102p - 100 \\ U_2(L,\sigma_2) = 50p - 49 \\ U_2(M,\sigma_2) = 0 \\ U_2(R,\sigma_2) = 2 - 102p \end{cases}$$

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات LL و L**

		q	$1-q$
		LL	L
p	U	(100,2)	(-100,1)
$1-p$	D	(-100,-100)	(100,-49)

$$102p-100=50p-49 \Rightarrow p=\frac{51}{52}$$

به ازای $p=\frac{51}{52}$، انگیزه انحرافی به M و R وجود ندارد. حال برای بازیگر ۱ داریم:

$$\begin{matrix} U_1(U)=200q-100 \\ U_1(D)=100-200q \end{matrix} \Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

بنابراین حالت $\{\left(\frac{51}{52},\frac{1}{52}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0\right)\}$ یک تعادل نش است.

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات LL و M**

		q	$1-q$
		LL	M
p	U	(100,2)	(0,0)
$1-p$	D	(-100,-100)	(1,0)

$$102p-100=0 \Rightarrow \mathrm{p}=\frac{50}{51}$$

به ازای $p=\frac{50}{51}$، انگیزه انحراف به L وجود دارد:

$$U_1(M,\sigma_2)=0<U_2(L,\sigma_2)=0.02$$

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات LL و R**

		q	$1-q$
		LL	R
p	U	(100,2)	(-100,-100)
$1-p$	D	(-100,-100)	(100,2)

$$102p-100=2-102p \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

به ازای $p=\frac{1}{2}$، انگیزه انحراف به M وجود دارد:

$$U_1(R,\sigma_2)=-49<U_1(M,\sigma_2)=0$$

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات L و M**

		q	$1-q$
		L	M
p	U	(-100,1)	(0,0)
$1-p$	D	(100,-49)	(1,0)

$$50p-49=0 \Rightarrow p=\frac{49}{50}$$

به ازای $p=\frac{49}{50}$، انگیزه انحرافی به LL و R وجود ندارد .حال برای بازیگر ۱ داریم:

$$\begin{matrix} U_1(U)=-100q \\ U_1(D)=99q+1 \end{matrix} \Rightarrow q=-\frac{1}{199}$$

پس در این حالت تعادل نش ترکیبی نداریم.

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات L و R**

		q	$1-q$
		L	R
p	U	(-100,1)	(-100,-100)
$1-p$	D	(100,-49)	(100,2)

$$50p-49=2-102p \Rightarrow p=\frac{51}{152}$$

به ازای $p=\frac{51}{152}$، انگیزه انحراف به M وجود دارد:

$$U_1(R,\sigma_2)=-32.22<U_1(M,\sigma_2)=0$$

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات M و R**

		q	$1-q$
		M	R
p	U	(0,0)	(-100,-100)
$1-p$	D	(1,0)	(100,2)

$$2-102p=0 \Rightarrow p=\frac{1}{51}$$

به ازای $p=\frac{1}{51}$، انگیزه انحرافی به L و LL وجود ندارد .حال برای بازیگر ۱ داریم:

$$\begin{matrix} U_1(U)=100q-100 \\ U_1(D)=100-99q \end{matrix} \Rightarrow q>1$$

پس در این حالت تعادل نش ترکیبی نداریم.

نکته: فقط یک تعادل نش ترکیبی برای ترکیب کردن ۲ حرکت برای بازیگر ۲ وجود دارد، پس ترکیب بین 3 و ۴ حرکت برای بازیگر ۲ امکان پذیر نیست.

قسمت d)

همانطور که در قسمت c نشان داده شد به ازای $p \in (\frac{1}{51}, \frac{49}{50})$، M بهترین واکنش بازیگر ۲ است (پیامدهای بقیه حرکات همگی منفی‌اند). به دلیل این که فقط در بازه کوچکی M بهترین واکنش بازیگر ۲ نیست، می‌توان گفت معقول است که بازیگر ۲ همواره حرکت M را بازی کند.

قسمت e)

زمانی حرکت ترکیبی به مثابه شرایط پایدار تعبیر می‌شود که مجموعه حرکات بازیکن شامل ۲ حرکت باشد. در این حالت زمانی که تعادل نش ترکیبی رخ می‌دهد، بهترین پاسخ تغییر می‌کند و تکیه‌گاه تعادل نش ترکیبی شامل حرکات تعادل نش محض هست، اما در این سوال مجموعه حرکات بازیکن ۲ شامل ۴ حرکت است و بهترین پاسخ (همانطور که در قسمت d) هم دیده شد) فقط شامل LL و L نمی‌باشد؛ پس جمله گفته شده رد می‌شود.

قسمت f)

بهترین پیامد حاصل از حرکت محض برای بازیگر ۱ و ۲ به ترتیب ۱۰۰ و ۲ است و اگر مذاکره‌ای قبل بازی انجام شود دو بازیگر روی یکی از تعادل‌های نش محض به توافق می‌رسند و M بازی نمی‌شود.

فصل ۱، تمرین ۱۵: محمدصدرا حیدری

قسمت a) فرض می‌کنیم بازیگران اول و دوم به صورت مستقل از هم بازی می‌کنند.

$$\sigma_1 = \{U: p, \qquad D: 1-p\}$$
$$\sigma_2 = \{L: 1-q, \qquad R: q\}$$

بنابراین مطلوبیت حاصل از هرکدام از حرکت‌های بازیگر سوم برای خودش برابراست با:

$$U(M_1) = 8p(1-q) = 8p - 8pq$$
$$U(M_2) = 4p(1-q) + 4q(1-p) = 4p + 4q - 8pq$$
$$U(M_3) = 8q(1-p) = 8q - 8pq$$
$$U(M_4) = 3$$

حرکت M_2 زمانی می‌تواند بهترین واکنش بازیگر ۳ باشد که بتوان p و q را به‌گونه‌ای پیدا کرد که داشته باشیم:

$$U(M_2) > \max\{U(M_1), U(M_3), U(M_4)\}$$

داریم:

$$\max\{8p - 8pq, 8q - 8pq\} = 8\max\{p,q\} - 8pq = 4 \times 2\max\{p,q\} - 8pq$$

همچنین می‌داینم $p + q \leq 2 \times \max\{p,q\}$ بنابراین داریم:

$$\max\{U(M_1), U(M_3)\} = 4 \times 2\max\{p,q\} - 8pq \geq 4(p+q) - 8pq = U(M_2)$$

بنابراین به‌ازای هیچ باوری نسبت به p و q، حرکت M_2 بهترین واکنش بازیگر ۳ نخواهد بود.

قسمت b) در این قسمت فرض می‌کنیم هرکدام از ۴ خانه جدول با احتمال مشخصی بازی می‌شود.

بازیگر ۲

بازیگر ۱	p	r
	q	s

$$p + q + r + s = 1$$

مانند قسمت قبل داریم:

$$U(M_1) = 8p$$

$$U(M_2) = 4(p+s)$$

$$U(M_3) = 8s$$

$$U(M_4) = 3$$

بنابراین برای این که M_2 بهترین واکنش باشد، باید احتمالات را به گونه‌ای مشخص کنیم که:

$$U(M_2) \geq \max\{U(M_1), U(M_3), U(M_4)\}$$

و داریم:

$$\max\{U(M_1), U(M_3)\} = 8\max\{p,s\} = 4 \times 2\max\{p,s\} \geq 4\,(p+s) = U(M_2)$$

بنابراین هیچ باوری وجود ندارد که در آن حرکت M_2 بهترین واکنش بازیگر سوم باشد.

قسمت c) ابتدا تعادل‌های محض را پیدا می‌کنیم.

«بازیگر ۲»

بازیگر ۱	L	R
U	8, 8, 8	0, 0, 0

«بازیگر ۲»

	L	R
U	4, 4, 4	0, 0, 0

«بازیگر ۲»

	L	R
U	0, 0, 0	0, 0, 0

«بازیگر ۲»

	L	R
U	3, 3, 3	3, 3, 3

D	0, 0, 0	0, 0, 0	D	0, 0, 0	4, 4, 4	D	0, 0, 0	8, 8, 8	D	3, 3, 3	3, 3, 3
	M_1			M_2			M_3			M_4	

«بازیگر ۳»

بهترین واکنش بازیگر ۱ با خط زرد رنگ، بازیگر ۲ با خط سبز رنگ و بازیگر ۳ با خط قرمز رنگ مشخص شده‌اند. در نتیجه بازی بالا ۴ تعادل نش محض دارد.

$$EQ_1 = \{U, L, M_1\}$$

$$EQ_2 = \{D, R, M_3\}$$

$$EQ_3 = \{U, R, M_4\}$$

$$EQ_4 = \{D, L, M_4\}$$

حال برای به‌دست آوردن حرکات ترکیبی تمام حالات را بررسی می‌کنیم. قبل از آن از قضیه ۱.۱ و نتیاج قبلی می‌دانیم حرکت M_2 به واسطه آن که هیچ‌گاه بهترین واکنش بازیگر ۳ نیست، مغلوب است و پایه حرکت ترکیبی در تعادل نمی‌باشد.

- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_3\}$ ترکیب کند.** برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ اگر بازیگر ۱ با احتمال p حرکت U و بازیگر ۲ با احتمال q حرکت R را بازی کند داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_3) = 8q - 8pq \end{Bmatrix} \Longrightarrow p = q$$

حال برای بی‌تفاوت شدن بازیگر دوم داریم (بازیگر ۳ با احتمال r حرکت M_3 را بازی می‌کند)

$$\begin{Bmatrix} U_2(L) = 8p - 8pr \\ U_2(R) = 8r - 8pr \end{Bmatrix} \Longrightarrow p = r$$

برای بی‌تفاوت شدن بازیگر اول با تعریف $s = 1 - r$ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_1(U) = 8s - 8qs \\ U_1(D) = 8q - 8qs \end{Bmatrix} \Longrightarrow q = s = 1 - r$$

بنابراین:

$$1 - r = r \Rightarrow r = 0.5$$

در این حالت مطلوبیت بازیگر سوم برابر می‌شود با:

$$U_3(M_1) = U_3(M_3) = 4 - 2 = 2$$

که از مطلوبیت حرکت M_4 کمتر است و انگیزه انحراف وجود دارد. بنابراین در این حالت نیز تعادل نداریم.

- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_4\}$ ترکیب کند.** حرکات ترکیبی را مانند قسمت قبل تعریف می‌کنیم و برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_4) = 3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow p(1-q) = \frac{3}{8}$$

حال برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ داریم(بازیگر ۳ با احتمال r حرکت M_4 را بازی می‌کند)

$$\begin{Bmatrix} U_2(L) = 8p - 8pr + 3r \\ U_2(R) = 3r \end{Bmatrix} \Longrightarrow 8p(1-r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

که $p = 0$ با شرط اول در تناقض است و در حالت $r = 1$ به‌ازای هر p و q که شرط $p(1-q) = \frac{3}{8}$ را برقرار کند بی‌نهایت تعادل ترکیبی داریم.

- **بازیگر ۳ بین $\{M_3, M_4\}$ ترکیب کند.** با توجه به تقارن مسئله این حالت مانند قبل است.
- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_3, M_4\}$ ترکیب کند.** برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_3) = 8q - 8pq \\ U_3(M_4) = 3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} p = q \\ p(1-q) = \frac{3}{8} \Rightarrow p - p^2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

که معادله بالا ریشه حقیقی ندارد بنابراین هیچ تعادل ترکیبی در این حالت نداریم.

- **بازیگر ۳ ترکیب نکند.** این حالت قبلا بررسی شد. برای این که بازیگر ۱ و ۲ میان حرکاتشان بی‌تفاوت شوند و ترکیب کنند بازیگر ۳ فقط می‌تواند حرکت M_4 را بازی کند. در این حالت به‌ازای هر مقدار p و q که شرط $p(1-q) = \frac{3}{8}$ را برقرار کند بی‌نهایت تعادل ترکیبی داریم.

فصل ۱، تمرین ۱۶: سپیده عبداللهی

قسمت a)

$$U_i'(\sigma_i) = \min_{\sigma_{-i}} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$U_i'(\sigma_i) \leq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\max_{\sigma_i} U_i'(\sigma_i) \leq \max_{\sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\max_{\sigma_i} U_i'(\sigma_i) \leq \min_{\sigma_{-i}} \max_{\sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

$$\max_{\sigma_i} \min_{\sigma_{-i}} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq \min_{\sigma_{-i}} \max_{\sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

قسمت b)

فرض کنید تعادل نش در $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$ اتفاق بیفتد

$$U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = V^*$$

$$\sigma_1^* = Br(\sigma_2^*) \Rightarrow V^* = \max_{\sigma_1} U_1(\sigma_1, \sigma_2^*)$$

$$\sigma_2^* = Br(\sigma_1^*) \Rightarrow V^* = \min_{\sigma_2} U_1(\sigma_1^*, \sigma_2)\ (I)$$

به دلیل این که بازی با مجموع صفر است رابطه (I) برقرار است.

$$\min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} U_1(\sigma_1, \sigma_2) \le \max_{\sigma_1} U_1(\sigma_1, \sigma_2^*) = V^* = \min_{\sigma_2} U_1(\sigma_1^*, \sigma_2) \le \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} U_i(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\Rightarrow V_i \le W_i$$

پس طبق بخش a)

$$V_i = W_i$$

قسمت c)

به دلیل این که $\{\sigma_1', \sigma_2'\}$ تعادل نش است داریم:

$$U_1(\sigma_1', \sigma_2') \ge U_1(\sigma_1'', \sigma_2')$$

$$U_2(\sigma_1'', \sigma_2'') \ge U_2(\sigma_1'', \sigma_2')$$

با توجه به این که بازی با مجموع صفر است داریم:

$$-U_2(\sigma_1'', \sigma_2'') \le -U_2(\sigma_1'', \sigma_2') \Rightarrow U_1(\sigma_1'', \sigma_2') \ge U_1(\sigma_1'', \sigma_2'')$$

و می‌دانیم که مقدار $U_1(\sigma_1', \sigma_2')$ و $U_1(\sigma_1'', \sigma_2'')$ برابر است:

$$U_1(\sigma_1', \sigma_2') = U_1(\sigma_1'', \sigma_2'') = U_1(\sigma_1'', \sigma_2')$$

و $\{\sigma_1'', \sigma_2'\}$ نیز تعادل نش است، با همین استدلال می‌توان پی برد که $\{\sigma_1', \sigma_2''\}$ هم تعادل نش است.

فصل ۱، تمرین ۱۷: سپیده عبداللهی

A

			p_1	p_2	$p_3 = 1 - p_1 - p_2$
			1	۲	۳
	q_1	۱	(0,0)	$(-V_2, V_2)$	$(-V_3, V_3)$
B	q_2	۲	$(-V_1, V_1)$	(0,0)	$(-V_3, V_3)$
	$q_3 = 1 - q_1 - q_2$	۳	$(-V_1, V_1)$	$(-V_2, V_2)$	(0,0)

فرض کنید تعادل نش در $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*\}$ اتفاق بیفتد. اگر در حالت تعادل A به هدفی حمله نکند، قطعا B از آن هدف دفاع نمی‌کند. همچنین اگر B از هدفی دفاع نکند، قطعا A آن هدف را به هدفی با شماره بالاتر ترجیح می‌دهد. پس اگر A به هدف ۲ حمله نکند، قطعا به هدف ۳ نیز حمله نخواهد کرد و فقط دو ترکیب بین اهداف ۱و ۲ و بین اهداف ۱، ۲ و۳ باید بررسی شود.

$$\begin{aligned} &U_A(1) = V_1(1 - q_1) \quad && U_B(1) = -V_2 p_2 - V_3(1 - p_1 - p_2) \\ &U_A(2) = V_2(1 - q_2) \quad ، && U_B(2) = -V_1 p_1 - V_3(1 - p_1 - p_2) \\ &U_A(3) = V_3(q_1 + q_2) && U_B(3) = -V_2 p_2 - V_1 p_1 \end{aligned}$$

- **بازیگر A بین حمله به هدف‌های ۱ و ۲ ترکیب کند.**

$$V_1(1 - q_1^*) = V_2 q_1^* \Rightarrow q_1^* = \frac{V_1}{V_1 + V_2}, q_2^* = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$$

حال برای بازیگر B داریم:

$$V_1 p_1 = V_2(1 - p_1) \Rightarrow p_1^* = \frac{V_2}{V_1 + V_2}, p_2^* = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$$

برای این که این ترکیب تعادل نش باشد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$U_A(3) \le \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} \Rightarrow V_3 \le \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}$$

- **بازیگر A بین حمله به هدف‌های ۱، ۲ و ۳ ترکیب کند.**

$$\left.\begin{array}{r}V_1(1-q_1)=V_2(1-q_2)\Rightarrow V_1q_1=V_1-V_2+V_2q_2\\ V_1(1-q_1)=V_3(q_1+q_2)\Rightarrow q_1=\dfrac{V_1-V_3q_2}{V_1+V_3}\end{array}\right.\Rightarrow q_2=\frac{V_1V_2+V_2V_3-V_3V_1}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

$$,q_1=\frac{V_1V_2+V_3V_1-V_2V_3}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

$$\left.\begin{array}{r}V_2p_2+V_3(1-p_1-p_2)=V_1p_1+V_3(1-p_1-p_2)\Rightarrow p_1=\dfrac{V_2p_2}{V_1}\\ V_2p_2+V_3(1-p_1-p_2)=V_2p_2+V_1p_1\Rightarrow p_1=\dfrac{V_3(1-p_2)}{V_1+V_3}\end{array}\right.\Rightarrow p_2$$

$$=\frac{V_3V_1}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

$$,p_1=\frac{V_2V_3}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

در این مرحله تنها شرطی که باید بررسی شود این است که مقادیر q بزرگ‌تر از صفر باشند پس کافیست کمینه مقدار q که برابر q_3 است بزرگتر از صفر باشد:

$$V_2V_3+V_3V_1\geq V_1V_2$$

- **حل با استفاده از سوال قبل**

به دلیل این که این بازی، بازی با مجموع صفر است، می‌توانیم با استفاده از سوال قبل $\{p^*,q^*\}$ را طوری پیدا می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کند:

$$U_A(p^*,q^*)=\max_p\min_q V_1p_1(1-q_1)+V_2p_2(1-q_2)+V_3p_3(1-q_3)$$

حال جملاتی که وابستگی به q ندارند را از ماکزیمم گیری روی q خارج می‌کنیم. در این مرحله باید کمینه عبارت منفی را پیدا کنیم که به معنی آن است که بیشینه قدر مطلق آن را باید بیابیم:

$$=\max_p(V_1p_1+V_2p_2+V_3p_3-\ \max_q V_1p_1q_1+V_2p_2q_2+V_3p_3q_3)$$

به دلیل این که مقادیر V_ip_i همگی مثبت هستند و مقادیر q_i بین صفر و یک قرار دارند می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر ساده کرد:

$$=\max_p(V_1p_1+V_2p_2+V_3p_3-\ \max(V_1p_1,V_2p_2,V_3p_3))$$

۱. $\boldsymbol{\max(V_1p_1,V_2p_2,V_3p_3)=V_1p_1}$

پس q_1 برابر ۱ است:

$$U_A(1) = V_1(1-q_1) = 0$$
$$U_A(2) = V_2(1-q_2) = V_2$$
$$U_A(3) = V_3(q_1+q_2) = V_3$$

از آنجایی که V_2 و V_3 برابر نیستند، این حالت نمی‌تواند تعادل باشد.

نکته: برای $\max(V_1p_1, V_2p_2, V_3p_3) = V_3p_3$ و $\max(V_1p_1, V_2p_2, V_3p_3) = V_2p_2$ نیز به همین شکل می‌توان نشان داد که تعادلی نداریم.

۲. $V_1p_1 = V_2p_2 = V_3p_3$

$$\left.\begin{array}{l} V_2p_2 = V_1p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{V_2p_2}{V_1} \\ V_3(1-p_1-p_2) = V_1p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{V_3(1-p_2)}{V_1+V_3} \end{array}\right. \Rightarrow p_2 = \frac{V_3V_1}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

$$,p_1 = \frac{V_2V_3}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}\ ,p_3 = \frac{V_1V_2}{V_1V_2+V_2V_3+V_3V_1}$$

حال برای پیدا کردن q^*، مانند رویکرد قبلی بازیکن A را بی‌تفاوت بین سه حرکت حمله به ۱، ۲ و ۳ می‌کنیم و برای مثبت بودن مقادیر q_i به شرط زیر می‌رسیم:

$$V_2V_3 + V_3V_1 \geq V_1V_2$$

۳. $\max(V_1p_1, V_2p_2, V_3p_3) = V_1p_1 = V_2p_2$

$$V_2p_2 = V_1p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{V_2(1-p_3)}{V_1+V_2}\ ,p_2 = \frac{V_1(1-p_3)}{V_1+V_2}$$

$U_A(p^*, q^*)$ به شکل زیر در می‌آید:

$$U_A(p^*, q^*) = \max_p(V_1p_1 + V_3p_3)$$

تابعیت عبارت داخل پرانتز را برحسب p_3 می‌یابیم:

$$\Rightarrow V_3p_3 + V_1p_1 = V_3p_3 + \frac{V_2V_1(1-p_3)}{V_1+V_2} = \frac{V_2V_1}{V_1+V_2} + \left(V_3 - \frac{V_2V_1}{V_1+V_2}\right)p_3$$

- بیشینه عبارت بالا اگر $V_3 - \frac{V_2V_1}{V_1+V_2} < 0$ باشد، در $p_3 = 0$ اتفاق می‌افتد. برای پیدا کردن q^*، مانند رویکرد قبلی بازیکن A را بی‌تفاوت بین دو حرکت حمله به ۱ و ۲ می‌کنیم:

$$V_1(1-q_1^*) = V_2 q_1^* \Rightarrow q_1^* = \frac{V_1}{V_1+V_2}\ , q_2^* = \frac{V_2}{V_1+V_2}$$

پس این حالت تعادل است.

- بیشینه عبارت بالا اگر $V_3 - \frac{V_2V_1}{V_1+V_2} > 0$ باشد، در $p_3 = 1$ اتفاق می‌افتد. برای بی تفاوت کردن بازیکن B داریم:

$$U_B(1) = -V_2p_2 - V_3(1-p_1-p_2) = -V_3$$
$$U_B(2) = -V_1p_1 - V_3(1-p_1-p_2) = -V_3$$
$$U_B(3) = -V_2p_2 - V_1p_1 = 0$$

همانطور که مشخص است بازیکن B انگیزه انحراف از حرکت ترکیبی ۱ و ۲ به حرکت محض ۳ دارد و این حالت تعادل نیست.

۴. $\max(V_1p_1, V_2p_2, V_3p_3) = V_3p_3 = V_2p_2$

$$V_2p_2 = V_3p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{V_2(1-p_1)}{V_3+V_2}\ , p_2 = \frac{V_3(1-p_1)}{V_3+V_2}$$

$U_A(p^*, q^*)$ به شکل زیر در می‌آید:

$$U_A(p^*, q^*)\ = \max_p(V_1p_1 + V_3p_3)$$

تابعیت عبارت داخل پرانتز را برحسب p_1 می‌یابیم:

$$\Rightarrow V_3p_3 + V_1p_1 = \frac{V_2V_3(1-p_1)}{V_3+V_2} + V_1p_1 = \frac{V_2V_3}{V_3+V_2} + \left(V_1 - \frac{V_2V_3}{V_3+V_2}\right)p_1$$

ضریب p_1 در عبارت بالا منفی است و به این معنا ست که بیشینه عبارت بالا در $p_1 = 1$ اتفاق می‌افتد:

$$U_B(1) = -V_2p_2 - V_3(1-p_1-p_2) = 0$$
$$U_B(2) = -V_1p_1 - V_3(1-p_1-p_2) = -V_1$$
$$U_B(3) = -V_2p_2 - V_1p_1 = -V_1$$

همانطور که مشخص است بازیکن B انگیزه انحراف از حرکت ترکیبی ۲ و ۳ به حرکت محض ۱ دارد و این حالت تعادل نیست.

نکته: با همین روش می‌توان نشان داد که $\max(V_1p_1, V_2p_2, V_3p_3) = V_3p_3 = V_1p_1$ نیز تعادل نیست.

فصل ۱، تمرین ۱۸: حسن ابوذرپور

برای حل بخش دوم سوال ابتدا مساله را مرور می‌کنیم.

$$\begin{cases} if \quad S_1 + S_2 \leq 1 \longrightarrow (s_1, s_2) \\ if \quad S_1 + S_2 > 1 \longrightarrow \begin{cases} if\ S_i < S_j \longrightarrow (s_i, 1 - s_i) \\ if\ S_i = S_j \longrightarrow (0.5,0.5) \end{cases} \end{cases}$$

انتخاب اعداد بزرگتر از ۱ برای بازیگر دوم، با توجه به آن‌که انتخاب بازیگر اول کمتر از ۱ است، اکیدا مغلوب برای انتخاب‌های کوچکتر از ۱ است .پس در گام نخست تمامی استراتژی‌های بزرگتر مساوی یک برای بازیگر ۲ حذف می‌شود. در ادامه برای حل این مساله انتخاب فرد ۱ را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

حالت اول: اگر کمتر از ۰.۵ را بازی کند

$$\begin{cases} if\ s_2 < 0.5 \longrightarrow (s_1 < 0.5\,, s_2 < 0.5\,) \\ if\ s_2 = 0.5 \longrightarrow (s_1 < 0.5\,, s_2 = 0.5\,) \\ if\ s_2 > 0.5 \longrightarrow (s_1 < 0.5\,, s_2 = (1 - s_1) > 0.5) \end{cases}$$

حالت دوم: اگر ۰.۵ را بازی کند

$$\begin{cases} if\ s_2 < 0.5 \longrightarrow (s_1 = 0.5\,, s_2 < 0.5\,) \\ if\ s_2 = 0.5 \longrightarrow (s_1 = 0.5\,, s_2 = 0.5\,) \\ if\ s_2 > 0.5 \longrightarrow (s_1 = 0.5\,, s_2 = 0.5) \end{cases}$$

حالت سوم: اگر بیشتر از ۰.۵ بازی کند

$$\begin{cases} if\ s_2 < 0.5 \longrightarrow (s_1 = (1 - s_2) > 0.5\,, s_2 < 0.5\,) \\ if\ s_2 = 0.5 \longrightarrow (s_1 = 0.5\,, s_2 = 0.5\,) \\ if\ s_2 > 0.5 \longrightarrow \begin{cases} s_1 > s_2 \longrightarrow (s_1 = (1 - s_2) < 0.5\,, s_2 > 0.5) \\ s_1 = s_2 \longrightarrow (s_1 = 0.5\,, s_2 = 0.5) \\ s_1 < s_2 \longrightarrow (s_1 > 0.5\,, s_2 < 0.5) \end{cases} \end{cases}$$

مشاهده می‌شود که بازیگر ۱ اگر کمتر از نیم بازی کند، نسبتا مغلوب بر انتخاب‌های بزرگتر از ۰.۵ و اکیدا مغلوب را انتخاب ۰.۵ است. همچنین برای بازیگر ۲ نیز انتخاب‌های کوچکتر از ۰.۵ همگی حرکت اکیدا مغلوب بوده و حذف می‌شوند. حال انتخاب‌های هر بازیگر به بازه $[0.5,1)$ تقلیل می‌یابد.

حال در گام بعدی حالتی را در نظر می‌گیریم که بازیگر ۱ انتخاب $[0.5,1)$ را بازی کند که در این حالت پیامد بازی برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} if\ s_2 = 0.5 \longrightarrow & (s_1 = (1-s_2) = 0.5, s_2 = 0.5) \\ if\ s_2 > 0.5 \longrightarrow & \begin{cases} if\ s_1 < s_2 \rightarrow (s_1 > 0.5, s_2 = (1-s_1) < 0.5) \\ if\ s_1 = s_2 \longrightarrow (0.5,0.5) \\ if\ s_1 > s_2 \rightarrow (s_1 = (1-s_2) < 0.5, s_2 > 0.5) \end{cases} \end{cases}$$

در این حالت با توجه به تعریف حرکات نسبتا مغلوب، هیچ حرکتی بر حرکت دیگر نسبتا غالب نیست. لذا با حذف حرکات نسبتا مغلوب به همان بازه (۰.۵،۱] برای هر بازیگر میرسیم. اما نکته قابل تامل این است که دراین حالت بازیگران نسبت به پیامد بازی بی تفاوت نیستند. پس مجموعه محض انتخابی بدست آمده از حذف حرکات نسبتا مغلوب، در حالتی که بازیگران را نسبت به پیامد بی‌تفاوت کند، وجود ندارد. چنانچه تنها بی تفاوت بودن بازیگران نسبت به پیامد بازی را مدنظر بگیریم، بازیگران تنها حرکاتی را انتخاب خواهند کرد که بزرگتر از نیم بوده و با یکدیگر برابر باشد. پس در این حالت مجموعه بی‌تفاوتی بازیگران برابر خواهد بود با:

$$\{0.5 \leq (s_1 = s_2) < 1\}$$

دقت کنید که تعادل این بازی (۰.۵و۰.۵) است، اما این بخش به دنبال پیدا کردن یک فضای بی تفاوتی با استفاده از حذف حرکات نسبتا مغلوب است.

فصل ۱، تمرین ۱۹: فاطمه اصغری

الف) ابتدا باید فرم نرمال بازی را ترسیم کنیم. نام حرکت شمردن ستاره را S و نام حرکت رفتن به انبار غله را A می‌گذاریم، پس فرم نرمال به صورت زیر خواهد بود:

موش 1 : S_1 ستاره بشمارد , A_1 به انبار غله برود

موش 2 : S_2 ستاره بشمارد , A_2 به انبار غله برود

موش 3 : S_3 ستاره بشمارد , A_3 به انبار غله برود

	A_3	
	S_2	A_2
S_1	(۱، ۰، ۰)	(۱، ۱، ۰)

A_1	(۱، ۰، ۱)	$(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$

	S_3	
	S_2	A_2
S_1	(۰، ۰، ۰)	(۰، ۱، ۰)
A_1	(۱، ۰، ۰)	(۱، ۱، ۰)

$b_1(S_2, S_3) = A_1$ $\quad$ $b_2(S_1, S_3) = A_2$ $\quad$ $b_3(S_1, S_2) = A_3$

$b_1(S_2, A_3) = A_1$ $\quad$ $b_2(S_1, A_3) = A_2$ $\quad$ $b_3(S_1, A_2) = A_3$

$b_1(A_2, S_3) = A_1$ $\quad$ $b_2(A_1, S_3) = A_2$ $\quad$ $b_3(A_1, S_2) = A_3$

$b_1(A_2, A_3) = S_1$ $\quad$ $b_2(A_1, A_3) = S_2$ $\quad$ $b_3(A_1, A_2) = S_3$

در نتیجه سه تعادل نش محض داریم: (A_1, A_2, S_3) و (A_1, S_2, A_3) و (S_1, A_2, A_3)

کل رفاه جامعه در این حالت برابر با ۲ است. (در هر تعادلی که ببینیم، رفاه جامعه از مجموع رفاه تک تک افراد بدست آمده و لذا برابر با ۲ خواهد بود)

ب) در این قسمت مطلوبیت‌های انتظاری و استراتژی‌ها یکسان هستند. لذا برای داشتن استراتژی ترکیبی می‌توان گفت هر موش با احتمال P به انبار برود و با احتمال $1 - P$ به شمردن ستاره بپردازد. در حالتی که دو موش دیگر بین استراتژی‌های خود با احتمال P و $1 - P$، ترکیب می‌کنند، مطلوبیت انتظاری موش سوم از انتخاب هر کدام از استراتژی‌هایش باید با هم برابر باشد، به عنوان مثال برای موش ۱ باید مطلوبیت انتظاری موش ۱ اگر S_1 بازی کند برابر با مطلوبیت انتظاری او از بازی کردن A_1 باشد، پس داریم:

$$S_1: (1-P)(1-P) \times 0 + (1-P)P \times 0 + (1-P)P \times 0 + P \times P \times 0 = 0$$

$$A_1: (1-P)(1-P) \times 1 + P(1-P) \times 1 + (1-P)P \times 1 + P \times P \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow P = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

در این حالت مطلوبیت انتظاری هر موش از بازی کردن هر کدام از استراتژی‌هایش با هم برابر و برابر با صفر است. لذا رفاه کل جامعه در این حالت برابر با صفر است.

ج) ابتدا فرم نرمال این بازی را ترسیم می‌کنیم:

	S_3	
	S_2	A_2
S_1	$(0,0,0)$	$(0, a_2 - c_2, 0)$
A_1	$(a_1 - c_1, 0,0)$	$(a_1 - c_1, a_2 - c_2, 0)$

	A_3	
	S_2	A_2
S_1	$(0,0, a_3 - c_3)$	$(0, a_2 - c_2, a_3 - c_3)$
A_1	$(a_1 - c_1, 0, a_3 - c_3)$	$(b_1 - c_1, b_2 - c_2, b_3 - c_3)$

برای محاسبه تعادل نش ترکیبی به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم موش ۱ با احتمال P_1 به انبار غله می‌رود، موش ۲ با احتمال P_2 و موش ۳ با احتمال P_3 به انبار غله می‌رود. پس برای داشتن تعادل نش ترکیبی باید داشته باشیم:

مطلوبیت انتظاری برای موش ۱:

$$(1 - P_2)(1 - P_3)(a_1 - c_1) + P_2(1 - P_3)(a_1 - c_1) + (1 - P_2)P_3(a_1 - c_1) + P_2P_3(b_1 - c_1) = 0$$

مطلوبیت انتظاری برای موش ۲:

$$(1 - P_1)(1 - P_3)(a_2 - c_2) + P_1(1 - P_3)(a_2 - c_2) + (1 - P_1)P_3(a_2 - c_2) + P_1P_3(b_2 - c_2) = 0$$

مطلوبیت انتظاری برای موش ۳:

$$(1 - P_1)(1 - P_2)(a_3 - c_3) + P_1(1 - P_2)(a_3 - c_3) + (1 - P_1)P_2(a_3 - c_3) + P_1P_2(a_3 - c_3) = 0$$

با ساده سازی روابط داریم:

$$\left.\begin{aligned} P_1P_3 &= \frac{a_2-c_2}{a_2-b_2} \\ P_1P_2 &= \frac{a_3-c_3}{a_3-b_3} \\ P_2P_3 &= \frac{a_1-c_1}{a_1-b_1} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned} P_1 &= \sqrt{\frac{(a_2-c_2)(a_3-c_3)(a_1-b_1)}{(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_1-c_1)}} \\ P_2 &= \sqrt{\frac{(a_1-c_1)(a_3-c_3)(a_2-b_2)}{(a_1-b_1)(a_3-b_3)(a_2-c_2)}} \\ P_3 &= \sqrt{\frac{(a_1-c_1)(a_2-c_2)(a_3-b_3)}{(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-c_3)}} \end{aligned}$$

برای آن که بخواهیم جواب معتبر داشته باشیم باید مقادیر زیر رادیکال مثبت و کوچکتر از یک باشند. مثبت بودن که طبق صورت مسأله برقرار است لذا باید داشته باشیم:

$$(a_2-c_2)(a_3-c_3)(a_1-b_1) < (a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_1-c_1)$$

$$(a_1-c_1)(a_3-c_3)(a_2-b_2) < (a_1-b_1)(a_3-b_3)(a_2-c_2)$$

$$(a_1-c_1)(a_2-c_2)(a_3-b_3) < (a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-c_3)$$

رفاه جامعه نیز در این حالت برابر با صفر خواهد بود. مطلوبیت انتظاری هر موش از بازی کردن هر کدام از استراتژی‌هایش برابر با صفر است؛ بنابراین کل مطلوبیت جامعه برابر با صفر خواهد بود. پس اگر تعادل نشی بخواهد وجود داشته باشد یکتاست و مطلوبیت انتظاری کل جامعه برابر با صفر است.

د) اگر همه ی موش‌ها هم در شهر باشند تعادل نش به محض این صورت وجود دارد که فقط دو موش به انبار غله می‌روند و سایرین به شمردن ستاره‌ها می‌پردازند، این تعادل یک تعادل نش است زیرا هیچ موشی انگیزه تخطی از این شرایط را ندارد. اگر موشی که در انبار است بخواهد به شمردن ستاره بپردازد که مطلوبیتش کمتر می‌شود و موش‌هایی هم که در حال شمردن ستاره‌ها هستند اگر بروند به انبار غله مطلوبیتشان از صفر به یک عدد منفی کاهش می‌یابد، لذا هیچ موشی در این حالت انگیزه تخطی از این شرایط را ندارد. به تعداد $\binom{i}{2}$ تعادل نش محض داریم.

برای تعادل نش ترکیبی نیز می‌دانیم که هر موش باید بین رفتن به انبار غله و یا شمردن ستاره ها بی تفاوت باشد، از قسمت ب دیدیم که شمردن ستاره ها مطلوبیت انتظاری صفر دارد و لذا مطلوبیت انتظاری رفتن به انبار غله برای تمامی موش‌ها برابر با مطلوبیت انتظاری شمردن ستاره‌ها و برابر با صفر است. و لذا کل رفاه جامعه در این حالت برابر با صفر خواهد بود. بنابر قضیه ۷ (صفحه ۹ اسلاید ۴)، هر بازی با تعداد حرکات محدود، حداقل دارای یک تعادل نش ترکیبی است. و لذا تعادل نش ترکیبی در این جا وجود دارد و همانطور که در قسمت ب استدلال کردیم در صورتی که تعادل وجود داشته باشد و دستگاه معادلات جواب داشته باشد، این تعادل یکتاست.

فصل ۱، تمرین ۲۰: ملیکا عبدی

بازیگر ۲

بازیگر ۱

	A	B	C
a	(۰,۰)	(۴,۵)	(۵,۴)
b	(۵,۴)	(۰,۰)	(۴,۵)
c	(۴,۵)	(۵,۴)	(۰,۰)

با توجه به جدول، تعادل نش محض نداریم. برای تعادل نش ترکیبی، حالت‌های مختلف ترکیب را در نظر می‌گیریم:

بازیگر ۱ بین a و b ترکیب کند

اگر بازیگر ۱ حرکتش را ترکیب کند بازیگر ۲ نیز حتما باید ترکیب کند. چرا که به ازای حرکت محض بازیگر۲ با توجه به مطلوبیت‌های درج شده در جدول بازیگر۱ انگیزه حرکت ترکیبی نخواهد داشت. پس در این حالت باید مطلوبیت حداقل دو حرکت مختلف برای بازیگر۲ برابر شود تا او نیز ترکیب کند:

$$\sigma_1(a) = p, \sigma_1(b) = 1 - p \rightarrow \begin{cases} u_2(A) = 4(1-p) \\ u_2(B) = 5p \\ u_2(C) = 4p + 5(1-p) \end{cases}$$

با توجه به تقارنی که در مساله وجود دارد استراتژی مشابه دو بازیگر قابل پیش‌بینی است. برای همین واضح است که بازیگر دوم در برابر ترکیب a,b توسط بازیگر اول دست به ترکیب B,C یا A,C نخواهد زد اما برای وضوح بیشتر محاسبات مربوط به آن را انجام می‌دهیم:

- بازیگر۲ بین A,C ترکیب کند: بنابراین بازیگر ۲ باید بین این دو حرکت بی‌تفاوت شده باشد:

$$u_2(A) = u_2(C) \rightarrow p = -\frac{1}{3} \quad \text{تناقض}$$

- بازیگر۲ بین B,C ترکیب کند: بنابراین بازیگر ۲ باید این ترکیب را با احتمالی انجام دهد که بازیگر۱ را بین دو حرکت a,b بی‌تفاوت کرده باشد:

$$\sigma_2(B) = 1 - q, \sigma_2(C) = q \xrightarrow{u_1(a)=u_1(b)} 4(1-q) + 5q = 4q \rightarrow q = \frac{4}{3} \quad \text{تناقض}$$

- بازیگر۲ بین A,B ترکیب کند: برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات A ,B باید داشته باشیم $u_2(A) = u_2(B) \rightarrow p = \frac{4}{9}$. با توجه به فرض اولیه بازیگر ۲ نیز باید به گونه‌ای ترکیب کند که بازیگر۱ را بین a , b بی‌تفاوت کرده باشد:

$$\sigma_2(A) = q, \sigma_2(B) = 1 - q \xrightarrow{u_1(a)=u_1(b)} 4(1-q) = 5q \rightarrow q = \frac{4}{9}$$

بامدهای هر دو بازیگر در این حالت:

$$u_1 = 4 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + 5 \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{9} = u_2$$

اما در این حالت انگیزه انحراف به حرکت c,C برای بازیگران وجود دارد. چون با فرض این که طرف مقابل بین حرکات a,b با احتمال p=4/9 ترکیب می‌کند، انحراف به حرکت c مطلوبیت 4*4/9+5*5/9=41/9 خواهد داشت. پس این حالت نمیتواند تعادل نش باشد.

بازیگر ۱ بین c و b ترکیب کند

$$\sigma_1(c) = p, \sigma_1(b) = 1 - p \rightarrow \begin{cases} u_2(A) = 4(1-p) + 5p \\ u_2(B) = 4p \\ u_2(C) = 5(1-p) \end{cases}$$

- مشابه استدلال بخش قبل به دلیل تقارن، بازیگر۲ نیز تنها تمایل به ترکیب بین B,C خواهد داشت:

$$\sigma_2(B) = 1 - q, \sigma_2(C) = q \xrightarrow{u_1(b)=u_1(c)} 5(1-q) = 4q \rightarrow q = \frac{5}{9}$$

در این حالت نیز انحراف به a برای بازیگر اول مطلوبیت $41/9$ را به همراه دارد پس در این حالت نیز نمیتوان تعادل نش داشت.

بازیگر ۱ بین c و a ترکیب کند

در این حالت نیز مشابه بخش‌های پیشین نشان داده می‌شود که تعادل نش ندارد.

بازیگر ۱ بین هر سه حرکت ترکیب کند

در این حالت بازیگر۲ نیز باید بین هر سه حرکتش ترکیب کند چون به ازای حرکت محض بازیگر۲ با توجه به مطلوبیت‌های درج شده در جدول بازیگر۱ انگیزه حرکت ترکیبی نخواهد داشت. همچنین در محاسبات بخش‌های قبل میتوان دید که به ازای ترکیب دوتایی یک بازیگر، بازیگر دیگر نمی‌تواند مطلوبیت برابر از هر سه حرکت داشته باشد.

$$\sigma_1(a) = p\,, \sigma_1(b) = r, \sigma_1(c) = 1-p-r \rightarrow \begin{cases} u_2(A) = 4r + 5(1-p-r) \\ u_2(B) = 5p + 4(1-p-r) \\ \quad u_2(C) = 4p + 5r \end{cases}$$

$$\xrightarrow{u_2(A)=u_2(B)=u_2(C)} p = r = \frac{1}{3}$$

با توجه به تقارن مساله، بازیگر۲ نیز همین استراتژی را در قبال بازیگر۱ اتخاذ خواهد کرد و تنها تعادل نش بازی به صورت زیر است:

$$\sigma_1(a) = \ \sigma_1(a) = \ \sigma_1(a) = \sigma_2(A) = \ \sigma_2(B) = \ \sigma_2(C) = 1/3$$

در این حالت پیامدهای بازیگران برابر است با: $u_1 = u_2 = \frac{27}{9}$

طبق قضیه هر بازی متناهی حداقل یک تعادل همبسته دارد. در واقع میتوان بین تعادل نش ترکیبی و تعادل همبسته تناظری ایجاد کرد. (انتهای ص۴۵ کتاب آزبرن)

فصل ۱، تمرین ۲۱: مرضیه علی‌اکبرپور

برای یافتن تعادل نش باید بهترین پاسخ هر بازیگر به هر استراتژی طرف مقابل را بیابیم. تقاطع این بهترین پاسخ ها تعادل نش است.

ابتدا تعادل‌های محض را پیدا می‌کنیم.

«بازیگر ۲»

«بازیگر ۱»		A	B
	a	(۰, ۰)	(۰, ۱)
	b	(۰, ۱)	(۱, ۱)

«جدول ۴۵.۱»

پس $\{b, A\}$ و $\{b, B\}$ دو تعادل محض این بازی اند.

۱. $\{(0,1), (1,0)\}$
۲. $\{(0,1), (0,1)\}$

برای بدست آوردن تعادل‌های نش ترکیبی باید بازیگر بین حرکات خود بی‌تفاوت باشد.

		q	$1-q$
		A	B
p	a	(۰, ۰)	(۰, ۱)
$1-p$	b	(۰, ۱)	(۱, ۱)

- **بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ بین حرکات A و B**

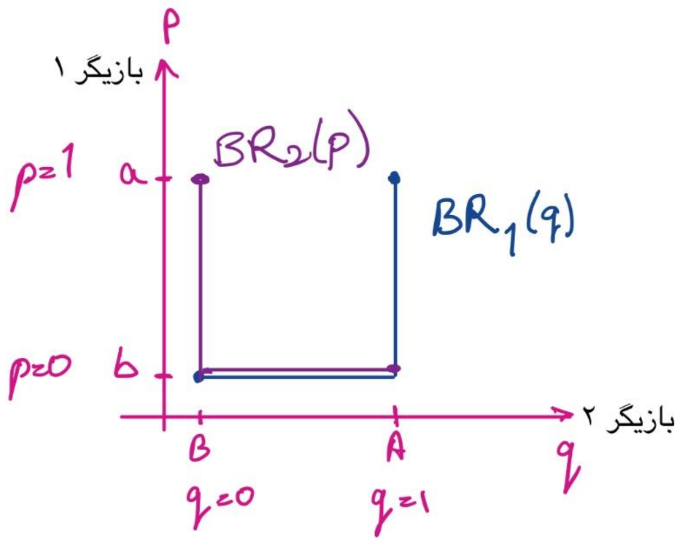
$$\begin{matrix} U_2(A) = 1-p \\ U_2(B) = 1 \end{matrix} \Rightarrow p = 0$$

بازیگر ۱ :

$$U_1(a) = 0$$
$$U_1(b) = 1-q$$

پس بازیگر ۱، انگیزه انحراف به حرکت a را ندارد.

و طبق بهترین پاسخ (نمودار زیر)، $\{(0,1),(q,1-q)\}$ تعادل نش ترکیبی بازی است.



فصل ۱، تمرین ۲۲: مرضیه علی‌اکبرپور

«بازیگر ۲»

	A	B
A	(۰, ۰, ۰)	(۰, ۰, ۰)
B	(۰, ۰, ۰)	(۲, ۲, ۲)

B

«بازیگر ۲»

«بازیگر ۱»		A	B
	A	(۱, ۱, ۱)	(۰, ۰, ۰)
	B	(۰, ۰, ۰)	(۰, ۰, ۰)

A

«جدول ۱.۴۶»

پس $\{A,A,A\}$ و $\{B,B,B\}$ دو تعادل محض این بازی اند.

۱. $\{(0,1),(0,1),(0,1)\}$
۲. $\{(1,0),(1,0),(1,0)\}$

تعادل‌های نش ترکیبی:

	q	$1-q$
	A	B
A	(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)
B	(۰,۰,۰)	(2,2,2)

		q	$1-q$
		A	B
p	A	(۱,۱,۱)	(۰,۰,۰)
$1-p$	B	(۰,۰,۰)	(۰,۰,۰)

$$U_1(A,\sigma_{-1}) = rq$$
$$U_1(B,\sigma_{-1}) = 2(1-q)(1-r)$$

$$U_2(A,\sigma_{-2}) = rp$$

$$U_2(B,\sigma_{-2}) = 2(1-p)(1-r)$$

$$U_3(A,\sigma_{-3}) = pq$$
$$U_3(B,\sigma_{-3}) = 2(1-p)(1-q)$$

برای تعادل نش ترکیبی سه بازیگر باید بین حرکات خود بی‌تفاوت باشند.

$$U_1(A,\sigma_{-1}) = U_1(B,\sigma_{-1})$$
$$U_2(A,\sigma_{-2}) = U_2(B,\sigma_{-2})$$
$$U_3(A,\sigma_{-3}) = U_3(B,\sigma_{-3})$$

و جواب ۳ معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$r = p = q = 2-\sqrt{2} \approx 0.6$$

بنابراین تنها تعادل نش ترکیبی بازی برابر است با:

$$\{(0.6,0.4),(0.6,0.4),(0.6,0.4)\}$$

فصل ۱، تمرین ۲۳: فاطمه اصغری

همانطور که در شکل می‌بینیم این بازی تعادل نش محض ندارد. هیچ خانه‌ای از جدول وجود ندارد که در آن پاسخ بازیکن ۱ و ۲ برهم منطبق شوند، بنابراین همان ابتدا با بررسی بهترین پاسخ‌های بازیکن ۱ و بازیکن ۲ متوجه می‌شویم که تعادل نش محض نداریم. (بهترین پاسخ بازیکن ۱ با رنگ زرد و بهترین پاسخ بازیکن ۲ با نقطه سبز نمایش داده شده است)

		A′		B′	
		A	B	A	B
a′	a	(۱,−۱,۲,۱)	(−۱,۱,۲,۱)	(−۱,۱,۰,۰)	(۱,−۱,۰,۰)
	b	(−۱,۱,۲,۱)	(۱,−۱,۲,۱)	(۱,−۱,۰,۰)	(−۱,۱,۰,۰)
b′	a	(−۱,۱,۰,۰)	(۱,−۱,۰,۰)	(۱,−۱,۱,۲)	(−۱,۱,۱,۲)
	b	(۱,−۱,۰,۰)	(−۱,۱,۰,۰)	(−۱,۱,۱,۲)	(۱,−۱,۱,۲)

«جدول ۴۷.۱»

برای یافتن تعادل نش ترکیبی با دقت در این بازی متوجه می‌شویم که انگار بازیکن ۳ و ۴ دارند یک بازی مستقل از بازیکن ۱ و ۲ انجام می‌دهند و انگار دو بازی یکی بین بازیکن ۳ و ۴ و دیگری بین بازیکن ۱ و ۲ در حال انجام است. بازی بین بازیکن ۱ و ۲ شبیه به بازی پرتاب سکه است که بسته به استراتژی انتخابی توسط بازیکنان ۳ و ۴ مطلوبیت بازیکن ۱ می‌تواند از همسان بودن نتیجه و یا متفاوت بودن نتیجه پرتاب سکه با بازیکن ۲ برابر با یک و یا برابر با منفی یک باشد و مطلوبیت بازیکن ۲ نیز قرینه مطلوبیت بازیکن ۱ خواهد بود. فرم نرمال این بازی‌ها به صورت زیر است: (برای بازیکن ۱ و ۲ قرینه این بازی نیز بازی می‌شود که آن بازی نیز تعادل نش محض ندارد)

بازیکن ۲

بازیکن ۱		A	B
	a	(۱ ، −۱)	(−۱ ، ۱)
	b	(−۱ ، ۱)	(۱ ، −۱)

بازیکن ۴

بازیکن ۳		A´	B´
	a´	(۲ ، ۱)	(۰ ، ۰)
	b´	(۰ ، ۰)	(۱ ،۲)

بازی اول (بازی بین بازیکنان ۱ و ۲) تعادل نش محض ندارد و بازی دوم (بازی بین بازیکنان ۳ و ۴) دو تعادل نش محض دارد که در جدول نشان داده شده است. تعادل نش ترکیبی برای بازی اول به صورت $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ و برای بازی دوم به صورت $\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)$ است و لذا تعادل‌های نش ترکیبی این بازی به صورت زیر است:

۱− $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right)$

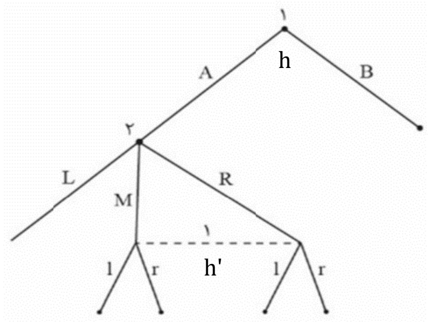
۲- $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(1,0),(1,0)\right)$

۳- $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(0,1),(0,1)\right)$

می‌توانید چک کنید که در حالت اول هر بازیکن بین بازی کردن هر کدام از استراتژی‌هایش بی‌تفاوت است و مطلوبیت انتظاری بازیکن ۱ و ۲ برابر با صفر و مطلوبیت انتظاری بازیکن ۳ و ۴ برابر با $\frac{5}{3}$ است. در حالت دوم و سوم مطلوبیت انتظاری بازیکن ۱ و ۲ برابر با صفر است. در حالت دوم مطلوبیت انتظاری بازیکن ۳ برابر با ۲ و مطلوبیت انتظاری بازیکن ۴ برابر با یک است. در حالت سوم مطلوبیت انتظاری بازیکن ۳ برابر با یک و مطلوبیت انتظاری بازیکن ۴ برابر با دو است.

۲. فصل دوم

فصل ۲، تمرین ۱: مهرداد پورقاسم



حرکت ترکیبی معادل با راهبرد ترکیبی فوق در ابتدای بازی عبارت است از:

$$b_1(\mathrm{B}|\ \mathrm{h}) = \mathrm{prob}(\mathrm{B}, r) + \mathrm{prob}(\mathrm{B}, l) = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

$$b_1(\mathrm{A}|\mathrm{h}) = \mathrm{prob}(\mathrm{A}|\ l) = 0.5$$

اگر بازی به h' برسد نیز، بازیگر ۱ حتماً l را بازی می‌کند:

$$b_1(l|\ \mathrm{h}') = \frac{\mathrm{prob}(\mathrm{A}, l)}{\mathrm{prob}(\mathrm{A}, l) + \mathrm{prob}(\mathrm{A}, r)} = \frac{0.5}{0.5 + 0} = 1$$

$$b_1(r|\ \mathrm{h}') = \frac{\mathrm{prob}(\mathrm{A}, r)}{\mathrm{prob}(\mathrm{A}, l) + \mathrm{prob}(\mathrm{A}, r)} = \frac{0}{0.5 + 0} = 0$$

فصل ۲، تمرین ۲: مهرداد پورقاسم

بسته به انتخابی که طبیعت در ابتدای بازی انجام می‌هد، با احتمال ۰.۵ به جدول ۱ و با احتمال ۰.۵ به جدول ۲ می‌رسیم.

ابوذر

علی		u, U	u, D	d, U	d, D
	u, U	(۳،۰)	(۳،۰)	(۲،۲)	(۲،۲)
	u, D	(۳،۰)	(۳،۰)	(۲،۲)	(۲،۲)
	d, U	(۳،۰)	(۳،۰)	(۱،۴)	(۶،۰)
	d, D	(۳،۰)	(۳،۰)	(۱،۴)	(۴،۴)

جدول ٤

ابوذر

علی		u, U	u, D	d, U	d, D
	u, U	(۰،۳)	(۰،۳)	(۰،۳)	(۰،۳)
	u, D	(۰،۳)	(۰،۳)	(۰،۳)	(۰،۳)
	d, U	(۲،۲)	(۲،۲)	(۴،۱)	(۴،۱)
	d, D	(۲،۲)	(۲،۲)	(۰،۶)	(۴،۴)

جدول ۵

به‌این‌ترتیب، نمایش جدولی این بازی به‌صورت زیر خواهد بود:

ابوذر

علی		u, U	u, D	d, U	d, D
	u, U	(۱.۵،۱.۵)	(۱.۵،۱.۵)	(۱،۲.۵)	(۱،۲.۵)
	u, D	(۱.۵،۱.۵)	(۱.۵،۱.۵)	(۱،۲.۵)	(۱،۲.۵)
	d, U	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۲.۵)	(۵،۰.۵)
	d, D	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۰.۵،۵)	(۴،۴)

جدول ٦

در جدول ۴، برای علی، حرکت‌های (u, U) و (u, D) اکیداً مغلوب حرکت (d, U) می‌شود.

ابوذر

علی		u, U	u, D	d, U	d, D
	u, U	(۱.۵،۱.۵)	(۱.۵،۱.۵)	(۱،۲.۵)	(۱،۲.۵)
	u, D	(۱.۵،۱.۵)	(۱.۵،۱.۵)	(۱،۲.۵)	(۱،۲.۵)
	d, U	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۲.۵)	(۵،۰.۵)
	d, D	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۰.۵،۵)	(۴،۴)

جدول ۷

در جدول ۵، برای ابوذر، حرکت (d, U) اکیداً غالب است.

ابوذر

علی		u, U	u, D	d, U	d, D
	d, U	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۲.۵)	(۵،۰.۵)
	d, D	(۲.۵،۱)	(۲.۵،۱)	(۰.۵،۵)	(۴،۴)

جدول ۸

به‌این‌ترتیب، راهبرد ((d, U)، (d, U)) تنها تعادل نش این بازی است.

فصل ۲، تمرین ۳: علی امینی

جدول ۲.۲۱ به‌صورت زیر است.

بازیگر ۲

		l	r
بازیگر ۱	lAl'	(۱, ۱)	(۱, ۱)
	lBl'	(۰, ۲)	(۰, ۲)
	lAr'	(۱, ۱)	(۱, ۱)
	lBr'	(۰, ۲)	(۰, ۲)
	rAl'	(۱, ۵)	(۳, ۲)
	rBl'	(۱, ۵)	(۳, ۲)
	rAr'	(۳, ۴)	(۱, ۵)
	rBr'	(۳, ۴)	(۱, ۵)

با حذف راهبردهای معادل طبق تعریف ۲.۴، نمایش جدولی تقلیل‌یافته به‌صورت زیر خواهد بود.

	l	r
lAr'	(۱, ۱)	(۱, ۱)
lBr'	(۰, ۲)	(۰, ۲)
rAl'	(۱, ۵)	(۳, ۲)
rAr'	(۳, ۴)	(۱, ۵)

در مرحله بعد برای ساده تر شدن روند کار، به دنبال پیدا کردن راهبردهای اکیدا مغلوب و حذف آن‌ها هستیم. چرا که راهبردهای اکیدا مغلوب، نمی‌توانند عضوی از مجموعه بهترین واکنش‌ها باشد و در نتیجه نمی‌توانند تکیه‌گاه حرکات ترکیبی و به‌تبع آن تعادل نش باشد. (قضیه ۱.۴)

باید به دنبال راهبرد محض یا راهبردهای ترکیبی باشیم (تعریف ۱.۷) که اکیدا مغلوب است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که هر دو راهبرد lAr' و lBr' توسط راهبرد ترکیبی {۰/۵، ۰/۵، ۰، ۰} اکیدا مغلوب می‌شوند. با توجه به آنچه گفته شد، با حذف این راهبردها جدول به‌صورت زیر در می‌آید:

	l	r
rAl'	(۱, ۵)	(۳, ۲)
rAr'	(۳, ۴)	(۱, ۵)

با بررسی بهترین واکنش‌های محض هر بازیگر در این جدول مشخص می‌شود که تعادل نش محض وجود ندارد و باید راهبردهای ترکیبی را بررسی کرد. به این منظور احتمال p و q را به ترتیب به راهبردهای بازیگر اول و دوم نسبت می‌دهیم.

		q	$1-q$
		l	r
p	rAl'	(۱, ۵)	(۳, ۲)
$1-p$	rAr'	(۳, ۴)	(۱, ۵)

- **حالتی که هر دو بازیگر ترکیب می‌کنند:**

مطلوبیت بازیگر اول:

$$U_1(rAl',\sigma) = 1 \times q + 3 \times (1-q) = 3 - 2q$$

$$U_1(rAr',\sigma) = 3 \times q + 1 \times (1-q) = 1 + 2q$$

$$U_1(rAl',\sigma) = U_1(rAr',\sigma) \Rightarrow 3 - 2q = 1 + 2q \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

مطلوبیت بازیگر دوم:

$$U_2(l\,,\sigma) = 5 \times p + 4 \times (1-p) = 4 + p$$

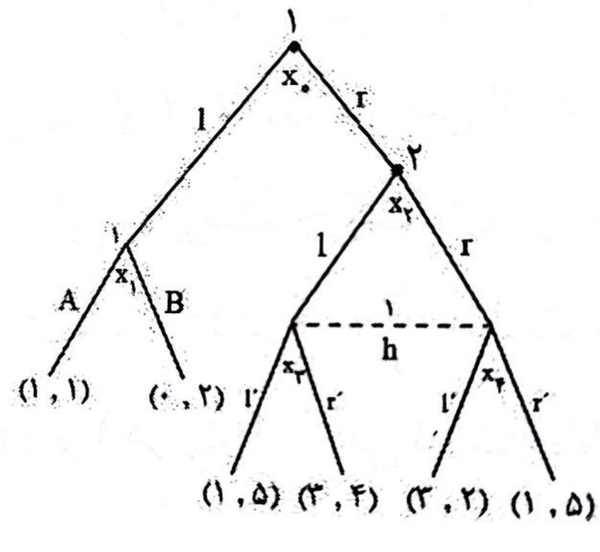
$$U_2(r,\sigma) = 2 \times p + 5 \times (1-p) = 5 - 3p$$

$$U_2(l\,,\sigma) = U_2(r,\sigma) \quad \Rightarrow \quad 4 + p = 5 - 3p \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{1}{4}}$$

بنابراین تعادل نش ترکیبی به‌صورت زیر است:

$$\boxed{\sigma = \left\{\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}}$$

– برای به‌دست آوردن تعادل کامل زیربازی‌ها همان‌طور که در شکل ۱.۱۷ a قابل مشاهده است، ۳ زیربازی موجود است؛ زیر بازی گره x_0 (خود بازی)، زیربازی گره x_1 و زیربازی گره x_2



با استفاده از استنتاج پس‌رو و یافتن تعادل در هر یک از زیربازی‌ها می‌توان تعادل کامل زیربازی‌ها را به‌دست آورد.

- **تعادل در زیربازی x_1:**

مشخص است که بازیگر اول در این مجموعه اطلاعات، حرکت A را به B ترجیح می‌دهد.

- **تعادل در زیربازی x_2:**

در این حالت یک بازی همزمان داریم که تعادل آن را پیش‌تر به دست آوردیم. مطلوبیت انتظاری هر بازیگر برابر است با:

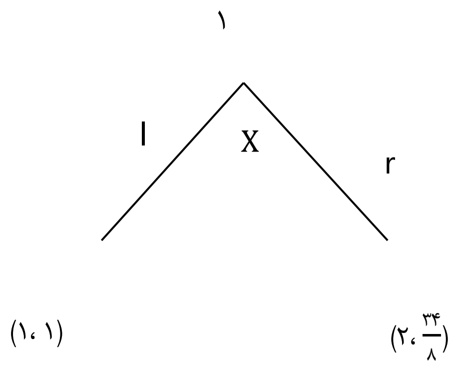
$$U_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times 3\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times 3 + \frac{3}{4} \times 1\right) \; = \; 2$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 5 + \frac{1}{2} \times 2\right) + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 5\right) = \frac{34}{8}$$

بنابراین بردار مطلوبیت انتظاری (۲، $\frac{۳۴}{۸}$) است.

- **تعادل در زیربازی x_0:**

مطابق شکل زیر، بازیگر ۱ حرکت r را انتخاب می‌کند. و در نتیجه تعادلی که در بخش اول سوال بدست آوردیم، تعادل کامل زیربازی‌ها نیز هست.



فصل ۲، تمرین ۴: سپیده عبداللهی

نمایش جدولی بازی درختی نمودار ۳۹.۲ به شکل زیر است؛

بازیگر ۲

	A_2	D_2
A_1A_3	(1,3)	(0,2)

بازیگر ۱	A_1D_3	(2,1)	(0,2)
	D_1A_3	(1,0)	(1,0)
	D_1D_3	(1,0)	(1,0)

طبق جدول بالا حرکت A_3 مغلوب حرکت D_3 است، پس داریم؛

بازیگر ۲

		A_2	D_2
بازیگر ۱	A_1D_3	(2,1)	(0,2)
	D_1D_3	(1,0)	(1,0)

همانطور که در جدول بالا مشخص است تعادل نش محض این بازی $((D_1, D_3), D_2)$ است.

حال از روش استنتاج پس‌رو استفاده می‌کنیم. در گره x_3 حرکت D_3 پیامد بزرگتر را برای بازیگر ۱ دارد. از آن‌جا که تعادل کامل زیر بازی در گره x_3 حرکت D_3 از طرف بازیگر ۱ است، در گره x_2 بازیگر ۲ حرکت D_2 را بازی می‌کند. پس در زیر بازی که از گره x_2 شروع می‌شود تعادل راهبرد (D_3, D_2) است. با توجه به تعادل به دست آمده تا این مرحله بازیگر ۱ در گره x_1 حرکت D_1 را بازی می‌کند. به این ترتیب با این روش هم به تعادل $((D_1, D_3), D_2)$ می‌رسیم.

حال برای بررسی سایر تعادل‌های نش بازی به سراغ نمایش جدولی بازی می‌رویم. حرکت A_1A_3 مغلوب هر ترکیبی از سه حرکت $\{A_1D_3, D_1A_3, D_1D_3\}$ است پس با احتمال صفر در ترکیب‌های بازیگر ۱ انتخاب می‌شود:

بازیگر ۲

			p	$1-p$
			A_2	D_2
بازیگر ۱	q_1	A_1D_3	(2,1)	(0,2)
	q_2	D_1A_3	(1,0)	(1,0)
	$1-q_1-q_2$	D_1D_3	(1,0)	(1,0)

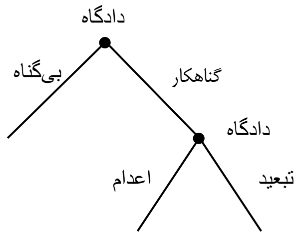
- $p > 1/2$: مجموعه بهترین واکنش بازیگر ۱ در این حالت $\{A_1D_3\}$ است.
- $p = 1/2$: مجموعه بهترین واکنش بازیگر ۱ در این حالت $\{A_1D_3, D_1A_3, D_1D_3\}$ است.

- $p < 1/2$: مجموعه بهترین واکنش بازیگر ۱ در این حالت $\{D_1A_3, D_1D_3\}$ است.
- $q_1 > 0$: مجموعه بهترین واکنش بازیگر ۱ در این حالت $\{D_2\}$ است.
- $q_1 = 0$: مجموعه بهترین واکنش بازیگر ۱ در این حالت $\{A_2, D_2\}$ است.

حال اگر اشتراک حالت‌های بالا را در نظر بگیریم برای تعادل‌های نش داریم؛

$$\{\,(0, q_2, 1 - q_2), (p, 1 - p)\} : p \leq 1/2$$

فصل ۲، تمرین ۵: مهرداد پورقاسم



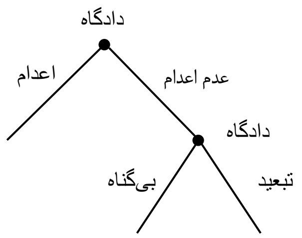
الف) مرحله ۱: دادگاه در مورد گناه‌کاری یا بی‌گناهی خدمتکار تصمیم می‌گیرد. اگر خدمتکار بی‌گناه تشخیص داده شود، پایان داستان است؛ اما در صورت گناه‌کاری:

مرحله ۲: دادگاه تصمیم می‌گیرد او تبعید یا اعدام شود.

در زیربازی‌ای که از مرحله ۲ آغاز می‌شود، در انتخاب میان تبعید (B) و اعدام (E)، گروه اول و دوم اکیداً تبعید را ترجیح می‌دهند. اگر رأی‌دهندگان انتخاب‌های نسبتاً مغلوب را بازی نکنند[1]، تعادل نش برای این زیربازی این است که گروه اول و دوم رأی به تبعید دهند (گروه سوم ممکن است به هر طریق رأی دهد)؛ در این صورت تبعید رأی می‌آورد. درنتیجه، انتظار می‌رود در مرحله ۲ تبعید انتخاب شود.

به‌این‌ترتیب، در زیربازی‌ای که از مرحله ۱ آغاز می‌شود، انتخاب میان بی‌گناهی (A) و تبعید (B) است؛ در این حالت، گروه دوم و سوم اکیداً تبعید را ترجیح می‌دهند. اگر رأی‌دهندگان انتخاب‌های نسبتاً مغلوب را بازی نکنند، تعادل نش برای این زیربازی این است که گروه دوم و سوم رأی به تبعید دهند. درنتیجه، در تعادل کامل زیربازی‌ها، تبعید انتخاب می‌شود.

ب)



مرحله ۱: دادگاه در مورد اعدام یا عدم اعدام خدمتکار تصمیم می‌گیرد. اگر خدمتکار اعدام داده شود، پایان داستان است؛ اما در صورت عدم اعدام:

مرحله ۲: دادگاه تصمیم می‌گیرد او تبعید یا بی‌گناه شناخته شود.

در زیربازی‌ای که از مرحله ۲ آغاز می‌شود، در انتخاب میان بی‌گناهی (A) و تبعید (B)، گروه دوم و سوم اکیداً تبعید را ترجیح می‌دهند. اگر رأی‌دهندگان انتخاب‌های نسبتاً مغلوب را بازی نکنند، تعادل نش

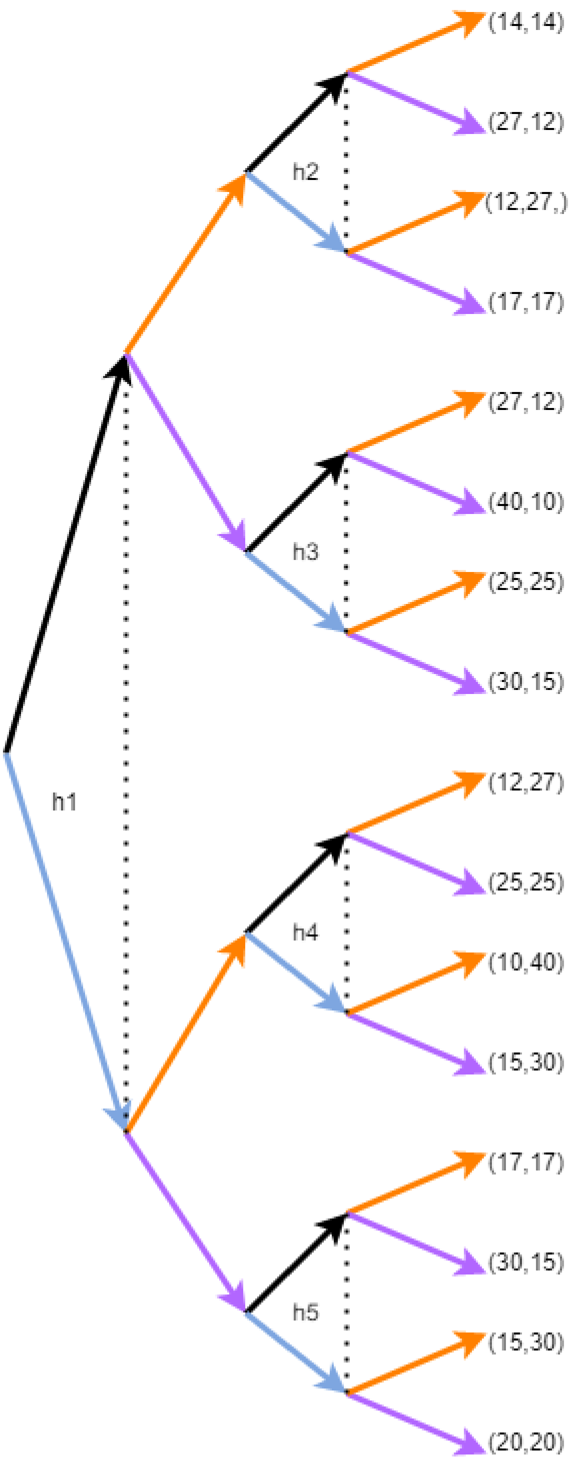
[1] یک تعادل نش دیگر نیز وجود دارد که هر سه گروه رأی به اعدام دهند. ازآنجاکه هیچ‌یک از گروه‌ها انگیزه‌ای برای تغییر در رأیش ندارد، یک تعادل نش در این زیربازی است. به دلیل اینکه این تعادل شامل انتخاب‌های مغلوب نسبی و نامعقول است، آن را کنار می‌گذاریم.

برای این زیربازی این است که گروه دوم و سوم رأی به تبعید دهند (گروه اول ممکن است به هر طریق رأی دهد)؛ در این صورت تبعید رأی می‌آورد. درنتیجه، انتظار می‌رود در مرحله ۲ تبعید انتخاب شود.

به‌این‌ترتیب، در زیربازی‌ای که از مرحله ۱ آغاز می‌شود، انتخاب میان تبعید (B) و اعدام (E) است؛ در این حالت، گروه اول و دوم اکیداً تبعید را ترجیح می‌دهند. اگر رأی‌دهندگان انتخاب‌های نسبتاً مغلوب را بازی نکنند، تعادل نش برای این زیربازی این است که گروه اول و دوم رأی به تبعید دهند. درنتیجه، در تعادل کامل زیربازی‌ها، تبعید انتخاب می‌شود.

ج) در این صورت، گروه اول به بی‌گناهی، گروه دوم به تبعید و گروه سوم به اعدام رأی می‌دهند. با توجه به اینکه گروه اول با ۴۵ درصد نمایندگان اکثریت را در اختیار دارند، دادگاه رأی به بی‌گناهی خواهد داد.

فصل ۲، تمرین ۶: سپیده عبداللهی



در نمودار درختی این بازی فلش‌های سیاه و آبی به ترتیب حرکات B و A بازیگر ۱ و فلش‌های نارنجی و بنفش به ترتیب حرکات b و A بازیگر ۲ هستند.

در بازی همزمان اول هر بازیگر ۲ راهبرد دارد. وقتی نوبت به بازی دوم می‌رسد هر بازیگر از حرکت رغیب خود در بازی اول باخبر است پس اطلاعاتی دارد که می‌تواند به وسیله آن راهبرد خود را تعیین کند و این اطلاعات در کل دو حالت دارد که نشان می‌دهد بازیگر رغیب کدام حرکت خود را در بازی همزمان اول انتخاب کرده است. پس در کل تعداد راهبرد محض هر بازیکن $2 \times 2 \times 2 = 8$ است.

نمودار درختی بازی را می‌توان به نحوی رسم کرد که شروع کننده بازی بازیگر ۲ نیز باشد.

بازی‌های همزمان دوم تنها زیر بازی‌های این بازی به جز کل بازی هستند که تعادل کامل آن‌ها همان تعادل نش محض جدول زیر است؛

بازیگر ۲

		A	b
بازیگر ۱	A	(10,10)	(5,20)
	B	(20,5)	(7,7)

فصل ۲، تمرین ۷: حسن ابوذرپور

برای حل از روش استنتاج پس‌رو استفاده می‌کنیم. در مرحله آخر زهرا و مریم با جدول پیامدهای زیر مواجه خواهند شد. تعادل این زیربازی معادل است با حرکات $\{B, b\}$

		زهرا	
		a	b
مریم	A	(۱,۲)	(۲,۳)
	B	(۳,۴)	(۴,۵)

در مرحله دوم جدول پیامدها را بازنویسی می‌کنیم که در نهایت مجموعه حرکات $\{C, c\}$ تعادل نش این زیربازی خواهد بود.

		زهرا		
		a	b	c
مریم	A	(۱,۲)	(۲,۳)	(۳,۴)
	B	(۳,۴)	(۴,۵)	(۵,۶)
	C	(۵,۶)	(۶,۷)	(۷,۸)

درگام نخست نیز جدول کامل بازی را درنظر گرفته و تعادل‌های نش را می‌یابیم. دقت شود که انتخاب‌های $\{A, B\}$ برای مریم و انتخاب‌های $\{a, c\}$ برای زهرا حرکات اکیدا مغلوب تلقی می‌شوند. تعادل این مرحله برابر است با $\{C, d\}$ و $\{D, b\}$

		زهرا			
		a	b	c	d
مریم	A	(۱,۲)	(۲,۳)	(۳,۴)	(۴,۵)
	B	(۳,۴)	(۴,۵)	(۵,۶)	(۶,۷)
	C	(۵,۶)	(۶,۷)	(۷,۸)	(۸,۹)
	D	(۷,۸)	(۸,۹)	(۹,۱)	(۱,۲)

همچنین در این گام تعادل‌های ترکیبی بازی را نیز باید مدنظر قرار دهیم. بدین منظور فرض می‌کنیم مریم انتخاب C را با احتمال p و انتخاب D را با احتمال $p - 1$ بازی کند. همچنین مریم b را با احتمال q و d را با احتمال $q - 1$ بازی کند.

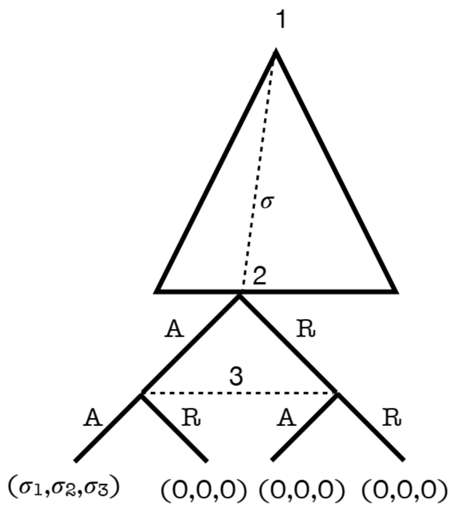
تعادل‌های ترکیبی معادل $q = \frac{7}{9}$ و $p = \frac{7}{10}$ خواهد شد. لذا مجموعه تعادل‌های ترکیبی زیر بازی اول برابر خواهد بود با:

$$\left\{\left(0,0,\frac{7}{10},\frac{3}{10}\right),\left(0,\frac{7}{9},0,\frac{2}{9}\right)\right\}$$

فصل ۲، تمرین ۸: امیرمسعود باقری

سوال ۸.

با توجه به پیوسته بودن حرکت بازیکن اول در این بازی، شکل درختی این بازی به صورت زیر است:



مجموعه‌ی راهبردهای ممکن برای هر یک از بازیکنان به شکل زیر است:

1: $\{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \mid (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=1)\&(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\geq 0)\}$
2: $\{A,R\}$
3: $\{A,R\}$

برای تعادل کامل زیربازی، در زیر بازی بزرگ که کل بازی است، بدیهتا بازیگر ۱ مطلوبیت σ_1 که بزرگتر از 0 است را به 0 ترجیح می‌دهد و لذا در پی آن است که در زیر بازی زیرین بازیگران ۲ و ۳ را ترغیب به تعادل محض AA کند. این تعادل زمانی جزو تعادل‌های زیر بازی زیرین است که $\sigma_1,\sigma_2 > 0$ باشد. از طرفی هر حرکتی که در آن پیشنهاد $\sigma_1,\sigma_2 > 0$ داده شود، به $\sigma'_1,\sigma'_2 > 0$ اکیدا مغلوب است اگر هر σ' کوچکتر از نظیر قبلی خود ولی همچنان مثبت انتخاب شود. لذا پیشنهاد بازیگر یک به بازیگران دو و سه $\varepsilon = \sigma_1 = \sigma_2$ است به گونه‌ای که ε به صفر میل کند.

فصل ۲، تمرین ۹: علی امینی

ساختار کلی این بازی به این صورت است که دو کشور قایق‌های خود را برای تصاحب یک جزیره می‌فرستند از آنجایی که ارزش جزیره بیش از ۱ قایق و کمتر از ۲ قایق است، هر کشور تنها ۱ قایق برای دفاع از جزیره قرار می‌دهد چراکه کشور مدافع آگاه است که اگر کشور

دیگر حمله کند می‌تواند تمام قایق‌های مدافع جزیره را نابود کند. بنابراین برای کشور مدافع بهینه نیست که تعداد قایق بیشتر از ارزش جزیره را از دست بدهد.

از طرفی برای کشور مهاجم نیز با همین استدلال بهینه است که با ۲ قایق حمله کند تا یکی از قایق‌ها در جنگ از بین برود و با یک قایق دیگر جزیره را تصاحب کند چون ارزش جزیره بیش از یک قایق است.

مطابق صورت سوال، ابتدا کشور ۲ مدافع است. حالت‌های مختلف برای K و L را با استفاده از استنتاج پس‌رو بررسی می‌کنیم:

- **حالتی که $K = L$ است.**

– اگر هر دو کشور یک قایق داشته‌باشند ($K = L = 1$):

- اگر کشور ۱ حمله نکند، کشور ۲ صاحب جزیره باقی می‌ماند و پیامد به صورت $(\mathbf{1,1+I})$ خواهد شد (I ارزش جزیره است که بیشتر از ۱ و کمتر از ۲ است).
- اگر کشور ۱ حمله کند تنها قایقش را از دست می‌دهد و کشور ۲ نیز تنها قایقش در دفاع از جزیره نابود می‌شود بنابراین این حالت پیامد $(\mathbf{0,0})$ خواهد داشت.

- بنابراین در این حالت کشور ۲ صاحب جزیره است و $(\mathbf{1,1+I})$ تعادل است.

– اگر هر دو کشور دو قایق داشته‌باشند ($K = L = 2$):

- اگر کشور ۱ حمله نکند، کشور ۲ صاحب جزیره باقی می‌ماند و پیامد به صورت $(\mathbf{2,2+I})$ خواهد شد.
- اگر کشور ۱ حمله کند یک قایقش را از دست می‌دهد ولی با قایق دیگرش جزیره را تصاحب می‌کند و کشور ۲ نیز یک قایقش در دفاع از جزیره نابود می‌شود بنابراین این حالت پیامد $(\mathbf{1+I,\ 1})$ خواهد داشت. اکنون به وضعیت قبلی ($K = L = 1$) رسیدیم با این تفاوت که در اینجا کشور ۱ مدافع است. پس نتیجه می‌گیریم که کشور ۲ حمله نمی‌کند و کشور ۱ صاحب جزیره خواهد بود.

- بنابراین با مقایسه پیامدهای این دو حالت و چون ($I + 1 > 2$) کشور ۱ صاحب جزیره می‌شود و $(\mathbf{1+I,\ 1})$ تعادل خواهد بود.

در نهایت برای K و L های بزرگتر نیز الگو بازگشتی به همین شکل است. با استفاده از استنتاج پس‌رو اگر K و L زوج باشند، در نهایت باعث تصاحب جزیره توسط کشور ۱ می‌شود بنابراین کشور ۱ در مرحله اول حمله می‌کند ولی کشور ۲ ضد حمله نمی‌زند. به‌طور مشابه اگر

K و L فرد باشند، در نهایت باعث تصاحب جزیره توسط کشور ۲ می‌شود و بنابراین در مرحله اول کشور ۱ حمله نمی‌کند. با این تفاسیر تعادل برابر است با:

$$\begin{cases} (K, L + I) & if \quad K = L = \text{فرد} \\ (K - 1 + I, L - 1) & if \quad K = L = \text{زوج} \end{cases}$$

- **حالتی که $K > L$ است.**

در این صورت با استفاده از استنتاج پس‌رو در مرحله آخر بازی تا جایی پیش می‌رود که تمام قایق‌های L نابود شوند و چون همواره تعداد قایق‌های کشور اول بیشتر است، کشور اول صاحب جزیره خواهد شد. بنابراین در مرحله اول، کشور ۱ همواره حمله خواهد کرد ولی کشور ۲ ضدحمله انجام نمی‌دهد. تعادل به‌صورت زیر است:

$$(K - 1 + I, L - 1) \qquad if \quad K > L$$

- **حالتی که $K < L$ است.**

در این صورت با استفاده از استنتاج پس‌رو در مرحله آخر بازی تا جایی پیش می‌رود که تمام قایق‌های K نابود شوند و چون همواره تعداد قایق‌های کشور دوم بیشتر است، کشور دوم صاحب جزیره خواهد شد. بنابراین در مرحله اول، کشور ۱ هرگز حمله نخواهد کرد. تعادل به‌صورت زیر است:

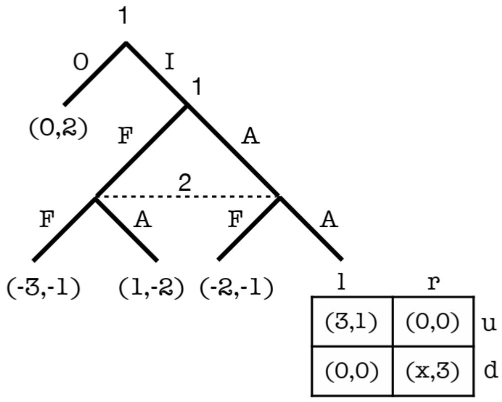
$$(K, L + I) \qquad if \quad K < L$$

می‌توان تعادل کلی را به‌صورت زیر بازنویس کرد.

$$\boxed{\begin{cases} (K, L + I) & if \quad K = L = \text{فرد} \quad or \quad K < L \\ (K - 1 + I, L - 1) & if \quad K = L = \text{زوج} \quad or \quad K > L \end{cases}}$$

فصل ۲، تمرین ۱۰: امیرمسعود باقری

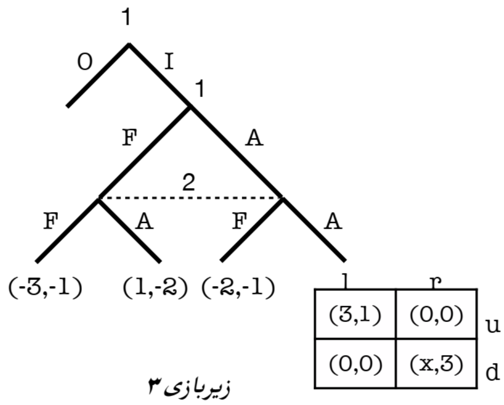
سوال ۱۰.



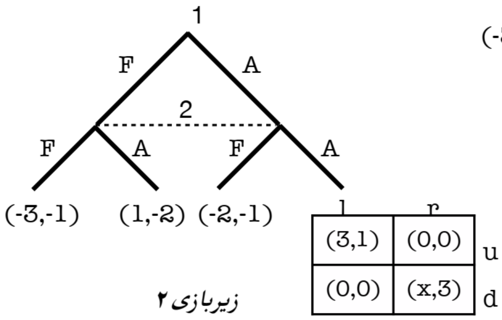
برای حل سوال، ابتدا زیربازی‌های این بازی را مشخص می‌کنیم و سپس برای پیدا کردن تعادل های کامل زیربازی، تمامی تعادل‌های ممکن زیر بازی‌های زیرین را در زیربازی‌های بالایی قرار داده و تا همین روند را تا بالاترین زیربازی ادامه می‌دهیم. مطابق شکل درختی بازی و تعریف زیربازی، این بازی شامل سه زیر بازی زیر است:

	l	r
u	(3,1)	(0,0)
d	(0,0)	(x,3)

زیربازی ۱

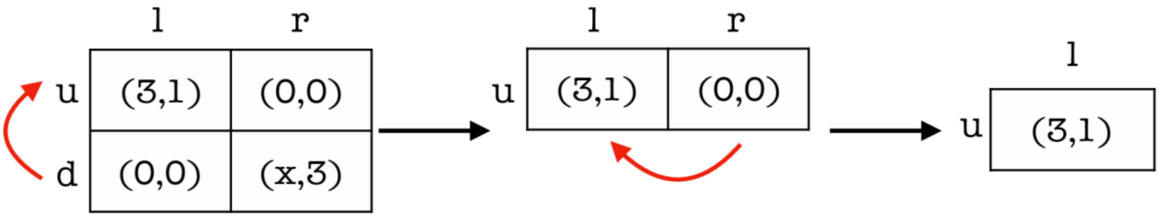


زیربازی ۳

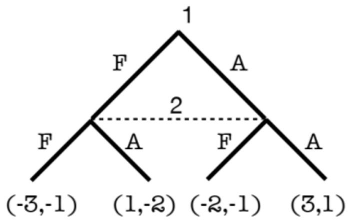


زیربازی ۲

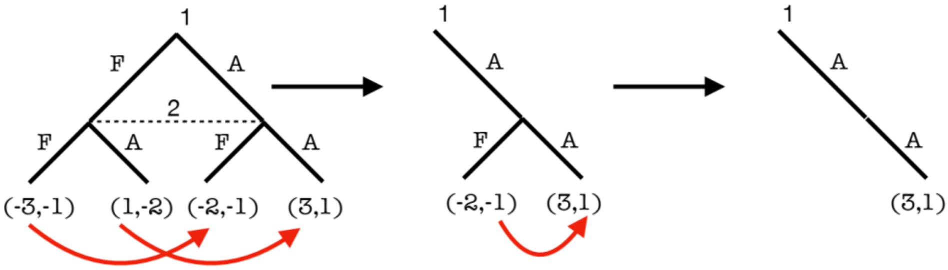
ابتدا کل فرایند یاد شده را برای X های کوچکتر از 0 انجام می‌دهیم. برای این مقادیر X در زیربازی ۱، برای پیدا کردن تعادل‌های نش، به روش حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب داریم:



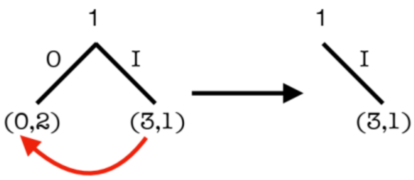
بنابراین تنها تعادل این زیربازی در این حالت، تعادل محض {u,l} خواهد بود. با قرار دادن این تعادل در زیربازی ۲ خواهیم داشت:



در این زیر بازی همزمان نیز، با توجه به اینکه حذف پیاپی حرکات اکیدا مغلوب داریم:



بنابراین تنها تعادل این زیربازی نیز تعادل {Au,Al} خواهد بود. حال با قراردادن این نتیجه در زیربازی ۳ خواهیم داشت:



پس برای کلیه‌ی Xهای کوچکتر از صفر، تنها تعادل کامل زیربازی برابر است با:

$SPE_1 = \{IAu, Al\}$

حال حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن $X = 0$ است. تحت این حالت با توجه به زیر بازی ۱ داریم:

	l	r
$u_{(\alpha)}$	(3,1)	(0,0)
$d_{(1-\alpha)}$	(0,0)	(0,3)

تحت این حالت، تعادل محض {d,r} به مجموعه‌ی تعادل‌ها اضافه شده و همچنین برای تعادل ترکیبی، با توجه به مطلوبیت‌های موجود در بازی بدیهتا در می‌یابیم که تنها حالتی که بازیگر دو می‌تواند بازیگر یک را بی تفاوت کند، حالتی است که حرکت محض r را بازی کند. تحت این حالت، بازیگر یک باید به گونه‌ای ترکیب کند که بازیگر دو انگیزه‌ی تخطی از حرکت محض r را نداشته باشد. پس با فرض اینکه بازیگر یک حرکت محض u را با ضریب α بازی کند، برای برقراری تعادل خواهیم داشت:

$U_2(l) \leq U_2(r) \Longrightarrow \alpha \leq 3(1-\alpha) \Longrightarrow 0 < \alpha \leq 3/4$

پس به ازای این مقادیر از α، بی‌نهایت تعادل ترکیبی وجود دارد که در آن بازیگر ۲ حرکت محض r را بازی کرده و مطلوبیت دو بازیگر در این شرایط برابر خواهد بود با($\alpha = 0$ نیز همان تعادل محض {d,r} است):

$U_1 = 0\ ,\ U_2 = 3(1-\alpha) \Longrightarrow 3/4 \leq U_2 \leq 3$

با قرار دادن تعادل‌های محض و ترکیبی بالا در زیربازی ۲ خواهیم داشت:

	$F_{(q)}$	$A_{(1-q)}$
$F_{(r)}$	(-3,-1)	(1,-2)
$A_{(1-r)}$	(-2,-1)	(0, U_2)

مشاهده می‌شود که این بازی تعادل محض ندارد. برای تعادل ترکیبی داریم:

$U_1(F) = U_1(A) \Longrightarrow -3q + (1-q) = -2q \Longrightarrow q = 1/2$
$U_2(F) = U_2(A) \Longrightarrow -1 = -2r + U_2(1-r) \Longrightarrow r = (1 + U_2)/(2 + U_2)$

$\Longrightarrow U_1 = -1\ ,\ U_2 = -1$

پس در این زیربازی نیز، متناسب با نتایج زیر بازی اول، بی‌نهایت تعادل ترکیبی موجود خواهد بود که در تمامی آنها مطلوبیت دو بازیگر برابر 1− است. بدیهی است که با توجه به ساختار زیر بازی سوم، بازیگر یک در همان گره‌ی تصمیم گیری اول بازی o را انتخاب خواهد کرد و لذا بی‌نهایت SPE با مطلوبیت (0,2) در حالت $X = 0$ داریم.

حال حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن $X > 0$ است. تحت این حالت با توجه به زیر بازی ۱ داریم:

	$l_{(\beta)}$	$r_{(1-\beta)}$
$u_{(\alpha)}$	(3,1)	(0,0)
$d_{(1-\alpha)}$	(0,0)	(X,3)

تحت این حالت، تعادل محض {d,r} به مجموعه‌ی تعادل‌ها نسبت به حالت اول اضافه شده و همچنین برای تعادل ترکیبی خواهیم داشت:

$U_1(U) = U_1(d) \Longrightarrow 3\beta = X(1\text{-}\beta) \Longrightarrow \beta = X/(X+3)$
$U_2(l) = U_2(r) \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 3(1\text{-}\boldsymbol{\alpha}) \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha} = 3/4$

$\Longrightarrow U_2 = 3/4\ ,\ U_1 = 3X/(X+3) \Longrightarrow U_1 > 0$

پس به ازای این مقادیر از α و β در هر X یک تعادل ترکیبی داریم.حال با توجه به ساختار زیر بازی ۲ داریم(مطلوبیت‌های زیر بازی ۱ را به صورت U'_1 و U'_2 وارد زیربازی دوم می‌کنیم):

	$F_{(q)}$	$A_{(1-q)}$
$F_{(r)}$	(-3,-1)	(1,-2)
$A_{(1-r)}$	(-2,-1)	(U'_1, U'_2)

مشاهده می‌شود که در این بازی، اگر چنانچه $U'_1 > 1$ باشد، آنگاه با توجه به حذف پیاپی حرکات مغلوب، تنها تعادل بازی، تعادل محض {A,A} خواهد بود؛ زیرا U'_2 که از زیربازی ۱ به دست آمد همواره مثبت و لذا بزرگتر از 2- خواهد بود. تحت این شرایط، یقینا مطلوبیت U'_1 از صفر نیز بزرگتر است و در زیربازی ۳ حرکت I انتخاب خواهد شد و این تعادل، تعادل کامل زیر بازی‌ها خواهد بود.
همچنین در حالتی که $U'_1 = 1$ باشد، یقینا یک تعادل محض {A,A} خواهیم داشت که باز نتایج پیشین برای مقادیر بزرگتر از 1 بر این تعادل نیز صادق است. حتما یک تعادل ترکیبی نیز خواهیم داشت که تنها حالت بی تفاوتی برای بازیگر اول تحت این تعادل حالتی است که بازیگر دوم محض بازی کند به شرط آنکه بازیگر اول بتواند بازیگر دوم را قانع به بازی محض A کند. تحت این شرایط نیز با توجه به اینکه مطلوبیت بازیگر ۱ همچنان 1 است، نتایج قبلی در زیربازی سوم بر آن صادق است. در این حالت داریم:

$U_2(F) \leq U_2(A) \Longrightarrow -1 \leq -2r + U'_2(1\text{-}r) \Longrightarrow r \leq (1 + U'_2)/(2 + U'_2)$

پس در این حالت نیز به ازای هر $U'_1 = 1$ با توجه به کسر به دست آمده برای r که مثبت و کوچکتر از یک است، بی‌نهایت تعادل ترکیبی داریم که منجر به SPE خواهند شد.
اما به ازای مقادیر $U'_1 < 1$، دیگر تعادل محض {A,A} در زیربازی دوم صادق نخواهد بود. تحت این شرایط برای تعادل ترکیبی داریم:

$U_1(F) = U_1(A) \Longrightarrow -3q + (1\text{-}q) = -2q + U'_1(1\text{-}q) \Longrightarrow q = (1 - U'_1)/(2 - U'_1)$
$U_2(F) = U_2(A) \Longrightarrow -1 = -2r + U'_2(1\text{-}r) \Longrightarrow r = (U'_2 + 1)/(U'_2 + 2)$

$\Longrightarrow U_2 = -1\ ,\ U_1 = 1 - 4(1 - U'_1)/(2 - U'_1) \Longrightarrow -1 \leq U_1 < 0$

بنابراین، تحت این شرایط نیز متناسب با زیر بازی سوم، بازیگر یک در گره‌ی اول انتخاب O را خواهد داشت.

حال سه حالت به دست آمده ناشی از حل زیربازی ۲ را، با نتایج به دست آمده از زیر بازی اول تطبیق می‌دهیم تا مقادیر X مد نظر برای رسیدن به نتایج یاد شده را بیابیم:

حالت اول) $U'_1 > 1$

$\Longrightarrow$ درتعادل محض زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = X \Longrightarrow X > 1$
$\Longrightarrow$ درتعادل ترکیبی زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = 3X/(X+3) \Longrightarrow 3X/(X+3) > 1 \Longrightarrow X > 3/2 \text{ or } X < -3 \Longrightarrow X > 3/2$

پس SPE یاد شده در حالت اول، به ازای X های بین 1 و 3/2، یک تعادل SPE و به ازای X های بزرگتر از 3/2، دو تعادل SPE می‌دهد.

حالت دوم) $U'_1 = 1$

$\Longrightarrow$ درتعادل محض زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = X \Longrightarrow X = 1$
$\Longrightarrow$ درتعادل ترکیبی زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = 3X/(X+3) \Longrightarrow 3X/(X+3) = 1 \Longrightarrow X = 3/2$
پس بی‌نهایت SPE یاد شده در حالت دوم، به ازای مقادیر 3/2 و 1 برای X، رخ می‌دهد.

حالت سوم) $U'_1 < 1$

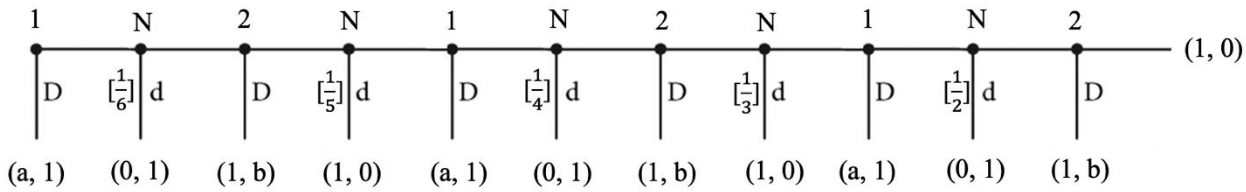
$\Longrightarrow$ درتعادل محض زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = X \Longrightarrow X < 1$
$\Longrightarrow$ درتعادل ترکیبی زیر بازی ۱ داریم:
$U'_1 = 3X/(X+3) \Longrightarrow 3X/(X+3) < 1 \Longrightarrow -3 < X < 3/2 \Longrightarrow 0 < X < 3/2$

پس برای جمع‌بندی مقادیر مثبت X داریم:

اگر $1 > X > 0$: یک تعادل کامل زیربازی داریم که در زیر بازی سوم، بازیگر ۱ حرکت O را انتخاب می‌کند.
اگر $X = 1$: بینهایت تعادل کامل زیربازی داریم که در زیر بازی سوم، بازیگر ۱ حرکت I را انتخاب می‌کند.
اگر $3/2 > X > 1$: دو تعادل کامل زیر بازی داریم که در یکی بازیگر ۱ انتخاب I و در دیگری انتخاب O دارد.
اگر $X = 3/2$: بینهایت تعادل کامل زیربازی داریم که در زیر بازی سوم، بازیگر ۱ حرکت I را انتخاب می‌کند.
اگر $X > 3/2$: یک تعادل کامل زیربازی داریم که در زیر بازی سوم، بازیگر ۱ حرکت I را انتخاب می‌کند.

فصل ۲، تمرین ۱۳: علی امینی

نمودار درختی بازی به شکل زیر است:



حرف D به معنی دست کشیدن و حرف d یعنی مردن! N طبیعت است.

با استفاده از استنتاج پس‌رو تعادل کامل زیربازی را به‌دست می‌آوریم.

- **برای حالتی که $a = b = 0.25$ است.**

– از گره آخر (گره یازدهم از سمت چپ) شروع می‌کنیم در اینجا تنها شلیک باقی‌مانده دارای گلوله است. بنابراین اگر بازیگر ۲ شلیک کند به‌طور قطع کشته می‌شود و مطلوبیت صفر را کسب می‌کند. بنابراین از شلیک دست می‌کشد تا مطلوبیت $b = 0.25$ را کسب کند.

– در گره نهم، بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0.25 = \frac{5}{8}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.25$$

مطلوبیت شلیک کردن برای بازیگر ۱ بیشتر است پس شلیک می‌کند و تعادل این زیربازی $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$ است.

– در گره هفتم بازیگر ۲ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{2,pull} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$$

$$U_1 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$U_{2,Deny} = b = 0.25$$

مطلوبیت شلیک کردن برای بازیگر ۲ بیشتر است بنابراین شلیک می‌کند. و تعادل این زیربازی $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{12}\right)$ است.

– در گره پنجم بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{9}{16}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.25$$

مطلوبیت شلیک کردن برای بازیگر ۱ بیشتر است بنابراین شلیک می‌کند. و تعادل این زیربازی $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right)$ است.

– در گره سوم بازیگر ۲ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{2,pull} = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{5} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{20}$$

$$U_1 = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$$U_{2,Deny} = b = 0.25$$

مطلوبیت شلیک کردن برای بازیگر ۲ بیشتر است بنابراین شلیک می‌کند. و تعادل این زیربازی $\left(\frac{3}{5}, \frac{9}{20}\right)$ است.

– در گره اول بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times \frac{9}{20} = \frac{13}{24}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.25$$

مطلوبیت شلیک کردن برای بازیگر ۱ بیشتر است بنابراین شلیک می‌کند. و تعادل این زیربازی $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{24}\right)$ است.

بنابراین تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با:

$$\boxed{SPNE = (PPP, PPD) = \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{24}\right)}$$

که مطابق قضیه ۲.۴ یک تعادل نش نیز هست.

- **برای حالتی که $a = b = 0.95$ است.**

– مشابه حالت قبل از گره آخر (گره یازدهم از سمت چپ) شروع می‌کنیم در اینجا تنها شلیک باقی‌مانده دارای گلوله است. بنابراین اگر بازیگر ۲ شلیک کند به‌طور قطع کشته می‌شود و مطلوبیت صفر را کسب می‌کند. بنابراین از شلیک دست می‌کشد تا مطلوبیت $b = 0.95$ را کسب کند.

– در گره نهم، بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0.95 = \frac{1.95}{2}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.95$$

مطلوبیت دست کشیدن برای بازیگر ۱ بیشتر است پس شلیک نمی‌کند و تعادل این زیربازی $(0.95, 1)$ است.

– در گره هفتم بازیگر ۲ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{2,pull} = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times \ 1 = \frac{2}{3}$$

$$U_1 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0.95 = \frac{2.9}{3}$$

$$U_{2,Deny} = b = 0.95$$

مطلوبیت دست کشیدن برای بازیگر ۲ بیشتر است بنابراین شلیک نمی‌کند. و تعادل این زیربازی $(1, 0.95)$ است.

– در گره پنجم بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times \ 1 = \frac{3}{4}$$

$$U_2 = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} \times 0.95 = \frac{3.85}{4}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.95$$

مطلوبیت دست کشیدن برای بازیگر ۱ بیشتر است بنابراین شلیک نمی‌کند. و تعادل این زیربازی $(0.95, 1)$ است.

– در گره سوم بازیگر ۲ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{2,pull} = \frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{5} \times \ 1 = \frac{4}{5}$$

$$U_1 = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times 0.95 = \frac{4.8}{5}$$

$$U_{2,Deny} = b = 0.95$$

مطلوبیت دست کشیدن برای بازیگر ۲ بیشتر است بنابراین شلیک نمی‌کند. و تعادل این زیربازی $(1, 0.95)$ است.

– در گره اول بازیگر ۱ باید تصمیم بگیرد، بنابراین پیامد انتظاری شلیک کردن و دست کشیدن را مقایسه می‌کند:

$$U_{1,pull} = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{6} \times \ 1 = \frac{5}{6}$$

$$U_2 = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} \times 0.95 = \frac{5.75}{6}$$

$$U_{1,Deny} = a = 0.95$$

مطلوبیت دست کشیدن برای بازیگر ۱ بیشتر است بنابراین شلیک نمی‌کند. و تعادل این زیربازی $(0.95, 1)$ است.

بنابراین تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با:

$$\boxed{SPNE \ = (DDD, DDD) = (0.95, 1)}$$

که مطابق قضیه ۲.۴ یک تعادل نش نیز هست.

نکته این سوال در این بود که اگر افراد زندگی کردن را دوست داشته باشند و احساس شرمساری کمتری از دست کشیدن کسب کنند (حالت دوم که $a = b = 0.95$) بازی در همان مرحله اول تمام می‌شود ولی در حالت اول که جان افراد کم‌ارزش و احساس شرمساری از دست کشیدن بسیار زیاد است، بازی تا مرحله آخر پیش می‌رود.

فصل ۲، تمرین ۱۴: حسن ابوذرپور

الف)

دقت شود که در این بازی ابتدا بنگاه ۱ تولیدش را انتخاب می‌کند و با توجه به آن بنگاه دو تولیدش را منوط به بنگاه ۱ انتخاب می‌کند و این بازی همزمان نیست. بنابر استدلال پس‌رو از بنگاه دوم شروع می‌کنیم. مساله بهینه‌سازی بنگاه دوم را یادداشت می‌کنیم:

$$\max_{q_2} \pi_2 = q_2 * (6 - (q_1 + q_2) - 4)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 6 - q_1 - 2q_2 = 0 \longrightarrow q_2^*(q_1) = \frac{2 - q_1}{2}$$

حال بنگاه اول با علم به این‌که رفتار بنگاه دو به چه صورت خواهد بود، مساله بهینه‌سازی خود را حل خواهد کرد. به این منظور مساله بهینه‌سازی بنگاه اول برابر خواهد بود با :

$$\max_{q_1} \pi_1 = q_1 * \left(6 - \left(q_1 + \frac{2 - q_1}{2}\right) - 4\right) = q_1(1 - \frac{q_1}{2})$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 1 - q_1 = 0 \longrightarrow q_1^* = 1$$

بنگاه ۱ بیشتر از ۱ واحد تولید نخواهدکرد. بعلاوه مجموعه تولید وی برابر خواهد بود با $q_1 \in [0,1]$. دقت کنید که مجموعه تولید برابر است با مجموعه‌ای از خروجی‌های بنگاه اقتصادی به ازای سطح مشخصی از نهاده‌های تولیدی. لذا با نهاده‌ای که خروجی آن مقدار بهینه ۱ واحد باشد، در بازه مذکور می‌توان تولید را انجام داد. همچنین مجموعه تولید بنگاه دوم با توجه به مجموعه تولید بنگاه اول در بازه $q_2 \in [0.5,1]$ خواهد بود.

ب)

بازی کورنو به مثابه بازی همزمان بین دو بنگاه می‌باشد. برای حل تابع بهترین پاسخ هر بازیگر را تشکیل می‌دهیم.

$$\pi_1 = q_1(2 - q_1 - q_2) \rightarrow BR_1(q_2) = \frac{2 - q_2}{2}$$

$$\pi_2 = q_2(2 - q_1 - q_2) \rightarrow BR_2(q_1) = \frac{2 - q_1}{2}$$

با معادل قرار دادن تولید تعادلی معادل خواهد بود با :

$$q_1^* = q_2^* = \frac{2}{3}$$

ج)

اگر بنگاه ۲ انحصاری رفتار کند، با حل مساله انحصارگر به $q_2^* = 1$ خواهیم رسید. همچنین از فرض سوال داریم $q_1^* = 0$. در این حالت بنگاه ۱ سود صفر کسب خواهد کرد و خواهیم داشت:

$$MR = 6 - 2q_1 - 1 \xrightarrow{q_1=0} MR = 5 > 4 = MC$$

لذا بنگاه ۱ تمایل دارد که تولید خود را افزایش دهد تا سودش بیشتر شود و از وضعیت $q_1 = 0$ انگیزه تخطی خواهد داشت. لذا این حالت تعادل نش نمی‌تواند باشد.

د)

تعادل کامل هر زیر بازی برابر خواهد بود با $(q_1,\frac{2-q_1}{2})$. از میان تمامی حالات تعادلی نیز، $(1,\frac{1}{2})$ نتیجه‌ی استدلال پس‌رو می‌باشد. دقت شود که بنگاه ۱ از رفتار بنگاه ۲ که تابعی از تولید خودش هست اطلاع دارد و با علم به‌این میزان تولید خود را حداکثر می‌کند که برابر با ۱ می‌باشد.

فصل ۲، تمرین ۱۶: پریماه صفریان

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$P_1 = 10 - q_1 - 0/5\, q_2$$

$$C_2 = 2q_2 \qquad P_2 = 10 - q_2 - 0/5\, q_1$$

$$C_1^2 = 8/1 + 2q_1 \qquad C_1^1 = 12 + q_1$$

$$C_1^4 = 2/7 + 4q_1 \qquad C_1^3 = 5 + 3q_1$$

فناوری ۱:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^1$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{q_1}\pi_1 = 9 - 2q_1 - 0/5q_2 = 0$$

$$\partial_{q_2}\pi_2 = 8 - 2q_2 - 0/5q_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$q_2^* = 3/07 \qquad q_1^* = 3/73$$

فناوری ۲:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^2$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{q_1}\pi_1 = ۸ - 2q_1 - 0/5q_2 = 0$$

$$\partial_{q_2}\pi_2 = 8 - 2q_2 - 0/5q_1 = 0$$

که این بار متقارن است. تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$q_2^* = 3/۲ \qquad q_1^* = 3/۲$$

فناوری 3:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^3$$
$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{q_1}\pi_1 = ۷ - 2q_1 - 0/5q_2 = 0$$
$$\partial_{q_2}\pi_2 = 8 - 2q_2 - 0/5q_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$q_2^* = 3/33 \qquad q_1^* = ۲/67$$

فناوری ۴:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^۴$$
$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{q_1}\pi_1 = ۶ - 2q_1 - 0/5q_2 = 0$$
$$\partial_{q_2}\pi_2 = 8 - 2q_2 - 0/5q_1 = 0$$

که این بار متقارن است. تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$q_2^* = 3/۴۷ \qquad q_1^* = ۲/13$$

رقابت برتراند:

در رقابت برتراند بنگاه‌ها در تعیین قیمت‌ها با هم رقابت می‌کنند. فرض می‌کنیم توانایی تولید هر مقدار محصول را داشته باشند.

$$\begin{cases} P_1 = 10 - q_1 - 0/5\ q_2 \\ P_2 = 10 - q_2 - 0/5\ q_1 \end{cases} = \begin{cases} q_1 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{4}{3}P_1 - \dfrac{2}{3}P_2 \\ q_2 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{2}{3}P_2 + \dfrac{2}{3}P_1 \end{cases}$$

فناوری ۱:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^{۱}$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{P_1}\pi_1 = 8 - \frac{8}{3}P_1 - \frac{2}{3}P_2 = 0$$

$$\partial_{P_2}\pi_2 = 8 - \frac{4}{3}P_2 + \frac{2}{3}P_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$P_2^* = \frac{20}{3} \qquad\qquad P_1^* = \frac{4}{3}$$

فناوری ۲:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^{۲}$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{P_1}\pi_1 = 8 - \frac{8}{3}P_1 - \frac{2}{3}P_2 + \frac{۸}{۳} = 0$$

$$\partial_{P_2}\pi_2 = 8 - \frac{4}{3}P_2 + \frac{2}{3}P_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$P_2^* = \frac{۶۲}{۹} \qquad\qquad P_1^* = \frac{۱۶}{۹}$$

فناوری ۳:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^{۳}$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{P_1}\pi_1 = 8 - \frac{8}{3}P_1 - \frac{2}{3}P_2 + ۴ = 0$$

$$\partial_{P_2}\pi_2 = 8 - \frac{4}{3}P_2 + \frac{2}{3}P_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$P_2^* = \frac{۶۴}{۹} \qquad\qquad P_1^* = \frac{۲۰}{۹}$$

فناوری ۴:

$$\pi_1 = P_1 q_1 - C_1^{۴}$$

$$\pi_2 = P_2 q_2 - C_2$$

بهترین پاسخ هر یک از بازیگران با مشتق‌گیری نسبت به تولید خودشان به دست می‌آید.

$$\partial_{P_1}\pi_1 = 8 - \frac{8}{3}P_1 - \frac{2}{3}P_2 + \frac{۱۶}{۳} = 0$$

$$\partial_{P_2}\pi_2 = 8 - \frac{4}{3}P_2 + \frac{2}{3}P_1 = 0$$

تعادل از تقاطع بهترین واکنش‌ها به دست می‌آید.

$$P_1^* = \frac{۸}{3} \qquad P_2^* = \frac{2۲}{3}$$

تعادل‌های بالا با این شرایط به دست آمده‌اند که بازیگر ۱، فناوری و مقدار تولید/قیمت را همزمان انتخاب می‌کند. برای بخش «ب» که فناوری را همزمان انتخاب نمی‌کند باید بررسی کنیم که بازیگر ۱ به ازای q_2^*/P_2^* با فناوری دیگری سود بیشتری عایدش می‌شود یا نه، تا بتوانیم انگیزه‌ی انحراف داشتن را بررسی کنیم. برای این کار بهترین واکنش بازیگر ۱ را به ازای q_2^*/P_2^* با فناوری‌های دیگر به دست می‌آوریم و مقدار سود را با حالتی که همان فناوری را به کار ببرد مقایسه می‌کنیم.

جدول زیر خلاصه‌ای از تعادل‌هایی است که از پیش به دست آورده‌ایم:

فناوری	بهترین واکنش ۱	q_1^*	q_2^*	π_1^*	π_1
۱	$9-2q_1-0{/}5q_2=0$	$3{/}73$	$3{/}07$	$1{/}93$	$9q_1-q_1^2-0{/}5\,q_1q_2-12$
۲	$8-2q_1-0{/}5q_2=0$	$3{/}2$	$3{/}2$	$2{/}14$	$8q_1-q_1^2-0{/}5\,q_1q_2-8{/}1$
۳	$7-2q_1-0{/}5q_2=0$	$2{/}67$	$3{/}33$	$2{/}12$	$7q_1-q_1^2-0{/}5\,q_1q_2-5$
۴	$6-2q_1-0{/}5q_2=0$	$2{/}12$	$3{/}47$	$1{/}85$	$6q_1-q_1^2-0{/}5\,q_1q_2-2{/}7$

$q_2^*=3{/}07$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری ۲	$3{/}23$	$1{/}68$
فناوری ۳	$2{/}73$	$2{/}46$
فناوری ۴	$2{/}23$	$2{/}28$

انگیزه‌ی انحراف ندارد.

$q_2^*=3{/}20$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری 1	$3{/}70$	$1{/}69$

فناوری ۳	2/70	2/29
فناوری ۴	2/20	2/14

انگیزه‌ی انحراف دارد.

$q_2^* = 3/33$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری *1*	3/67	1/45
فناوری *2*	3/17	1/93
فناوری ۴	2/17	2/00

انگیزه‌ی انحراف ندارد.

$q_2^* = 3/47$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری *1*	3/63	1/29
فناوری *2*	3/13	1/71
فناوری *3*	2/63	1/60

انگیزه‌ی انحراف دارد.

جدول زیر خلاصه‌ای از تعادل‌های برتراندی است که از پیش به دست آورده‌ایم:

فناوری	بهترین واکنش ۱	P_1^*	P_2^*	π_1^*	π_1
۱	$12 - 4P_1 - P_2 = 0$	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$	$-11/85$	$8P_1 - \frac{4}{3}P_1^2 - \frac{2}{3}P_1P_2 + \frac{2}{3}P_2 - \frac{56}{3}$

۲	$14-4P_1-P_2=0$	$\frac{16}{9}$	$\frac{62}{9}$	$-8/00$	$\frac{28}{3}P_1-\frac{4}{3}P_1^2-\frac{2}{3}P_1P_2+\frac{4}{3}P_2-21/4$
۳	$16-4P_1-P_2=0$	$\frac{20}{9}$	$\frac{64}{9}$	$-4/19$	$\frac{32}{3}P_1-\frac{4}{3}P_1^2-\frac{2}{3}P_1P_2+2P_2-25$
۴	$18-4P_1-P_2=0$	$\frac{8}{3}$	$\frac{22}{3}$	$-0/36$	$12P_1-\frac{4}{3}P_1^2-\frac{2}{3}P_1P_2+\frac{8}{3}P_2-29/4$

$P_2^*=20/3$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری ۲	$11/3$	$-8/03$
فناوری ۳	$7/3$	$-4/41$
فناوری ۴	$17/6$	$-0/92$

انگیزه‌ی انحراف دارد.

$P_2^*=62/9$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری *1*	$23/18$	$-11/90$
فناوری ۳	$41/18$	$-4/30$
فناوری ۴	$25/9$	$-0/74$

انگیزه‌ی انحراف دارد.

$P_2^*=$ ۶۴/ ۹		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری *1*	۱۱/۹	−11/۹۳
فناوری *2*	۳1/18	−۷/96

فناوری ۴	۴۹/۱۸	$-0/56$

انگیزه‌ی انحراف دارد.

$P_2^* = 22/3$		
	بهترین واکنش ۱	سود ۱
فناوری *1*	$7/6$	$-11/96$
فناوری *2*	$5/3$	$-7/92$
فناوری *3*	$8/3$	$-4/41$

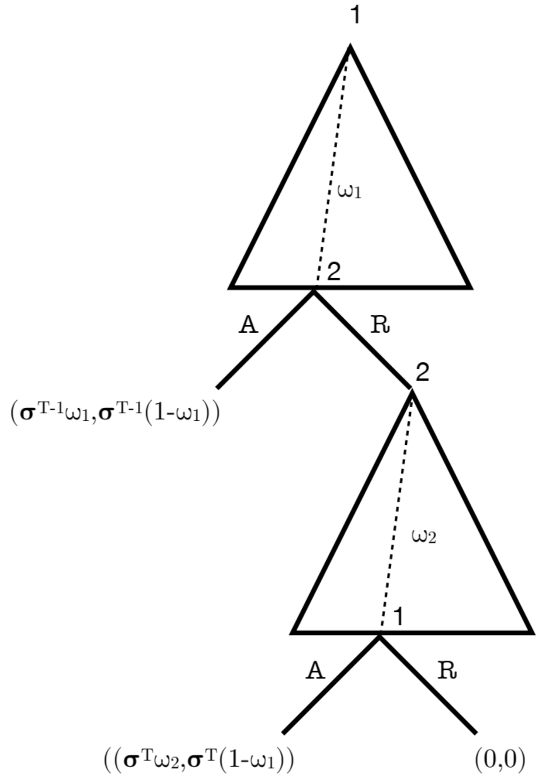
انگیزه‌ی انحراف ندارد.

نکته: از آنجایی که تصمیم‌گیری در هر دو بخش سؤال برای مقدار تولید/قیمت برای دو کارخانه همزمان است نمی‌توان عمل مشتق‌گیری و بهینه کردن را یکی پس از دیگری و با جایگذاری انجام داد و باید تقاطع بهترین واکنش‌ها را بررسی کرد.

فصل ۲، تمرین ۱۷: امیرمسعود باقری

سوال ۱۷.

برای سادگی محاسبات مقدار کل پول را یک فرض می‌کنیم. ابتدا دینامیک بازی در دو روز آخر به فرض اینکه T یک عدد زوج باشد را بررسی می‌کنیم:



توجه شود که مطابق صورت سوال، مقدار سهم پیشنهادی بازیکن دوم به بازیکن اول در روزهای زوج باید حداکثر به خوبی پیشنهاد بازیکن اول در روز فرد قبلی باشد. به بیان دیگر همواره در هر دو روز فرد و زوج پیاپی مشابه دو روز مورد بحث، $\omega_1 \geq \omega_2$ خواهد بود(در حالتی که $\omega_1 > \omega_2$ باشد، مقداری از کیک دست‌نخورده باقی می‌ماند)؛ زیرا در روز زوج، سهم پیشنهادی بازیکن دوم برای خودش مشابه روز قبلی است.
تحت این شرایط، مطلوبیت انتظاری بازیکن اول از رد پیشنهادش توسط بازیگر دوم، همواره کمتر از قبول پیشنهاد است. زیرا با توجه به رابطه‌ی بالا، همواره $\omega_1 \geq \omega_2$ است و مطلوبیت انتظاری تحت همچین شرایطی برابر خواهد بود با:

$$U_1(\omega_1|BR_2(\omega_1) = R) = \sigma^T\omega_2 \leq \sigma^T\omega_1 < \sigma^{T-1}\,\omega_1 = U_1(\omega_1|BR_2(\omega_1) = A)$$

پس مطابق استدلال پس‌رو، بازیگر اول تنها پیشنهادهایی را به بازیگر دوم ارائه خواهد کرد که به ازای آن، بازیگر دوم حتما در روز فرد پیشنهاد را بپذیرد و بازی به روز زوج نرود. با توجه به ساختار بازی در دو روز آخر، کافی‌ست پیشنهاد $\omega_1 > 0$ را در روز اول ارائه کند. زیرا به رفتار عقلایی بازیگر دوم باور دارد و می‌داند که در این صورت بازیگر دوم نیز چون حتما در روز دوم با استدلالی مشابه، مطلوبیت انتظاری کمتری نسبت به قبول پیشنهاد روز اول به دست خواهد آورد، در روز اول پیشنهاد بازیگر اول را خواهد پذیرفت.

در اینصورت با استدلال مشابه در زوج روزهای قبلی، می‌توان با استدلال پس رو به این نتیجه رسید که بازیگر اول برای بی‌تفاوت کردن بازیگر دوم در روز زوج قبلی، پیشنهاد $\sigma^2(1 - \omega_1)$ را به بازیگر دوم داده و کل باقی مانده را برای خود برخواهد داشت و به همین ترتیب تا مرحله‌ی آغازین این موضوع ادامه پیدا خواهد کرد که پیشنهاد $\sigma^T(1 - \omega_1)$ به بازیگر دوم ارائه شده و اون نیز آن را می‌پذیرد. همچنین با دانستن این موضوع که هر مقدار مثبت ω_1 به مقادیر بزرگتر از خود مغلوب است، در تعادل کامل زیر بازی این مقدار بسیار نزدیک به یک اتخاذ شده و می‌بایست به یک میل کند.
در حالتی که T فرد باشد، آخرین تصمیم به عهده‌ی بازیگر دوم است. کافی‌ست استدلال پس رو را برای مرحله‌ی آخر اعمال کنیم تا به شرایطی مشابه قسمت قبل برسیم. تحت این شرایط بازیگر یک برای بی‌تفاوت کردن بازیگر دو، پیشنهاد $1-\omega_1$ خود را در این مرحله ارائه خواهد داد و باقی مراحل به صورت قبل خواهد بود.

فصل ۲، تمرین ۱۸: امیرمسعود باقری

سوال ۱۸.

با توجه به اینکه مقدار $\nu > c$ است، حتما می‌توان مقدار ν را نسبت به c به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{Kc} < \nu \leq (\mathrm{K}+1)\mathrm{c} \; ; \; \mathrm{K} \in \mathbb{Z}$$

با توجه به اینکه تحت این حالت احتمال منفی شدن مطلوبیت انتظاری بازیکنان هست، شرط تمام شدن بازی در T که در سوال قبل مطرح شد را، در این سوال در نظر نمی‌گیریم؛ زیرا در این صورت بازیکنان پس از منفی شدن مطلوبیت، صرفا به دنبال تمام شدن بازی در T هستند تا مطلوبیت آنها به صفر افزایش پیدا کند که به لحاظ معنایی با Setup جدید مسئله در تناقض است. همچنین این فرض شهودی را وارد مسئله می‌کنیم که بدیهتا هر دو بازیکن از مطلوبیت منفی گریزان هستند. در این صورت در روز $2K+2$، مطلوبیت به دست آوردن ν برای هر دو بازیکن نزدیک به صفر و پس از آن منفی خواهد شد. همچنین با توجه به اینکه بازیگر یک ابتدا بازی را آغاز می‌کند، لذا نخستین بار بازیگر یک به این مرحله خواهد رسید. با توجه به این موضوع، در صورت عبور از این مرحله، هر پیشنهادی که توسط بازیکن دو مطرح شود، توسط بازیگر یک پذیرفته خواهد شد؛ زیرا پس از آن با توجه به اینکه ارائه‌ی پیشنهاد توسط بازیگر یک با هزینه‌ی c همراه است، مطلوبیت وی حتی اگر کل ν را به دست آورد منفی خواهد شد. تحت این حالت، اگر فرض کنیم که پیشنهاد بازیگر دوم ω_2 باشد، این پیشنهاد می‌تواند عضو بازه‌ی $[0, \omega_1]$ باشد و بازیگر دوم با توجه به اینکه مطلوبیت وی تغییری نمی‌کند، در ارائه‌ی پیشنهاد در این بازه بی تفاوت خواهد بود و لذا بازیگر یک ممکن است مجبور به پذیرش مطلوبیت صفر شود. از طرفی بازیگر دوم می‌داند که در صورتی که بازی به روز بعد برود، حتما بازیگر یک به علت منفی شدن مطلوبیت، کلیه‌ی ν را طلب خواهد کرد و در نهایت $(K+1)c$- نصیب بازیگر دوم خواهد شد. لذا بازیگر یک که تلاش دارد برای بالاتر بردن مطلوبیت خود و کمینه کردن ریسک اجبار به پذیرش پیشنهاد $\omega_2 = 0$، در روز قبلی بازیگر دوم را به گونه‌ای بی تفاوت خواهد که بازی به مرحله‌ی بعدی کشیده نشود. از طرف دیگر با توجه به اینکه بازیگر دوم قادر به تعیین مطلوبیت خود نیست و تحت هر شرایطی $1-\omega_1$ به وی تعلق خواهد گرفت، حتما قبول پیشنهاد بازیگر اول را به رفتن بازی به روز بعد ترجیح خواهد داد، زیرا آنچنان که بحث شد، مطلوبیت انتظاری وی در صورت ادامه‌ی بازی به روز بعدی، کمتر از صفر و مطلوبیت انتظاری وی در صورت اتمام بازی، به اندازه‌ی c از مقدار $1-\omega_1$ کمتر خواهد بود. لذا بازیگر اول پیشنهاد $\omega_1 = 0$ را ارائه خواهد کرد و بازیگر دوم در همان مرحله این پیشنهاد را خواهد پذیرفت. به همین ترتیب در مراحل بالاتر نیز، پیشنهاد بازیگر اول به بازیگر دوم مقدار 0 خواهد بود و در نهایت در مرحله‌ی اول نیز بازیگر اول پیشنهاد $(\nu,0)$ را ارائه خواهد کرد و بازیگر دوم نیز این پیشنهاد را در مرحله‌ی اول خواهد پذیرفت که تعادل کامل زیر بازی در این حالت خواهد بود.

فصل ۲، تمرین ۱۹: حسن ابوذرپور

برای حل از روش استنتاج پس‌رو استفاده خواهیم کرد. دزد R ام قطعا پیشنهاد دزد $R-1$ ام را قبول نمی‌کند. چرا که درصورت قبول نکردن تمام طلاها را بدست آورده و از کشته شدن دزد $R-1$ ام نیز مطلوبیت کسب می‌کند. لذا دزد $R-1$ ام که از تصمیم دزد R ام اطلاع دارد، برای زنده ماندن پیشنهاد دزد $R-2$ ام را خواهد پذیرفت. حال دزد $R-2$ ام می‌داند که دزد $R-1$ ام پیشنهاد وی را قبول خواهدکرد. لذا قطعا پیشنهاد دزد $R-3$ ام را رد کرده تا خودش پیشنهاد را به دزد $R-1$ ام ارائه دهد. به همین منوال تا دزد شماره یک استدلال مشابه بکار می‌رود. همانطور که مشخص است دزد R ام با دزد $R-2$ ام رفتار یکسانی خواهند داشت. در واقع اگر تعداد دزدها زوج باشد. در اینصورت دزد اول در جایگاه دزد $R-1$ ام خواهد بود و پیشنهادش توسط دزد ۲ ام رد شده و تمام طلاها به دزد ۲ می‌رسد. بعلاوه اگر تعداد دزدها فرد باشد، در اینصورت دزد اول در جایگاه دزد $R-2$ ام قرار خواهد گرفت و هر پیشنهادی بدهد، توسط دزد دوم قبول خواهد شد و همه طلاها به دزد ۱ می‌رسد.

پس بطور کلی در تعادل بازی اگر R فرد باشد تمام طلاها به دزد ۲ و اگر R زوج باشد تمام طلاها به دزد ۱ خواهد رسید.

فصل ۲، تمرین ۲۰: علی امینی

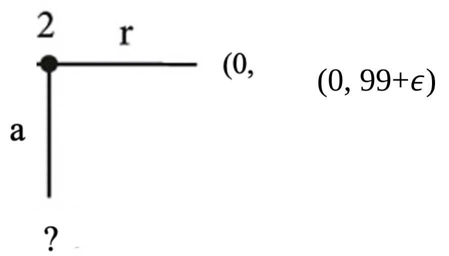
برای حل این سوال با استفاده از استنتاج پس‌رو باید از نهایی‌ترین مرحله، یعنی زمانی که تنها ۱ دزد دریایی باقی مانده است شروع به تحلیل کنیم و به مراحل بعدی با تعداد دزد دریایی بیشتر برویم تا به تعداد R دزد دریایی برسیم.

- ***R = 1***

در این حالت تنها دزد دریایی کلیه ۱۰۰ سکه را تصاحب می‌کند.

- ***R = 2***

دزد دریایی اول باید پیشنهادی به دزد دوم بدهد که انگیزه رد کردن نداشته باشد. در غیر این صورت طعمه کوسه‌ها می‌شود.

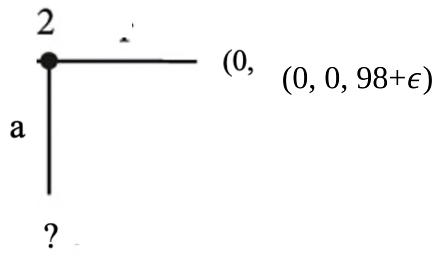


مشخص است که برای اینکه دزد دوم پیشنهاد را رد نکند باید تمام ۱۰۰ سکه را به او بدهد. چراکه ϵ لذت اندکی است که دزد ۲ از غذا دادن به کوسه‌ها می‌برد! و اگر دزد اول به دریا بیفتد ۹۹ سکه باقی می‌ماند. در نتیجه تعادل کامل زیربازی در این حالت برابر است با:

$$SPNE = (0,100)$$

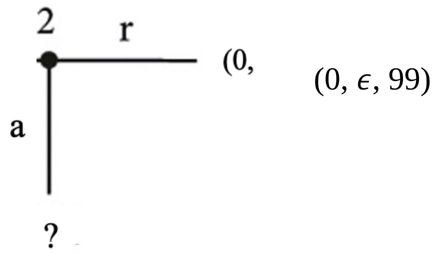
- ***R = 3***

دزد دریایی دوم باید پیشنهادی به دزد سوم بدهد که او رد نکند در غیر اینصورت طعمه کوسه‌ها می‌شود.



مطابق استدلال قبل پیشنهاد دزد ۲ به دزد ۳ به‌صورت (۹۹ ، ۰، ۰) است. باید دقت شود که در این حالت ۹۹ سکه باقی مانده‌است و دزد دریایی اول طعمه کوسه‌ها شده است.

در تحلیل زیربازی مرحله بعدی، دزد ۱ حضور دارد و باید به‌گونه‌ای به دزد ۲ پیشنهاد بدهد که او انگیزه رد کردن نداشته باشد.



در اینجا دزد ۲ درصورت رد کردن پیشنهاد دزد ۱، لذت اندکی از قربانی شدن دزد ۱ می‌برد. بنابراین برای راضی کردن او باید ۱ سکه به او پیشنهاد داد تا انگیزه رد کردن نداشته باشد. در نتیجه تعادل کامل زیربازی در این حالت برابر است با:

$$SPNE = (99, 1, 0)$$

- $R > 4$

در این حالت کافی است پیشنهاد دزد اول به دزد دوم بررسی شود، زیرا سایر زیربازی‌ها در حالات قبلی تحلیل شده‌اند. با کمی دقت متوجه می‌شویم اگر تعداد دزدان دریایی فرد باشد (R فرد باشد) دزد ۱ با تعادل حاصل از $R = 3$ مواجه می‌شود یعنی باید ۱ سکه به دزد دوم بدهد تا او را راضی کند که پیشنهاد را رد نکند.

اگر تعداد دزد دریایی زوج باشد (R زوج باشد) دزد ۱ با تعادل حاصل از $R = 2$ مواجه می‌شود یعنی باید کل سکه‌ها را به دزد ۲ بدهد تا پیشنهادش رد نشود.

جدول زیر خلاصه‌ای از تعادل‌های کامل زیربازی در هر حالت R را نشان می‌دهد.

R	1	2	3	4	5		98	99
1	100	-	-	-	-		-	-
2	0	100	-	-	-		-	-
3	99	1	0	-	-	...	-	-
4	0	100	0	0	-		-	-
5	99	1	0	0	0		-	-
				...				
98	0	100	0	0	0		0	-
99	99	1	0	0	0		0	0

فصل ۲، تمرین ۲۱: پریماه صفریان

سه بازیگر به ترتیب یک نوبت بازی دارند و باید پیشنهادی ارائه دهند که احتمال می‌دهند بقیه آن را قبول کنند. اگر پیشنهاد هر سه بازیگر از طرف دیگران رد شود، تمام کیک باقی مانده بین آن‌ها تقسیم می‌شود و به هر یک سهم $\frac{\delta^3}{3}$ می‌رسد. برای حل این پرسش به صورت بازگشتی به مسئله نگاه می‌کنیم:

زمانی که بازیگر سوم پیشنهاد می‌دهد مقدار δ^2 از کیک باقی مانده و بازیگران می‌دانند که در صورتی که پیشنهاد بازیگر ۳ قبول نشود به هر یک سهم $\frac{\delta^3}{3}$ خواهد رسید. بنا بر این بازیگر سه به هر یک از بازیگران معادل همین مقدار را پیشنهاد داده و خودش باقی مانده را که $\delta^2 - \frac{2}{3}\delta^3$ است برمی‌دارد.

در مرحله‌ی قبل، بازیگر ۲ می‌داند که کمینه مقدار پیشنهادی به بازیگر ۳ باید برابر با دستاوردی باشد که برای مرحله‌ی سوم پیش‌بینی کردیم. پس این مقدار را به بازیگر ۳ و مقدار $\frac{\delta^3}{3}$ را به بازیگر ۱ پیشنهاد می‌دهد؛ چرا که بازیگر ۱ راهی برای به دست آوردن بیش از آن ندارد. الباقی کیک نصیب بازیگر ۲ می‌شود که برابر است با $\delta - \frac{\delta^3}{3} - (\delta^2 - \frac{2}{3}\delta^3)$.

در مرحله‌ی نخست، بازیگر ۱ می‌داند که کمینه پیشنهادی که بازیگر ۲ و ۳ می‌پذیرند برابر با $\delta + \frac{\delta^3}{3} - \delta^2$ و $(\delta^2 - \frac{2}{3}\delta^3)$ است در نتیجه الباقی را خودش برمی‌دارد و این دو سهم را به آن‌ها پیشنهاد می‌دهد. این در صورتی است که مقداری که باقی می‌ماند از $\frac{\delta^3}{3}$ بزرگتر باشد. مقدار باقی مانده برابر است با:

$$۱ - \delta - \frac{\delta^3}{3} + \delta^2 - \delta^2 + \frac{2}{3}\delta^3 = 1 - \delta + \frac{\delta^3}{3}$$

که با توجه به آن که $\delta < 1$ لزوما از $\frac{\delta^3}{3}$ بزرگتر است.

فصل ۲، تمرین ۲۲: حسن ابوذرپور

الف) ابتدا پیامد هر بازیگر از شلیک همزمان آن‌ها به یکدیگر را بدست می‌آوریم. دقت شود که پیامد هر بازیگر در انتخاب‌های مختلف برابر است با حاصلضرب احتمال زنده ماندن فرد در مقدار پولی که بدست می‌آورد. برای نمونه اگر بازیگر ۱ به بازیگر ۲، بازیگر ۲ به بازیگر ۱ و بازیگر ۳ به بازیگر ۱ شلیک کنند، پیامد بازیگر اول برابر خواهد بود با :

$$p_1 = 0.6 * 0.3 = 0.18$$

$$u_1 = \ probability\ of\ death\ 2 * payoff + probability\ of\ survive\ 2 * payoff$$
$$= p_1 * (0.2) * (500.5 + 1000) + p_1 * (0.8) * (1000) = 198.018$$

که p_1 احتمال زنده ماندن بازیگر ۱ و u_1 مطلوبیت ناشی از انتخاب‌های مذکور است.

$$p_2 = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$u_2 = probability\ of\ death\ 1\ by\ 2 * payoff + probability\ of\ death\ 1\ by\ 3 * payoff + probability\ of\ death\ 1\ by\ 2{,}3 * payoff + probability\ of\ survive\ 1 * payoff$$

$$= \ p_2 * (0.4) * (0.3) * (500 + 1001) + p_2 * (0.7) * (0.6) * (500 + 1001) + p_2 * (0.7) * (0.4) * (500 + 1001) + p_2 * (0.6) * (0.3) * (1001) = 1128.8$$

که p_2 احتمال زنده ماندن بازیگر ۲ و u_2 مطلوبیت ناشی از انتخاب‌های مذکور است.

$$p_3 = 1$$

$$u_3 = \ probability\ of\ death\ 1\ \&\ survive 2 * payoff + probability\ of\ death\ 2\ \&\ survive 1 * payoff + Probability\ of\ death\ of\ both * payoff + probability\ of\ survive\ of\ both * payoff$$

$$= p_2(1 - p_1) * (500 + 1002) + p_1(1 - p_2) * (500.5 + 1002) + (1 - p_2) * (1 - p_1) * (2001 + 1002) + p_2 * p_1 * 1002 = 1676.182$$

به همین منوال برای تمام حالات پیامدهای بازیگران را بدست آورده و جدول پیامدها را به شکل زیر تکمیل می‌کنیم.

بازیگر۲

بازیگر ۱		شلیک به ۱	شلیک به ۳
	شلیک به ۲	(198.018,1128.8,1676.18)	(414.18,1465.34,955.302)
	شلیک به ۳	(198.036,1675.36,1129.6)	(378.15,1975.88,648.96)

شلیک ۳ به ۱

بازیگر۲

بازیگر ۱		شلیک به ۱	شلیک به ۳
	شلیک به ۲	(828.22,288.24,1886.53)	(1885.23,288.36,829.42)
	شلیک به ۳	(954.45,414.38,1465.99)	(1975.41,378.45,649.12)

شلیک ۳ به ۲

همانطور که مشخص است این بازی دو تعادل نش محض دارد که عبارتند که در آن، ۱: شلیک بازیگر اول به دوم، شلیک بازیگر دوم به سوم و شلیک سومی به اولی و ۲: شلیک اولی به سومی، شلیک دومی به اولی و شلیک سومی به دومی تعادل‌های محض این بازی را می‌سازند. حال برای بدست آوردن تعادل‌های ترکیبی بازی به شلیک هر کدام از بازیگران احتمالی تخصیص می‌دهیم. فرض کنید بازیگر ۱ با احتمال x به بازیگر ۲ و با احتمال $1-x$ به بازیگر ۳ شلیک کند. بازیگر دوم نیز با احتمال y به بازیگر ۱ و با احتمال $1-y$ به بازیگر ۳ شلیک کند. بعلاوه بازیگر سوم نیز با احتمال z به بازیگر ۱ و با احتمال $1-z$ به بازیگر ۲ شلیک کند. برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۱ از کشتن ۲ و ۳ خواهیم داشت:

$$E_1(2) = 198.018yz + 414.18z(1-y) + 828.22(1-r)y + 1885.23(1-r)(1-y)$$

$$E_1(3) = 198.036yz + 378.15z(1-y) + 954.45(1-r)y + 1875.41(1-r)(1-y)$$

که از معادل قرار دادن این دو رابطه به معادله زیر می‌رسیم:

$$99.96 - 136.04y + 26.21z + 9.82 = 0$$

به طور مشابه برای بی‌تفاوتی بازیگران ۲ و ۳ نیز به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$0.03xz - 36.05x - 336.45z + 35.93 = 0$$

$$0.05xy - 336.17y + 126.12x - 0.22 = 0$$

از حل همزمان این معادلات به مقادیر زیر خواهیم رسید:

$$x = 0.25, y = 0.09\ , z = 0.08$$

درواقع درحالتی که بازیگران حالت ترکیبی را بازی کنند، برای نمونه بازیگر ۱ با احتمال ۲۵ درصد به بازیگر ۲ شلیک کرده و با احتمال ۷۵ درصد بازیگر ۳ را مورد هدف قرار می‌دهد. مجموعه تعادل‌های نش این بازی به شکل زیر می‌باشد.

$$\{(0.25,0.75), (0.09,0.91), (0.08,0.92)\}, \{3,3,1\}, \{3,1,2\}$$

ب) هنگامی که بازی با توالی حرکات بازیگران جریان پیدا می‌کند، از روش استنتاج پس‌رو استفاده می‌کنیم. به این منظور از پایین‌ترین زیربازی ممکن حل مساله را آغاز می‌کنیم. بازیگر ۳ چنانچه تا مرحله آخر زنده باشد، اگر بازیگر سوم قدرت انتخاب داشته‌باشد و دو بازیگر دیگر زنده باشند، در اینصورت بازیگر ۲ را مورد هدف قرار می‌دهد. چرا که بازیگر ۲ پول بیشتری را دارا می‌باشد. درگام بعد چنانچه بازیگر دوم زنده باشد، باعلم به اینکه بازیگر ۳ اگر زنده باشد وی را مورد هدف قرار خواهد داد، به بازیگر ۳ شلیک می‌کند. درگام آخر نیز بازیگر ۱ اگر قدرت انتخابی داشته باشد، بازیگر ۳ را مورد هدف قرار می‌دهد. چرا که بازیگر ۳ پول بیشتری دارد و احتمال شلیک درستش نیز بیشتر است. دقت شود که در این بخش حتما بازیگران باید شلیک کنند. پس تعادل بدست آمده از تعادل کامل زیربازی‌ها برابر $\{3,3,2\}$ می‌باشد.

ج) این قسمت نیز مشابه بخش ب می‌باشد. با این تفاوت که بازیگران گزینه شلیک به هوا نیز دارند. در این حالت بازیگر ۳ در صورت زنده ماندن چون آخرین شلیک را دارد، پس قطعا به هوا شلیک نمی‌کند و مشابه حالت قبلی در حالتی که حق انتخاب داشته باشد، بازیگر ۲ را مورد هدف قرار می‌دهد. بازیگر دوم نیز چون از تصمیم بازیگر ۳ مطلع است، لذا در حالتی که حق انتخاب دارد به ۳ شلیک می‌کند و از شلیک هوایی نیز استفاده نمی‌کند. اما بازیگر اول می‌داند که اگر هرکدام از بازیگران به دست وی کشته شوند، بازیگر دیگر به وی شلیک خواهدکرد. همچنین می‌داند که بازیگر ۲ در صورت زنده ماندن به ۳ و بازیگر ۳ به ۲ شلیک می‌کنند. پس از تیر هوایی استفاده می‌کند. تعادل بدست آمده از تعادل کامل زیربازی‌ها برابر $\{$تیر هوایی, 3,2$\}$ می‌باشد.

فصل ۲، تمرین ۲۵: سپیده عبداللهی

قسمت a) فرض می‌کنیم بازیگران اول و دوم به صورت مستقل از هم بازی می‌کنند.

$$\sigma_1 = \{U: p, \qquad D: 1-p\}$$
$$\sigma_2 = \{L: 1-q, \qquad R: q\}$$

بنابراین مطلوبیت حاصل از هرکدام از حرکت‌های بازیگر سوم برای خودش برابراست با:

$$U(M_1) = 8p(1-q) = 8p - 8pq$$
$$U(M_2) = 4p(1-q) + 4q(1-p) = 4p + 4q - 8pq$$
$$U(M_3) = 8q(1-p) = 8q - 8pq$$
$$U(M_4) = 3$$

حرکت M_2 زمانی می‌تواند بهترین واکنش بازیگر ۳ باشد که بتوان p و q را به‌گونه‌ای پیدا کرد که داشته باشیم:

$$U(M_2) > \max\{U(M_1), U(M_3), U(M_4)\}$$

داریم:

$$\max\{8p - 8pq, 8q - 8pq\} = 8\max\{p, q\} - 8pq = 4 \times 2\max\{p, q\} - 8pq$$

همچنین می‌داینم $p + q \leq 2 \times \max\{p, q\}$ بنابراین داریم:

$$\max\{U(M_1), U(M_3)\} = 4 \times 2\max\{p, q\} - 8pq \geq 4(p + q) - 8pq = U(M_2)$$

بنابراین به‌ازای هیچ باوری نسبت به p و q، حرکت M_2 بهترین واکنش بازیگر ۳ نخواهد بود.

قسمت b) در این قسمت فرض می‌کنیم هرکدام از ۴ خانه جدول با احتمال مشخصی بازی می‌شود.

بازیگر

۲

بازی	p	r
	q	s

$$p + q + r + s = 1$$

مانند قسمت قبل داریم:

$U(M_1) = 8p$

$U(M_2) = 4(p + s)$

$U(M_3) = 8s$

$U(M_4) = 3$

بنابراین برای این که M_2 بهترین واکنش باشد، باید احتمالات را به گونه‌ای مشخص کنیم که:

$$U(M_2) > \max\{U(M_1), U(M_3), U(M_4)\}$$

و داریم:

$$\max\{U(M_1), U(M_3)\} = 8\max\{p, s\} = 4 \times 2\max\{p, s\} \geq 4\,(p + s) = U(M_2)$$

بنابراین هیچ باوری وجود ندارد که در آن حرکت M_2 بهترین واکنش بازیگر سوم باشد.

قسمت c) ابتدا تعادل‌های محض را پیدا می‌کنیم.

«بازیگر ۱» / «بازیگر ۲»

M_1

	L	R
U	۸	۰
D	۰	۰

M_2

	L	R
U	۴	۰
D	۰	۴

M_3

	L	R
U	۰	۰
D	۰	۸

M_4

	L	R
U	۳	۳
D	۳	۳

«بازیگر ۳»

«جدول ۱.۴۳»

بهترین واکنش بازیگر ۱ با خط زرد رنگ، بازیگر ۲ با خط سبز رنگ و بازیگر ۳ با خط قرمز رنگ مشخص شده‌اند.

در نتیجه بازی بالا ۴ تعادل نش محض دارد.

$$EQ_1 = \{U, L, M_1\}$$

$$EQ_2 = \{D, R, M_3\}$$

$$EQ_3 = \{U, R, M_4\}$$

$$EQ_4 = \{D, L, M_4\}$$

حال برای به‌دست آوردن حرکات ترکیبی تمام حالات را بررسی می‌کنیم. قبل از آن از قضیه ۱.۱ و نتایج قبلی می‌دانیم حرکت M_2 به واسطه آن که هیچ‌گاه بهترین واکنش بازیگر ۳ نیست، مغلوب است و پایه حرکت ترکیبی در تعادل نمی‌باشد.

- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_3\}$ ترکیب کند.** برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ اگر بازیگر ۱ با احتمال p حرکت U و بازیگر ۲ با احتمال q حرکت R را بازی کند داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_3) = 8q - 8pq \end{Bmatrix} \Rightarrow p = q$$

حال برای بی‌تفاوت شدن بازیگر دوم داریم (بازیگر ۳ با احتمال r حرکت M_3 را بازی می‌کند)

$$\begin{Bmatrix} U_2(L) = 8p - 8pr \\ U_2(R) = 8r - 8pr \end{Bmatrix} \Rightarrow p = r$$

برای بی‌تفاوت شدن بازیگر اول با تعریف $s = 1 - r$ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_1(U) = 8s - 8qs \\ U_1(D) = 8q - 8qs \end{Bmatrix} \Rightarrow q = s = 1 - r$$

بنابراین:

$$1 - r = r \Rightarrow r = 0.5$$

درنهایت تعادل برابراست با:

$$EQ_5 = \{\{0.5, 0.5\}, \{0.5, 0.5\}, \{0.5, 0, 0.5, 0\}\}$$

- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_4\}$ ترکیب کند.** حرکات ترکیبی را مانند قسمت قبل تعریف می‌کنیم و برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_4) = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow p(1-q) = \frac{3}{8}$$

حال برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۲ داریم(بازیگر ۳ با احتمال r حرکت M_4 را بازی می‌کند)

$$\begin{Bmatrix} U_2(L) = 8p - 8pr + 3r \\ U_2(R) = 3r \end{Bmatrix} \Rightarrow 8p(1-r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

که $p = 0$ با شرط اول در تناقض است و در حالت $r = 1$ به‌ازای هر p و q که شرط $p(1-q) = \frac{3}{8}$ را برقرار کند بی‌نهایت تعادل ترکیبی داریم.

- **بازیگر ۳ بین $\{M_3, M_4\}$ ترکیب کند.** با توجه به تقارن مسئله این حالت مانند قبل است.
- **بازیگر ۳ بین $\{M_1, M_3, M_4\}$ ترکیب کند.** برای بی‌تفاوت شدن بازیگر ۳ داریم:

$$\begin{Bmatrix} U_3(M_1) = 8p - 8pq \\ U_3(M_3) = 8q - 8pq \\ U_3(M_4) = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p = q \\ p(1-q) = \frac{3}{8} \Rightarrow p - p^2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

که معادله بالا ریشه حقیقی ندارد بنابراین هیچ تعادل ترکیبی در این حالت نداریم.

- **بازیگر ۳ ترکیب نکند.** این حالت قبلا بررسی شد. برای این که بازیگر ۱ و ۲ میان حرکاتشان بی‌تفاوت شوند و ترکیب کنند بازیگر ۳ فقط می‌تواند حرکت M_4 را بازی کند. در این حالت به‌ازای هر مقدار p و q که شرط $p(1-q) = \frac{3}{8}$ را برقرار کند بی‌نهایت تعادل ترکیبی داریم.

۳. فصل سوم: پالایش تعادل

فصل ۳، سوال ۱: علی امینی

الف)

نمایش جدولی بازی به‌صورت زیر است:

بازیگر ۲

بازیگر ۱		x_2	y_2
	a_1x_1	(۰, ۴)	(۴, ۰)
	a_1y_1	(۰, ۴)	(۰, ۴)
	b_1x_1	(۵, ۱)	(۰, ۰)
	b_1y_1	(۰, ۰)	(۳, ۴)

سعی می‌کنیم جدول فوق را تا حد ممکن ساده کنیم. راهبردهای a_1x_1 و a_1y_1 معادل‌اند بنابراین یکی از آن‌ها را حذف می‌کنیم. به‌علاوه با کمی دقت متوجه می‌شویم که راهبرد b_1y_1 توسط راهبرد a_1y_1 اکیدا مغلوب است. پس نمی‌تواند تعادل نش باشد. جدول ساده‌شده به‌صورت زیر است:

بازیگر ۲

بازیگر ۱		x_2	y_2
	a_1y_1	(۴, ۰)	(۴, ۰)
	b_1x_1	(۵, ۱)	(۰, ۰)

بهترین واکنش بازیگر ۱ با رنگ سبز و برای بازیگر ۲ با رنگ زرد مشخص شده‌است. بنابراین دو تعادل نش محض وجود دارد.

$$\boxed{Pure\ NE = (a_1y_1,\ y_2)}$$

$$\boxed{Pure\ NE = (b_1x_1,\ x_2)}$$

برای بدست آوردن تعادل‌های نش ترکیبی بازیگر ۱ با احتمال p راهبرد a_1y_1 را بازی می‌کند. بازیگر دوم نیز با احتمال q حرکت x_2 را بازی می‌کند.

$$EU_2(x_2) = 0 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - p$$

$$EU_2(y_2) = 0 \times p + 0 \times (1 - p) = 0$$

بنابراین برای اینکه بازیگر دوم بین حرکاتش بی‌تفاوت شود:

$$p = 1$$

برای بازیگر ۱ نیز همین کار را تکرار می‌کنیم.

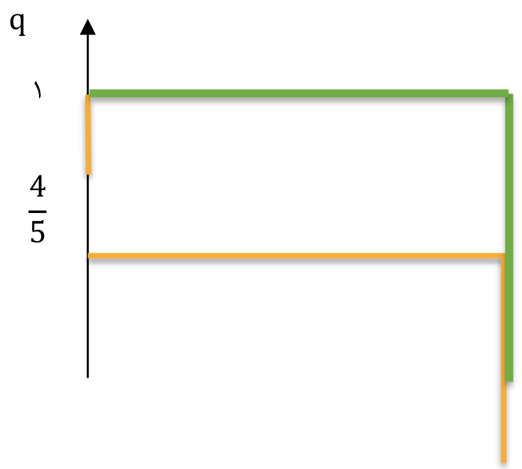
$$EU_1(a_1y_1) = 4 \times q + 4 \times (1 - q) = 4$$

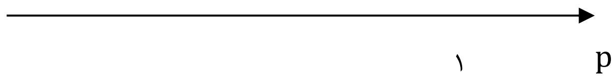
$$EU_1(b_1x_1) = 5 \times q + 0 \times (1 - q) = 5q$$

مشاهده شد که بازیگر اول p را با احتمال ۱ بازی می‌کند پس:

$$4 > 5q \quad \Rightarrow \quad q < \frac{4}{5}$$

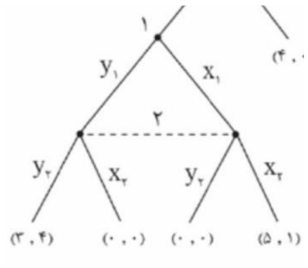
بنابراین بی‌نهایت تعادل نش ترکیبی داریم. در شکل زیر نیز این موضوع به‌خوبی دیده می‌شود.





ب)

دو زیر بازی داریم یکی زیر بازی که در شکل مشخص شده و دیگری کل بازی.



تعادل‌های نش و ترکیبی را در این زیربازی بدست می‌آوریم.

بازیگر ۲

		x_2	y_2
بازیگر ۱	y_1	(۰, ۰)	(۳, ۴)
	x_1	(۵, ۱)	(۰, ۰)

بهترین واکنش بازیگر ۱ با رنگ سبز و برای بازیگر ۲ با رنگ زرد مشخص شده‌است. بنابراین دو تعادل نش محض وجود دارد.

$$\boxed{Pure\ NE = (y_1,\ y_2)}$$

$$\boxed{Pure\ NE = (x_1,\ x_2)}$$

برای بدست آوردن تعادل‌های نش ترکیبی بازیگر ۱ با احتمال p حرکت y_1 را بازی می‌کند. بازیگر دوم نیز با احتمال q حرکت x_2 را بازی می‌کند.

$$EU_2(x_2) = 0 \times p + 1 \times (1 - p) = 1 - p$$

$$EU_2(y_2) = 4 \times p + 0 \times (1-p) = 4p$$

بنابراین برای اینکه بازیگر دوم بین حرکاتش بی‌تفاوت شود:

$$4p = 1 - p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{5}$$

برای بازیگر ۱ نیز همین کار را تکرار می‌کنیم.

$$EU_1(y_1) = 0 \times q + 3 \times (1-q) = 3 \; - \; 3q$$

$$EU_1(x_1) = 5 \times q + 0 \times (1-q) = 5q$$

بنابراین برای اینکه بازیگر اول بین حرکاتش بی‌تفاوت شود:

$$5q = 3 - 3q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{3}{8}$$

بنابراین تعادل نش ترکیبی به‌صورت زیر است.

$$\boxed{Mixed\ NE = \left\{\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)\right\}}$$

مطلوبیت انتظاری بازیگران در این تعادل نش ترکیبی برابر است با:

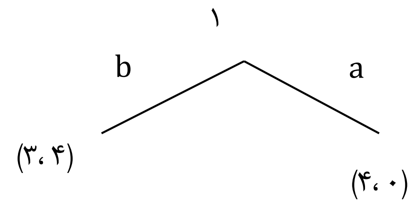
$$EU_1 = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{5} \times 5\right) + \frac{5}{8} \times \left(\frac{1}{5} \times 3 + \frac{4}{5} \times 0\right) = \; \frac{15}{8} \; = 1.875$$

$$EU_2 = \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{5} \times 0 + \frac{4}{5} \times 1\right) + \frac{5}{8} \times \left(\frac{1}{5} \times 4 + \frac{4}{5} \times 0\right) = \; \frac{4}{5} \; = 0.8$$

در مرحله بعد نتایج هر سه تعادل را به جای زیر بازی قرار می‌دهیم و در حالت تعادل کامل زیربازی‌ها را بدست می‌آوریم.

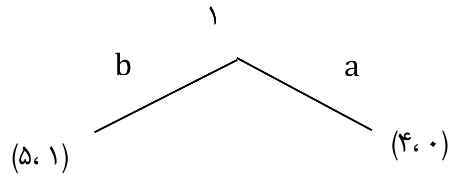
- **تعادل محض $(y_1,\ y_2)$**

در این حالت انتخاب بازیگر ۱ حرکت a خواهد بود و پیامد تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با (۴، ۰)



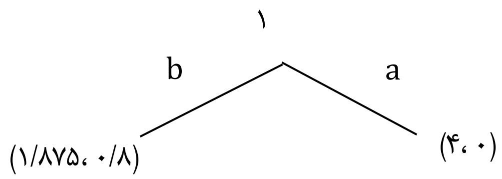
- **تعادل محض** $(x_1,\ x_2)$

در این حالت انتخاب بازیگر ۱ حرکت b خواهد بود و سپس در زیربازی بررسی شده $(x_1,\ x_2)$ بازی می‌شود. پیامد تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با (۵، ۱)



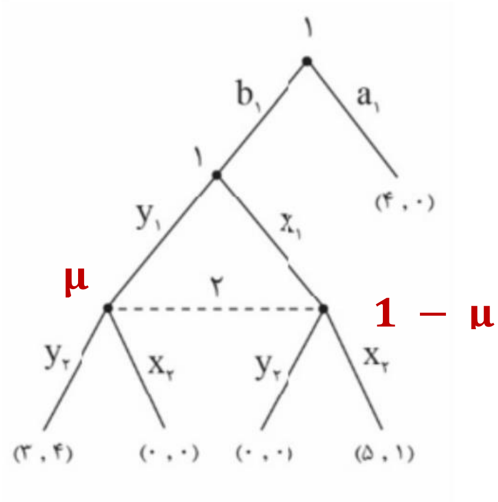
- **تعادل ترکیبی**

در این حالت انتخاب بازیگر ۱ حرکت a خواهد بود و پیامد تعادل کامل زیربازی‌ها برابر است با (۴، ۰)



ج)

با توجه به تعادل‌های بدست آمده در قسمت الف، ارزیابی مربوط به هرکدام را تشکیل داده و تعادل‌های بیزی را بدست می‌آوریم.



- **بررسی تعادل محض $(a_1 y_1,\ y_2)$**

در این حالت داریم:

$$\sigma_1(a_1) = 1$$

$$\sigma_1(y_1) = 1$$

$$\sigma_2(y_2) = 1$$

شرط عقلایی رشته‌ای بودن:

$$EU_2(y_2|\mu) > EU_2(x_2|\mu) \quad \Rightarrow \quad 4\mu > 1-\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu > \frac{1}{5}}$$

بررسی می‌کنیم که آیا این باور با قانون بیز سازگار است یا نه.

$$\mu = \frac{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1)}{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1) + \sigma_1(b_1)\sigma_1(x_1)} = \frac{0}{0}$$

مخرج کسر صفر می‌شود بنابراین هر باور دلخواهی می‌توان استفاده کرد و با قانون بیز تناقضی ندارد.

پس تعادل بیزی داریم و برابر است با:

$$\boxed{PBE:\ \ (\sigma,\mu) = \left\{\sigma_1(a_1) = 1, \sigma_1(y_1) = 1, \sigma_2(y_2) = 1;\ \ \mu > \frac{1}{5}\right\}}$$

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا این تعادل رشته‌ای هست یا خیر.

$$\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma^k{}_1(a_1) = 1-\eta^k, \sigma^k{}_1(y_1) = 1-\tau^k, \sigma^k{}_2(y_2) = 1-\xi^k\}$$

داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$$

باورها را بر اساس قانون بیز می‌سازیم:

$$\mu^k = \frac{\eta^k \times (1-\tau^k)}{\eta^k \times (1-\tau^k) + \eta^k \times \tau^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu^k = 1$$

که با شرط عقلایی رشته‌ای بودن ($\mu > \frac{1}{5}$) سازگار است.

بنابراین تعادل رشته‌ای است.

- **بررسی تعادل محض $(b_1x_1,\ x_2)$**

در این حالت داریم:

$$\sigma_1(a_1) = 0$$

$$\sigma_1(y_1) = 0$$

$$\sigma_2(y_2) = 0$$

شرط عقلایی رشته‌ای بودن:

$$EU_2(y_2|\mu) < EU_2(x_2|\mu) \quad \Rightarrow \quad 4\mu < 1-\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu < \frac{1}{5}}$$

بررسی می‌کنیم که آیا این باور با قانون بیز سازگار است یا نه.

$$\mu = \frac{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1)}{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1) + \sigma_1(b_1)\sigma_1(x_1)} = \frac{0}{0+1} = 0$$

که با باور $\mu < \frac{1}{5}$ سازگار است. پس تعادل بیزی داریم و برابر است با:

$$\boxed{PBE: \quad (\sigma,\mu) = \left\{\sigma_1(a_1) = 0, \sigma_1(y_1) = 0, \sigma_2(y_2) = 0;\ \mu < \frac{1}{5}\right\}}$$

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا این تعادل رشته‌ای هست یا خیر.

$$\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty} = \{\sigma^k{}_1(a_1) = \eta^k, \sigma^k{}_1(y_1) = \tau^k, \sigma^k{}_2(y_2) = \xi^k\}$$

داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^k = \sigma$$

باورها را بر اساس قانون بیز می‌سازیم:

$$\mu^k = \frac{(1-\eta^k)\times\tau^k}{(1-\eta^k)\times\tau^k + (1-\eta^k)\times(1-\tau^k)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu^k = 0$$

که با شرط عقلایی رشته‌ای بودن ($\mu < \frac{1}{5}$) سازگار است.

بنابراین تعادل رشته‌ای است.

راه حل سریع‌تر برای بررسی رشته‌ای بودن تعادل این است که مسیر تعادل از مجموعه اطلاعاتی می‌گذرد بنابراین حتما تعادل رشته‌ای است.

- **بررسی تعادل ترکیبی**

در این حالت داریم:

$$\sigma_1(a_1) = 1$$

$$\sigma_1(y_1) = 1$$

$$\sigma_2(x_2) \in \left(0, \frac{4}{5}\right]$$

شرط عقلایی رشته‌ای بودن:

$$EU_2(y_2|\mu) = EU_2(x_2|\mu) \quad \Rightarrow \quad 4\mu = 1-\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{1}{5}}$$

بررسی می‌کنیم که آیا این باور با قانون بیز سازگار است یا نه.

$$\mu = \frac{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1)}{\sigma_1(b_1)\sigma_1(y_1) + \sigma_1(b_1)\sigma_1(x_1)} = \frac{0}{0}$$

مخرج کسر صفر می‌شود بنابراین هر باور دلخواهی می‌توان استفاده کرد و با قانون بیز تناقضی ندارد.

پس تعادل بیزی داریم و برابر است با:

$$\boxed{PBE:\ \ (\sigma, \mu) = \left\{\sigma_1(a_1) = 1, \sigma_1(\,y_1) \ = \ 1, \sigma_2(x_2) \ \in \left(0, \frac{4}{5}\right];\ \ \mu = \frac{1}{5}\right\}}$$

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا این تعادل رشته‌ای هست یا خیر.

$$\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty} \ = \ \left\{\sigma^k{}_1(a_1) = 1 - \eta^k, \sigma^k{}_1(\,y_1) = 1 - \tau^k, \sigma^k{}_2(x_2) = \left(0, \frac{4}{5}\right] - \xi^k \right\}$$

داریم:

$$\lim_{k \to \infty} \sigma^k \ = \ \sigma$$

باورها را بر اساس قانون بیز می‌سازیم:

$$\mu^k = \frac{\eta^k \times (1 - \tau^k)}{\eta^k \times (1 - \tau^k) + \eta^k \times \tau^k}$$

$$\lim_{k \to \infty} \mu^k \ = \ 1$$

که با شرط عقلایی رشته‌ای بودن ($\mu = \frac{1}{5}$) سازگار نیست.

بنابراین تعادل رشته‌ای نیست.

در مجموع ۳ تعادل بیزی داریم که دوتای آن‌ها تعادل رشته‌ای نیز هستند.

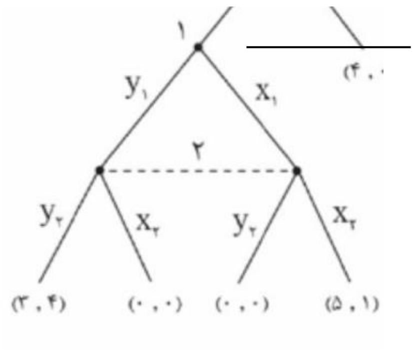
د)

با استفاده از استنتاج پیشرو، بازیگر ۲ که باور دارد که بازیگر ۱ رفتار عقلایی دارد و همچنین می‌داند که او به عقلایی بودن خودش (بازیگر ۲) نیز باور دارد، بنابراین اگر بازیگر ۲ در مرحله اول حرکت b را مشاهده کند. مطابق باورهایش می‌داند که حالا که a را بازی نکرده، پس بازیگر ۱ به قصد مطلوبیت ۵ آمده‌است و حرکت x_1 را در مرحله بعد انجام می‌دهد. در نتیجه او حرکت x_2 را انجام می‌دهد که ۱ واحد مطلوبیت کسب کند به‌جای صفر واحد.

هـ)

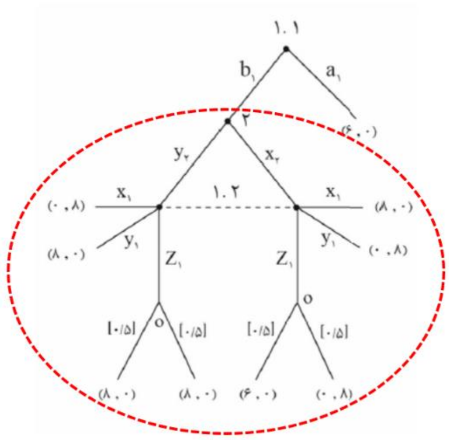
نمودار درختی بازی به‌صورت زیر است. ه ،هش ، حا ، دقیقا مطابق با قسمت‌های الف تا ج است.

a



فصل ۳، سوال ۲: محمدصدرا حیدری

قسمت الف)



در این بازی یک زیربازی کل داریم و یک زیر بازی که از گره بازیگر ۲ شروع می‌شود. می‌دانیم تعادل کامل زیربازی‌ها تعادلی است که در هر زیربازی نیز تعادل باشد.

بنابراین در این بازی کافیست تعادل‌های زیر بازی مشخص شده را حساب کنیم. سپس برای هرکدام از این تعادل‌ها بررسی کنیم که در بازی اصلی نیز تعادل است یا نه. به عبارت دیگر بعد از پیدا شدن تعادل‌های زیربازی، مطلوبیت حاصل از آن تعادل را برای بازیگر اول نسبت به حرکت a_1 مقایسه می‌کنیم و تعادل کامل زیربازی‌ها را پیدا می‌کنیم. مشخص است تمام تعادل‌های زیربازی معادل حداقل ۱ تعادل کامل زیربازی‌های کل بازی است.

در اولین قدم از آنجا که در گره‌های تصمیم‌گیری o طبیعت به صورت مستقل و یکنواخت پیامدها را تصادفی انتخاب می‌کند، می‌توانیم امیدریاضی مطلوبیت حاصل را به عنوان مطلوبیت حرکت Z_1 برای بازیگر ۱ درنظر بگیریم. همچنین این زیربازی نمایش درختی بازی همزمان است. بنابراین می‌توانیم آن نمایش جدولی آن را کشیده و تعادل‌های آن را پیدا کنیم.

بازیگر ۲

	x_2	y_2
x_1	(8, 0)	(0, 8)

y_1	(0 , 8)	(8, 0)
Z_1	(3 , 4)	(8, 0)

همانطور که در نمایش جدولی مشخص است بازی تعادل نش محض ندارد. برای محاسبه تعادل‌های ترکیبی فرض می‌کنیم بازیگر ۲ با احتمال p حرکت x_2 را بازی کند و سپس به‌ازای حالت‌های مختلف ترکیب بازیگر ۱ وجود تعادل را بررسی می‌کنیم.

- **بازیگر ۱ ترکیب نکند:** بازیگر ۲ به‌ازای هیچ حرکت محض بازیگر ۱ ترکیب نمی‌کند و در این حالت تعادل ترکیبی نداریم.
- **بازیگر ۱ میان $\{x_1, y_1\}$ ترکیب کند:** فرض می‌کنیم بازیگر ۱ با احتمال q حرکت x_1 را بازی کند.

$$U_2(x_2) = 8q,\ \ U_2(y_2) = 8(1-q) \Longrightarrow U_2(x_2) = U_2(y_2) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$U_1(x_1) = 8p,\ \ U_1(y_1) = 8(1-p) \Longrightarrow U_1(x_1) = U_1(y_1) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

در این حالت مطلوبیت بازیگر ۱ از حرکت Z_1 برابر می‌شود با:

$$U_1(Z_1) = \frac{3}{2} + \frac{8}{2} = 5.5 > U_1(x_1) = \frac{8}{2} = 4$$

بنابراین بازیگر ۱ انگیزه انحراف دارد و در این حالت تعادل ترکیبی نداریم.

- **بازیگر ۱ میان $\{x_1, Z_1\}$ ترکیب کند:** فرض می‌کنیم بازیگر ۱ با احتمال q حرکت x_1 را بازی کند.

$$U_2(x_2) = 4(1-q),\ \ U_2(y_2) = 8q \Longrightarrow U_2(x_2) = U_2(y_2) \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$U_1(x_1) = 8p,\ \ U_1(Z_1) = 3p + 8(1-p) \Longrightarrow U_1(x_1) = U_1(Z_1) \Rightarrow p = \frac{8}{13}$$

مطلوبیت بازیگر ۱ از حرکت y_1 برابر است با:

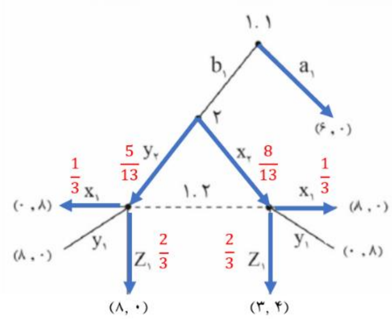
$$U_1(y_1) = \frac{5}{13} \times 8 < U_1(x_1) = \frac{8}{13} \times 8$$

بنابراین این حالت یک تعادل ترکیبی‌است که مطلوبیت حاصل از آن برای بازیگرها برابراست با:

$$E_1: \left\{\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right)\right\}, \qquad U = \left(\frac{64}{13}, \frac{8}{3}\right) \approx (4.9, 2.7)$$

- **بازیگر ۱ میان $\{y_1, Z_1\}$ ترکیب کند:** فرض می‌کنیم بازیگر ۱ با احتمال q حرکت y_1 را بازی کند. در این حالت حرکت y_2 مغلوب می‌شود و بازیگر ۲ ترکیب نمی‌کند. در این حالت بازیگر ۱ نیز میان حرکت‌هایش بی‌تفاوت نشده و در این حالت تعادل ترکیبی نداریم.

- **بازیگر ۱ میان $\{x_1, y_1, Z_1\}$ ترکیب کند:** با توجه به حالت‌های قبلی می‌توان نتیجه گرفت هیچ بازی ترکیبی و محض بازیگر ۲ وجود ندارد که به‌ازای آن بازیگر ۱ میان حرکت‌هایش بی‌تفاوت شود. بنابراین در این حالت نیز تعادل ترکیبی نداریم.
- **بازیگر ۲ ترکیب نکند:** قبل‌تر دیدیم که تعادل محض نداریم. برای بررسی تعادل‌های ترکیبی در این حالت به راحتی می‌توان از روی جدول مشاهده کرد تنها حالتی که بازیگر ۱ میان بیش از ۱ حرکتش بی‌تفاوت می‌شود زمانی‌است که بازیگر ۲ حرکت y_2 را انجام دهد. در این صورت بازیگر ۱ می‌تواند میان حرکت‌های y_1 و Z_1 ترکیب کند. اما دراین حالت مطلوبیت حرکت y_2 برای بازیگر ۲ کمتر از x_2 است و انگیزه انحراف دارد. بنابراین تعادل ترکیبی در این حالت نداریم.



بنابراین زیربازی مورد بررسی فقط ۱ تعادل دارد. در این تعادل مطلوبیت بازیگر ۱ تقریبا برابر با ۵ است که از مطلوبیت حاصل برای او در ازای حرکت a_1 در گره اول تصمیم‌گیری کمتر است. بنابراین بازیگر ۱ در گره تصمیم‌گیری اول حرکت a_1 را بازی کرده و در زیربازی تعادل ترکیبی محاسبه شده را بازی می‌کند. در این حالت کسی انگیزه انحراف ندارد و تعادل کامل زیربازی‌ها است.

قسمت ب)

بازیگر ۱

		a_1x_1	a_1y_1	b_1x_1	b_1y_1	a_1Z_1	b_1Z_1
بازیگر ۲	x_2	(6, 0)	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)	(6, 0)	(3, 4)
	y_2	(6, 0)	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)	(6, 0)	(8, 0)

می‌توانیم راهبردهای معادل a_1x_1, a_1y_1, a_1Z_1 را تقلیل داده و نمایش تقلیل‌یافته بازی را به شرح زیر به‌دست آوریم:

بازیگر ۱

		a_1	b_1x_1	b_1y_1	b_1Z_1
بازیگر ۲	x_2	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)	(3, 4)

y_2	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)	(8, 0)

قسمت ج)

با استفاده از فرم تقلیل یافته جدول بازی، ابتدا تعادل‌های نش را پیدا کرده سپس بررسی می‌کنیم تعادل‌های پیدا شده مناسب هستند یا نه. دقت کنید در جدول نمایش داده‌شده بازیگر اول ستون را انتخاب کرده و بازیگر دوم سطر را انتخاب می‌کند.

بازیگر ۱

بازیگر ۲		a_1	b_1x_1	b_1y_1	b_1Z_1
	x_2	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)	(3, 4)
	y_2	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)	(8, 0)

بهترین واکنش بازیگر ۱ با رنگ سبز و بهترین واکنش بازیگر ۲ با رنگ قرمز مشخص شده‌است. همانطور که از جدول بالا مشخص است، این بازی تعادل نش محض ندارد. حال تعادل‌های ترکیبی را بررسی می‌کنیم.

- **بازیگر ۲ ترکیب نکرده و بازیگر ۱ ترکیب کند.**
  - بازیگر ۲ حرکت x_2 را بازی کند: در این حالت بهترین پاسخ بازیگر ۱ حرکت b_1x_1 بوده و ترکیب نمی‌کند.
  - بازیگر ۲ حرکت y_2 را بازی کند: در این حالت بازیگر ۱ فقط میان حرکات b_1y_1 و b_1Z_1 بی‌تفاوت می‌شود که در هر کدام از آن‌ها مطلوبیت حاصل از بازی x_2 برای بازیگر ۲ بیشتر از حرکت y_2 خواهد بود. بنابراین در این حالت تعادل ترکیبی نداریم.
- **بازیگر ۱ ترکیب نکند:** در این حالت بازیگر ۲ فقط در ازای حرکت a_1 بازیگر ۱ میان حرکاتش بی‌تفاوت شده و می‌تواند ترکیب کند. با فرض این که بازیگر ۲ حرکت x_2 را با احتمال p بازی کند، مطلوبیت حرکات بازیگر ۱ را محاسبه می‌کنیم:

$U_1(a_1, \sigma_2) = 6p + 6(1-p) = 6$

$U_1(b_1x_1, \sigma_2) = 8p$

$U_1(b_1y_1, \sigma_2) = 8 - 8p$

$U_1(b_1Z_1, \sigma_2) = 3p + 8(1-p) = 8 - 5p$

مشخص است حرکت b_1Z_1 به‌ازای هر p بر حرکت b_1y_1 غالب است. بنابراین:

$$6 \geq 8p \Rightarrow p \leq \frac{3}{4}$$

$$6 \geq 8 - 5p \Rightarrow 5p \geq 2 \Rightarrow p \geq \frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow 0.4 \leq p \leq 0.75$$

- **بازیگر ۱ میان $\{a_1, b_1x_1\}$ ترکیب کند:** در این حالت به‌ازای هر احتمال بزرگ‌تر از ۰ برای حرکت b_1x_1 بازیگر اول، مطلوبیت حرکت y_2 برای بازیگر ۲ بیشتر از حرکت x_2 شده و دیگر ترکیب نمی‌کند.
- **بازیگر ۱ میان $\{a_1, b_1Z_1\}$ ترکیب کند:** در این حالت به‌ازای هر احتمال بزرگ‌تر از ۰ برای حرکت b_1Z_1 بازیگر اول، مطلوبیت حرکت x_2 برای بازیگر ۲ بیشتر از حرکت y_2 شده و دیگر ترکیب نمی‌کند.
- **بازیگر ۱ میان $\{b_1x_1, b_1Z_1\}$ ترکیب کند:** در این حالت با فرض این که بازیگر ۱ حرکت b_1x_1 را با احتمال q بازی می‌کند، برای بی‌تفاوتی بازیگر ۱ داریم:

$$U_1(b_1x_1) = U_1(b_1Z_1) \Rightarrow \ 8p = 8 - 5p \Rightarrow p = \frac{8}{13}$$
$$\Rightarrow U_1(b_1x_1) = U_1(b_1Z_1) = \frac{64}{13} < \frac{65}{13} = 5 < U_1(a_1) = 6$$

در این حالت بازیگر ۱ انگیزه انحراف داشته و تعادل نداریم. دقت کنید این حالت در نمایش جدولی تعادل پایدار نیست ولی در نمایش درختی و در صورت لرزش دست بازیگر ۱ در حرکت a_1 تعادل است.

- **بازیگر ۱ میان ۳ حرکت غیرمغلوبش ترکیب کند:** در این حالت برای بی‌تفاوتی بازیگر ۱ می‌بایست:

$$6 = 8p \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$
$$6 = 8p - 5 \Rightarrow p = \frac{2}{5}$$

که امکان‌پذیر نیست و در این حالت نیز تعادل نداریم.

بنابراین تعادل‌های نش بازی بالا زمانی رخ می‌دهد که بازیگر ۱ حرکت a_1 را انتخاب کرده و بازیگر ۲ با احتمالی در بازه $[0.4, 0.75]$ حرکت x_2 را بازی کند.

برای یافتن تعادل‌های مناسب ابتدا مطوبیت حرکات بازیگر ۱ را در به‌ازای بازه حرکات ترکیبی بازیگر ۲ در تعادل حساب می‌کنیم:

$$U_1(a_1) = 6$$
$$U_1(b_1x_1) = 8p, \qquad U_1(b_1y_1) = 8(1-p), \qquad U_1(b_1Z_1) = 8 - 5p$$

می‌دانیم همواره $U_1(b_1Z_1) > U_1(b_1y_1)$ بنابراین:

$$8p > 8 - 5p \Rightarrow p > \frac{8}{13} \approx 0.6$$
$$8p > 8 - 8p \Rightarrow p > \frac{1}{2}$$

برای به‌دست آوردن تعادل‌های مناسب ابتدا به‌ازای حالت‌های مختلف ترتیب مطلوبیت بازیگر ۱ از حرکات غیرتعادلی‌اش را به‌دست آورده و به‌ازای لرزش دست‌های مختلف تلاش می‌کنیم وجود تعادل را بررسی کنیم. فرض می‌کنیم در بازی کاملا ترکیبی بازیگر ۱، احتمال هر کدام از بازی‌های b_1x_1، b_1y_1 و b_1Z_1 به‌ترتیب برابر با ϵ^i، ϵ^j و ϵ^k باشد. بنابراین:

- $p \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

$$U_1(b_1x_1) < U_1(b_1y_1) < U_1(b_1Z_1) \Rightarrow i > j > k$$

در این صورت مطلوبیت بازیگر ۲ از حرکت x_2 بیشتر از حرکت y_2 خواهد بود و انگیزه انحراف دارد.

- $p = \frac{1}{2}$

$$U_1(b_1x_1) = U_1(b_1y_1) < U_1(b_1Z_1) \Rightarrow i = j > k$$

در این حالت نیز مطلوبیت بازیگر ۲ از حرکت x_2 بیشتر از y_2 بوده و انگیزه انحراف دارد.

- $p \in \left(\frac{1}{2}, \frac{8}{13}\right)$

$$U_1(b_1y_1) < U_1(b_1x_1) < U_1(b_1Z_1) \Rightarrow j > i > k$$

در این حالت نیز مطلوبیت حرکت x_2 بیشتر از حرکت y_2 است و انگیزه انحراف دارد.

- $p = \frac{8}{13}$

$$U_1(b_1y_1) < U_1(b_1x_1) = U_1(b_1Z_1)$$

در این حالت

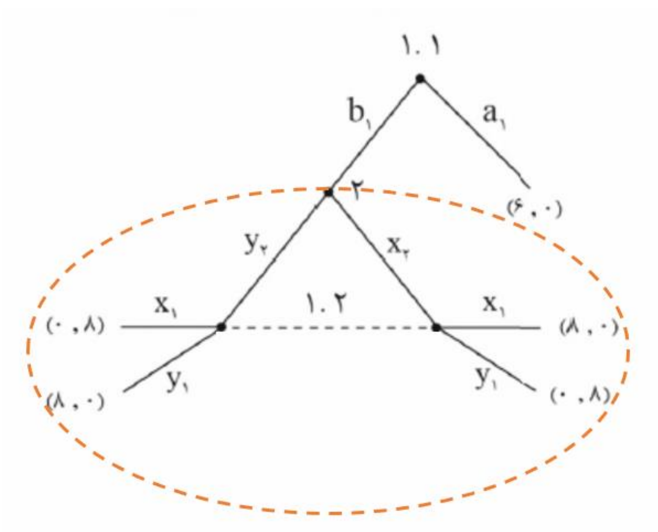
- $p \in \left(\frac{8}{13}, \frac{3}{4}\right)$

$$U_1(b_1y_1) < U_1(b_1Z_1) < U_1(b_1x_1)$$

{نیاز به تکمیل تعادل مناسب}

قسمت د)

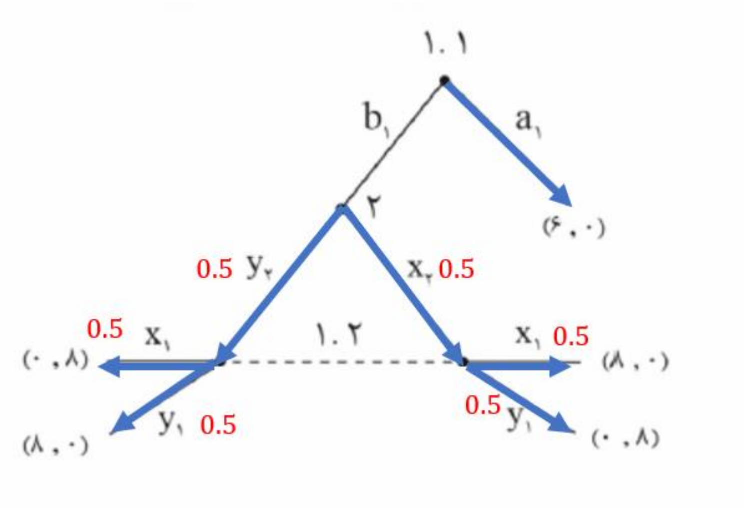
بخش الف: مانند استدلال قبل تعادل‌های زیر بازی مشخص شده را حساب می‌کنیم. زیر بازی مشخص شده در واقع یک بازی هم‌زمان است که نمایش جدولی آن به شرح زیر است.



بازیگر ۲

بازیکن ۱		x_2	y_2
	x_1	(8, 0)	(0, 8)
	y_1	(0, 8)	(8, 0)

بازی بالا متقارن است و تنها یک تعادل نش دارد که در آن هر دو بازیگر با احتمال مساوی یک دوم حرکاتشان را بازی کنند. در این صورت مطلوبیت هر بازیگر در این تعادل برابر با ۴ خواهد بود که از مطلوبیت بازی a_1 برای بازیگر ۱ کمتراست. بنابراین تنها تعادل کامل زیربازی‌های بازی فوق تعادلی‌است که در آن بازیگر ۱ در گره اطلاعاتی اولش حرکت a_1 را بازی‌کرده و در سایر گره‌های اطلاعاتی هرکدام از بازیگران با احتمال برابر حرکاتشان را ترکیب کنند.



بخش ب: نمایش جدولی بازی به شکل زیر خواهد بود.

بازیگر ۱

بازیگر ۲		a_1x_1	a_1y_1	b_1x_1	b_1y_1
	x_2	(6, 0)	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)
	y_2	(6, 0)	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)

حرکات معادل a_1x_1 و a_1y_1 را حذف کرده و نمایش جدولی تقلیل یافته بازی را رسم می‌کنیم.

بازیگر ۱

بازیگر ۲		a_1	b_1x_1	b_1y_1
	x_2	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)
	y_2	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)

بخش ج: ابتدا تعادل‌های نش بازی جدولی تقلیل‌یافته را حساب می‌کنیم.

بازیگر ۱

بازیگر ۲		a_1	b_1x_1	b_1y_1
	x_2	(6, 0)	(8, 0)	(0, 8)
	y_2	(6, 0)	(0, 8)	(8, 0)

- مانند قسمت قبل می‌دانیم **تعادلی که بازیگر ۲ در آن ترکیب نکند نداریم.**
- **بازیگر ۱ حرکت a_1 رابازی کند.** در این صـــورت تا زمانی که مطلوبیت این حرکت برای بازیگر ۱ از ســـایر حرکاتش بیشتر باشد تعادل داریم. به عبارت دیگر:

$$6 \geq 8p \Rightarrow p \leq \frac{3}{4}$$
$$6 \geq 8(1-p) \Rightarrow p \geq \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow 0.25 \leq p \leq 0.75$$

- **در حرکات محض دیگر بازیگر ۱**، بازیگر ۲ بی‌تفاوت نشده و ترکیب نمی‌کند. بنابراین در این حالات نیز تعادل نداریم.
- **بازیگر ۱ میان حرکات $\{b_1x_1, b_1y_1\}$ ترکیب کند.** مانند بخش ب تنها تعادل در ترکیب هر دو بازیگر با احتمال ۰.۵ است که مطلوبیت حاصل از آن کمتر از حرکت a_1 برای بازیگر ۱ است و انگیزه انحراف دارد.

- **بازیگر ۱ میان حرکات a_1 و یکی از حرکات دیگرش ترکیب کند.** در این حالت دیگر بازیگر ۲ بی‌تفاوت نخواهد شد و یکی از از حرکات محضش را بازی می‌کند.
- **بازیگر ۱ میان تمام حرکاتش ترکیب کند.** در این حالت برای بی‌تفاوتی بازیگر ۱ میان حرکاتش داریم:

$$6 = 8p \Rightarrow p = 0.75, \qquad 6 = 8(1-p) \Rightarrow p = 0.25$$

که تناقض است و در این حالت نیز تعادل نداریم.

بنابراین حرکاتی که در آن بازیگر ۱ حرکت a_1 را بازی‌کرده بازیگر ۲ با احتمالی در بازه $[0.25, 0.75]$ حرکت x_2 را بازی کند تعادل‌های بازی خواهند بود.

با توجه به تعریف تعادل مناسب به عنوان تعادلی که در آن امکان لرزش دست وجود دارد، می‌دانیم بازیگر ۱ همواره حرکت a_1 را بازی می‌کند و اگر دستش بلغزد وارد بازی همزمانی با بازیگر ۲ خواهد شد. در این حالت بازیگر ۲ هیچ حرکتی نمی‌کند که اطلاعات اضافه در مورد بازی به بازیگر ۱ بدهد و به عبارت دیگر بازیگر ۲ فقط و فقط با احتمال یک دوم میان حرکاتش ترکیب می‌کند و این تنها تعادل مناسب بازی است. برای توضیحات بیشتر این مطلب را بخوانید.

فصل ۳، تمرین ۳: حسن ابوذر پور

الف)

این بازی هیچ تعادل نش محضی ندارد.

بازیگر ۲

		x_2	y_2	z_2
بازیگر ۱	x_1	(۱,۲)	(۳,۰)	(۰,۳)
	y_1	(۱,۱)	(۲,۲)	(۲,۰)
	z_1	(۱,۲)	(۰,۳)	(۳,۰)

اما این بازی دارای تعادل‌های ترکیبی می‌باشد. برای بدست آوردن تعادل‌های ترکیبی این بازی، ترکیبات ۱، ۲ و ۳ تایی از حرکات بازیگر ۲ را انتخاب کرده و سعی می‌کنیم بازیگر ۱ را بی‌تفاوت کنیم. تعادل‌های ترکیبی این بازی عبارتند از :

بازیگر ۲

			p'	q'	$1-p'-q'$
			x_2	y_2	z_2
بازیگر ۱	p	x_1	(۱,۲)	(۳,۰)	(۰,۳)

q	y_1	(۱,۱)	(۲,۲)	(۲,۰)
$1-p-q$	z_1	(۱,۲)	(۰,۳)	(۳,۰)

۱- حالتی که بازیگر ۲ x_2 را بازی کند و بازیگر ۱ بین ۳ حرکت خود بی‌تفاوت شود. حال برای این‌که بازیگر ۲ انتخاب x_2 را ترجیح دهد، خواهیم داشت:

$$u_2(\sigma_1, x_2) = 2p + q + 2(1-p-q) = 2 - q$$

$$u_2(\sigma_1, y_2) = 2q + 3(1-p-q) = 3 - 3p - q,\ u_2(\sigma_1, z_2) = 3p$$

چنانچه $q \le \frac{2}{3}$, $p \ge \frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه بر اساس روابط بالا تعادل نش ترکیبی زیر را خواهیم داشت:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (\left\{p \ge \frac{1}{3}\ , q \le \frac{2}{3}\right\}, x_2)$$

۲- حالتی که بازیگر ۲ بین $y_2, , z_2$ ترکیب کند. همچنین بازیگر ۱ بین y_1, x_1 بی‌تفاوت شود. در این حالت نیز به تعادل زیر می‌رسیم:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = \left(\left\{p = \frac{2}{5}\ , q = \frac{3}{5}\right\}, \left\{p' = 0\ , q' = \frac{2}{3}\right\}\right)$$

۳- حالتی که بازیگر ۲ بین $y_2, , z_2$ ترکیب کند. همچنین بازیگر ۱ بین y_1, z_1 بی‌تفاوت شود. در این حالت نیز به تعادل زیر می‌رسیم:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (\left\{\ p = 0, q = \frac{1}{2}\right\}, \left\{\ p' = 0, q' = \frac{1}{3}\right\})$$

با نوشتن الباقی حالات به تناقض رسیده و تعادل ترکیبی دیگر وجود ندارد. پس مجموعا این بازی دارای ۳ تعادل ترکیبی است که عبارتند از:

$$\left\{\left(p \ge \frac{1}{3}\ , q \le \frac{2}{3}, 1-p-q\right), (1,0,0)\right\}, \left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\right\}, \left\{\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\right\},$$

ب)

			بازیگر ۲		
			$1-2\zeta^k$	ζ^k	ζ^k
			x_2	y_2	z_2
	0.5	x_1	(۱,۲)	(۳,۰)	(۰,۳)
بازیگر ۱	0	y_1	(۱,۱)	(۲,۲)	(۲,۰)
	0.5	z_1	(۱,۲)	(۰,۳)	(۳,۰)

حال مطلوبیت بازیگر ۱ از انتخاب حرکات مختلف را بررسی کنیم

$$u_1(x_1) = 1 - 2\zeta^k + 3\zeta^k = 1 + \zeta^k$$

$$u_1(y_1) = 1 - 2\zeta^k + 4\zeta^k = 1 + 2\zeta^k$$

$$u_1(z_1) = 1 - 2\zeta^k + 3\zeta^k = 1 + \zeta^k$$

$$\frac{1}{2}u_1(x_1) + \frac{1}{2}u_1(z_1) > u_1(y_1) \longrightarrow 1 + \zeta^k > 1 + 2\zeta^k \longrightarrow \zeta^k < 0$$

وقتی می‌توانیم ادعا کنیم که تعادل کامل است که به ازای $k \to \infty$ برای بازه‌ای بخصوص بازی ما همگرا شود به تعادل $\left\{(\frac{1}{2}.0,\frac{1}{2}), x_2\right\}$. از آنجایی که $\zeta^k < 0$ برقرار است، لذا این تعادل کامل نیست.

ج) در تعادل کامل فرض می شود همه اشتباه می کنند پس حرکت کاملا ترکیبی است

			بازیگر ۲		
			$1-\zeta^k$	$0.7\zeta^k$	$0.3\zeta^k$
			x_2	y_2	z_2
بازیگر ۱	$0.4\epsilon^k$	x_1	(۱,۲)	(۳,۰)	(۰,۳)
	۱-ϵ^k	y_1	(۱,۱)	(۲,۲)	(۲,۰)
	$0.2\epsilon^k$	z_1	(۱,۲)	(۰,۳)	(۳,۰)

برای نمونه تعادل $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0\right),(1{,}0{,}0)\right\}$، حاصل از اولین تعادل ترکیبی بدست آمده از قسمت الف را در نظر بگیرید.

$$u_1(x_1) = 1 - \zeta^k + 2.1\zeta^k = 1 + 1.1\zeta^k$$

$$u_1(y_1) = 1 - \zeta^k + 2\zeta^k = 1 + \zeta^k$$

$$u_1(z_1) = 1 - \zeta^k + 0.9\zeta^k = 1 - 0.1\zeta^k$$

پس در مسیر تعادلی بازیگر ۱ انگیزه انحراف به z_1 وجود ندارد.

$$u_2(x_2) = 0.8\epsilon^k + 1 - \epsilon^k + 0.4\epsilon^k = 1 + 0.2\epsilon^k$$

$$u_2(y_2) = 1 - \epsilon^k + 0.6\epsilon^k = 1 - 0.4\epsilon^k$$

$$u_2(z_2) = 1.2\epsilon^k$$

چنانچه بازیگر ۲ بخواهد z_2 را انتخاب کند باید $\epsilon^k > 1$ باشد که در تناقض است. بعلاوه پیامد انتظاری x_2 از y_2 نیز بیشتر می‌باشد. لذا بازیگر ۲ انگیزه تخطی از حرکت x_2 به هیچ کدام از حرکات دیگر را ندارد. لذا با ایجاد اعوجاج انگیزه تخطی از تعادل وجود ندارد و تعادل کامل می‌باشد. به همین ترتیب تعادل‌های دیگر را نیز می‌توان بررسی کرد.

د)

			بازیگر ۲	
		$1-\zeta^k-\zeta^{2k}$	ζ^k	ζ^{2k}
		x_2	y_2	z_2
بازیگر ۱	$\frac{1}{3}-\epsilon^k$ x_1	(۱,۲)	(۳,۰)	(۰,۳)
	$\frac{2}{3}$ y_1	(۱,۱)	(۲,۲)	(۲,۰)
	ϵ^k z_1	(۱,۲)	(۰,۳)	(۳,۰)

$$u_1(x_1) = 1-\zeta^k-\zeta^{2k}+3\zeta^k = 1+2\zeta^k-\zeta^{2k}$$

$$u_1(y_1) = 1-\zeta^k-\zeta^{2k}+2\zeta^k+\zeta^{2k} = 1+\zeta^k+\zeta^{2k}$$

$$u_1(z_1) = 1-\zeta^k-\zeta^{2k}+3\zeta^{2k} = 1-\zeta^k+2\zeta^{2k}$$

$$u_2(x_2) = \frac{2}{3}-2\epsilon^k+\frac{2}{3}-+2\epsilon^k = \frac{4}{3}$$

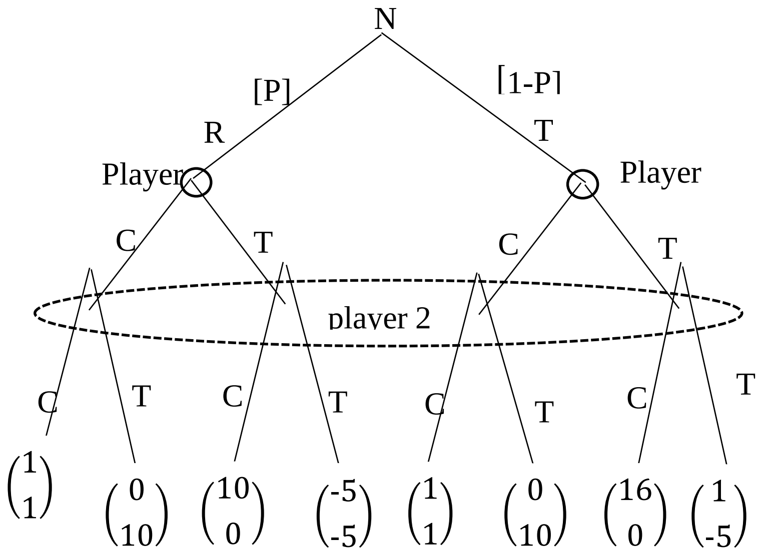
$$u_2(y_2) = \frac{4}{3}+3\epsilon^k$$

$$u_2(z_2) = 1-3\epsilon^k$$

بر اساس تعریف تعادل مناسب: حرکت کاملا ترکیبی است، هرحرکت که مطلوبیت کمتر دارد با احتمال ϵ^k کمتر بازی می شود، در تمام مسیر همگرایی تعادل مناسب ϵ^k برقرار است و در نهایت به تعادل همگرا می شود.

باقی تعادل‌های ترکیبی نیز به همین صورت بررسی می‌شوند.

فصل ۳، تمرین ۴: فاطمه اصغری



الف) برای به دست آوردن راهبردها باید بگوییم هر بازیگر در هر مجموعه اطلاعاتی که برای بازی فراخوانده می شود چه کاری انجام می‌دهد. بازیگر اول در دو مجموعه اطلاعاتی که با دایره مشخص شده اند برای بازی فراخوانده می‌شود، پس راهبردهای او به صورت $\{CC,CT,TC,TT\}$ است. CC یعنی در هر دو مجموعه ی اطلاعاتی که فراخوانده می‌شود او استراتژی C را به کار می‌گیرد. بازیگر ۲ فقط در یک مجموعه اطلاعاتی برای بازی فراخوانده می‌شود که این مجموعه اطلاعاتی با خط‌چین نمایش داده شده است. پس راهبردهای بازیگر ۲ $\{C,T\}$ است.

ب) نمایش جدولی بازی به صورت زیر است.

prob [p]: R Player prob [1-p]: T

Player1

	C	T
C	(1,1)	(0,10)
T	(10,0)	(-5-5)

Player1

	C	T
C	(1,1)	(0,10)
T	(16,0)	(1,-5)

ج) برای یافتن تعادل نش باید بهترین پاسخ هر بازیگر به هر استراتژی طرف مقابل را بیابیم. تقاطع این بهترین پاسخ ها تعادل نش است.

$br_1(C)$ → if R type: T ; if T type: T

$br_1(T)$ → if R type: C ; if T type: T

$br_2(CC) \Rightarrow$ expected utility of playing c: $p\times 1+(1-p)\times 1=1$

$\Rightarrow br_2(cc)=T$

expected utility of playing T: $p\times 10+(1-p)\times 10=10$

$br_2(CT) \Rightarrow$ expected utility of playing C: $p\times 1+(1-p)\times 0=p$

expected utility of playing T: $p\times 10+(1-p)\times -5=-5$

$p>\frac{5}{14}$: T

$p<\frac{5}{14}$: C

$p=\frac{5}{14}$:C/T

$br_2(TC) \Rightarrow$ expected utility of playing C: $p\times 0+(1-p)\times 1=1-p$

expected utility of playing T: $p\times(-5)+(1-p)\times 10=-15p+10$

$P>\frac{9}{14}$: C

$P<\frac{9}{14}$: T

$P=\frac{9}{14}$:C/T

$br_2(TT) \Rightarrow$ expected utility of playing C: $p\times 0+(1-p)\times 0=0$

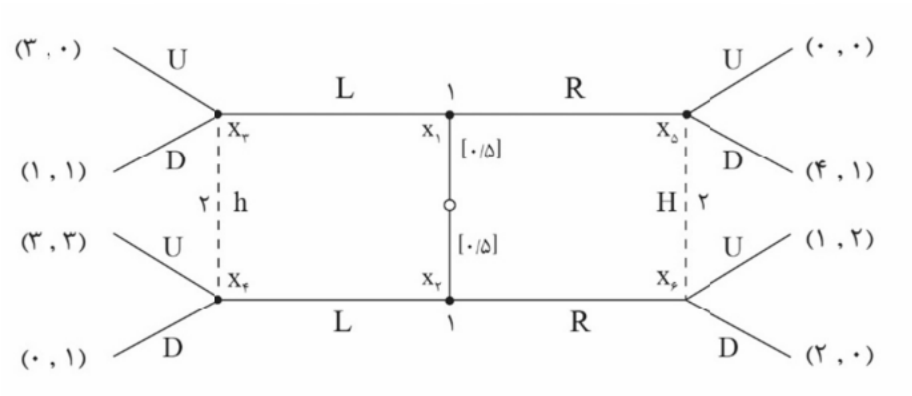
$\Rightarrow br_2(TT)=C$

expected utility of playing T: $p\times -5+(1-p)\times -5=-5$

تقاطع بهترین پاسخ‌ها در (TT, C) به ازای همه مقادیر p اتفاق می‌افتد و به ازای $p \geq \frac{5}{14}$، (CT,T) نیز می‌تواند تعادل نش باشد.

فصل ۳، تمرین ۶: ملیکا عبدی

۵. [G] در نمودار ۳. ۲۰ کلیهٔ تعادل‌های محض بیزی را پیدا کنید.



«نمودار ۳. ۲۰»

می‌دانیم هر تعادل بیزی، یک تعادل نش است. پس با پیدا کردن تعادل‌های نش محض شروع می‌کنیم.

بازیگر دوم (راست استراتژی در مجموعه اطلاعات h و چپ استراتژی در H)

بازیگر اول	UU	UD	DU	DD
LL	(۳,۱.۵)	(۰.۵,۱)	(۳,۱.۵)	(۰.۵,۱)
LR	(۲,۱)	(۱,۱.۵)	(۲.۵,۰)	(۱.۵,۰.۵)
RL	(۱.۵,۱.۵)	(۰,۰.۵)	(۳.۵,۲)	(۲,۱)
RR	(۰.۵,۱)	(۰.۵,۱)	(۳,۰.۵)	(۳,۰.۵)

با توجه به جدول، سه تعادل نش محض داریم:

تعادل اول (LL, UU) :

$$\sigma_1(L|x_1) = \sigma_2(L|x_2) = 1, \sigma_2(U|h) = \sigma_2(U|H) = 1 \rightarrow$$

$$\mu_2(x_3|h) = \frac{\sigma(x_1) \times \sigma_1(L|x1)}{\sigma(x_1) \times \sigma_1(L|x1) + \sigma(x_2) \times \sigma_1(L|x_2)} = \frac{0.5 \times 1}{0.5 \times 1 + 0.5 \times 1} = 0.5,$$

$$u_2(U|H) > u_2(D|H) \rightarrow \mu_2(x_5|H) \times 0 + (1 - \mu_2(x_5|H)) \times 2$$
$$> \mu_2(x_5|H) \times 1 + \left(1 - \mu_2(x_5|H)\right) \times 0 \rightarrow \ \mu_2(x_5|H) < \frac{2}{3}$$

(این یک تعادل هم‌سوی بیزی است)

تعادل دوم (LR, UD) :

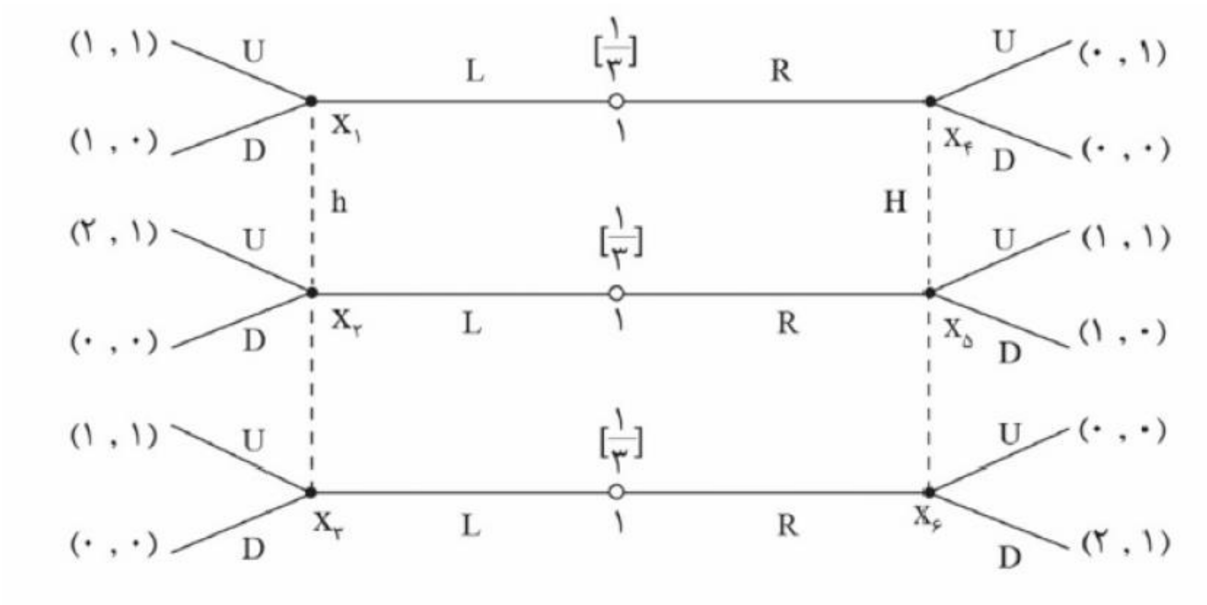
$$\sigma_1(L|x_1) = 1 - \sigma_1(L|x_2) = 1, \quad \sigma_2(U|h) = 1 - \sigma_2(U|H) = 0 \rightarrow \mu_2(x_3|h) = 1, \mu_2(x_5|H) = 0$$

تعادل سوم (RL, DU) :

$$\sigma_1(L|x_1) = 1 - \sigma_1(L|x_2) = 0, \quad \sigma_2(U|h) = 1 - \sigma_2(U|H) = 0 \rightarrow \mu_2(x_3|h) = 0, \mu_2(x_5|H) = 1$$

فصل ۳، تمرین ۶: سعید حجتی نژاد

الف)



ابتدا نمایش جدولی بازی را می‌کشیم. حرکات بازیگر ۲ به شکل زوج مرتب و به ترتیب در مجموعه اطلاعاتی h و مجموعه اطلاعاتی H است:

طبیعت	Prob [1/3]: T1			بازیگر ۲			
				UU	UD	DU	DD
		بازیگر ۱	L	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 0)	(1 , 0)
			R	(0 , 1)	(0 , 0)	(0 , 1)	(0 , 0)
	rob			بازیگر ۲			

				UU	UD	DU	DD
		بازیگر ۱	L	$(\underline{2}, 1)$	$(\underline{2}, 1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
			R	$(1, 1)$	$(1, 0)$	$(\underline{1}, 1)$	$(\underline{1}, 0)$

				بازیگر ۲			
	Prob [1/3]: T3			UU	UD	DU	DD
		بازیگر ۱	L	$(\underline{1}, 1)$	$(1, 1)$	$(\underline{0}, 0)$	$(0, 0)$
			R	$(0, 0)$	$(\underline{2}, 1)$	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{2}, 1)$

برای یافتن تعادل نش باید بهترین پاسخ هر بازیگر به هر استراتژی طرف مقابل را بیابیم. تقاطع این بهترین پاسخ ها تعادل نش است.

برای بازیگر ۱ داریم:

$$BR_1(UU|T_1) = L$$

$$BR_1(UD|T_1) = L$$

$$BR_1(DU|T_1) = L$$

$$BR_1(DD|T_1) = L$$

$$BR_1(UU|T_2) = L$$

$$BR_1(UD|T_2) = L$$

$$BR_1(DU|T_2) = R$$

$$BR_1(DD|T_2) = R$$

$$BR_1(UU|T_3) = L$$

$$BR_1(UD|T_3) = R$$

$$BR_1(DU|T_3) = L/R$$

$$BR_1(DD|T_3) = R$$

همچنین برای بازیگر ۲ داریم:

$$BR_2(LLL) = UU/UD$$

$$BR_2(LLR) = UD$$

$$BR_2(LRL) = UU$$

$$BR_2(LRR) = UU/UD$$

$$BR_2(RLL) = UU$$

$$BR_2(RLR) = UU/UD$$

$$BR_2(RRL) = UU$$

$$BR_2(RRR) = UU/DU$$

تقاطع بهترین پاسخ‌ها تعادل‌های نش هستند.

برای یافتن تعادل‌هایی که بازیگر اول در تمام انواع، حرکت L را انجام دهد، فقط کافی است تعادل بودن حرکت LLL را بررسی کنیم.

$$BR_2(LLL) = UU/UD$$

اگر به جدول دقت کنید مشاهده می‌کنید که به ازای هر ترکیبی از UU و UD بهترین پاسخ بازیگر ۱ در حالت اول L و در حالت دوم نیز L است و تنها در حالت سوم است که بازیگر اول حرکت غالب اکید ندارد. پس جدول را با احتمالات حرکت ترکیبی برای این حالت خاص به شکل زیر می‌نویسیم:

طبیعت				بازیگر ۲			
	Prob [1/3]: T1			UU (p)	UD (1-p)	DU	DD
		بازیگر ۱	L	($\underline{1}$, 1)	($\underline{1}$, 1)	($\underline{1}$, 0)	($\underline{1}$, 0)
			R	(0 , 1)	(0 , 0)	(0 , 1)	(0 , 0)
	Prob [1/3]: T2			UU (p)	UD (1-p)	DU	DD
		بازیگر ۱	L	($\underline{2}$, 1)	($\underline{2}$, 1)	(0 , 0)	(0 , 0)
			R	(1 , 1)	(1 , 0)	($\underline{1}$, 1)	($\underline{1}$, 0)
	Prob [1/3]: T3			UU (p)	UD (1-p)	DU	DD
		بازیگر ۱	L (q)	($\underline{1}$, 1)	(1 , 1)	($\underline{0}$, 0)	(0 , 0)
			R (1-q)	(0 , 0)	($\underline{2}$, 1)	($\underline{0}$, 0)	($\underline{2}$, 1)

مطلوبیت انتظاری را برای دو بازیگر به ازای حرکت‌های ترکیبی می‌نویسیم:

$$U_1(L|T_3) = (1 * p) + \big(1 * (1 - P)\big) = 1$$

$$U_1(R|T_3) = (0 * p) + \big(2 * (1 - P)\big) = 2 - 2p$$

$$U_2(UU) = \left(\frac{1}{3} * 1\right) + \left(\frac{1}{3} * 1\right) + \left(\frac{1}{3} * \Big((1 * q) + \big(0 * (1 - q)\big)\Big)\right) = \frac{2 + q}{3}$$

$$U_2(UD) = \left(\frac{1}{3} * 1\right) + \left(\frac{1}{3} * 1\right) + \left(\frac{1}{3} * \Big((1 * q) + \big(1 * (1 - q)\big)\Big)\right) = 1$$

برای اینکه بازیگر اول در نوع سوم نیز L را بازی کند باید داشته باشیم:

$$U_1(L|T_3) > \ U_1(R|T_3)$$

$$1 > 2 - 2p \quad \rightarrow \quad p > \frac{1}{2}$$

که در این حالت بازیگر اول در نوع سوم نیز حتما L را بازی می‌کند و در نتیجه $q = 1$ خواهد بود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$U_2(UU) = U_2(UD) = 1$$

در نتیجه کلیه تعادل‌های نش مسئله به نحوی که هر نوعی از بازیگر اول حرکت L را بازی کند به شکل زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(L|T_1) = 1, \sigma_1(L|T_2) = 1, \sigma_1(L|T_3) = 1, \sigma_2(U|h) = 1, \sigma_2(U|H) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

برای اینکه حرکت بازیگر دوم در گره اطلاعاتی H رشته‌ای عقلایی باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U_2(T_1, R, U)\mu_2(x_4|H) + U_2(T_2, R, U)\mu_2(x_5|H) + U_2(T_3, R, U)\big(1 - \mu_2(x_4|H) - \mu_2(x_5|H)\big) \\ > U_2(T_1, R, D)\mu_2(x_4|H) + U_2(T_2, R, D)\mu_2(x_5|H) \\ + U_2(T_3, R, D)\big(1 - \mu_2(x_4|H) - \mu_2(x_5|H)\big) \end{aligned}$$

$$\mu_2(x_4|H) = \mu_{24} \, , \mu_2(x_5|H) = \mu_{25}$$

$$\mu_{24} + \mu_{25} > 1 - \mu_{24} - \mu_{25}$$

$$\mu_{24} + \mu_{25} > \frac{1}{2}$$

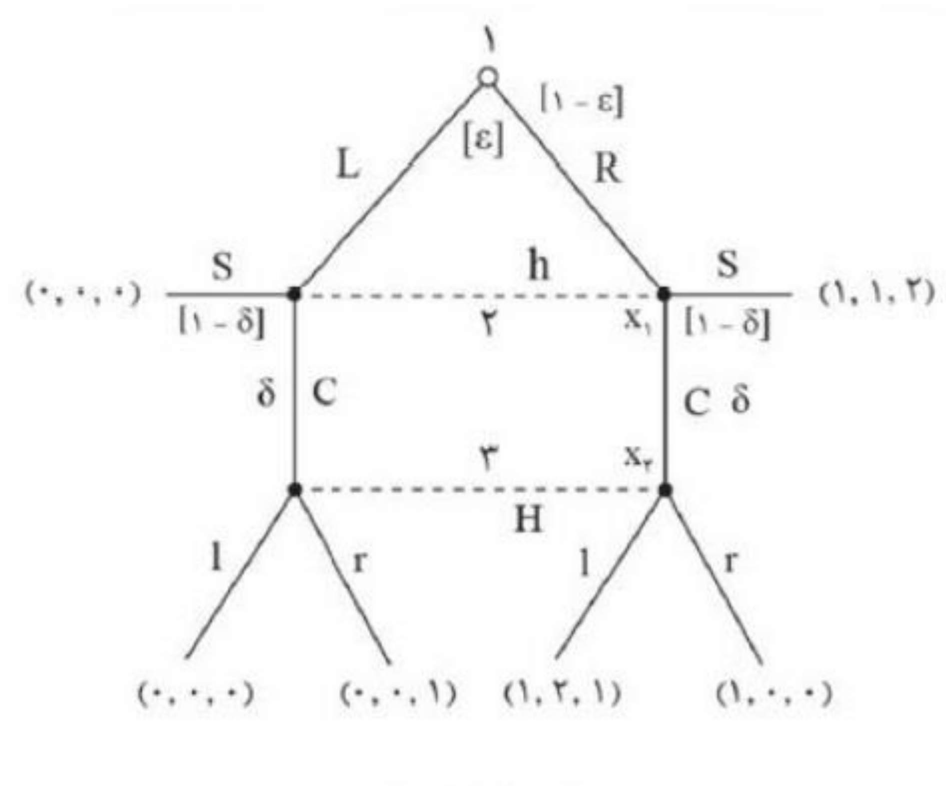
در نتیجه کلیه تعادل‌های بیزی مسئله به نحوی که هر نوعی از بازیگر اول حرکت L را بازی کند به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \sigma_1(L|T_1) = 1, \sigma_1(L|T_2) = 1, \sigma_1(L|T_3) = 1, \sigma_2(U|h) = 1, \mu_2(x_1|h) = \frac{1}{3}, \mu_2(x_2|h) \\ = \frac{1}{3}, \sigma_2(U|H) = 1, \mu_2(x_4|H) + \mu_2(x_5|H) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\sigma_1(L|T_1)=1, \sigma_1(L|T_2)=1, \sigma_1(L|T_3)=1, \sigma_2(U|h)=1, \mu_2(x_1|h)=\frac{1}{3}, \mu_2(x_2|h) = \frac{1}{3}, \sigma_2(U|H)=\left(\frac{1}{2},1\right), \mu_2(x_4|H)+\mu_2(x_5|H)=\frac{1}{2}$$

فصل ۳، تمرین ۷: سعید حجتی نژاد

الف)



«نمودار ۳. ۲۲»

ابتدا نمایش جدولی بازی را می‌کشیم:

بازیگر ۱			
L		R	
بازیگر ۳		بازیگر ۳	
l	r	l	r

بازیگر ۲	S	0, 0, 0	0, 0, 0
	C	0, 0, 0	0, 0, 1

بازیگر ۲	S	1, 1, 2	1, 1, 2
	C	1, 2, 1	1, 0, 0

همانطور که پیداست حرکت L برای بازیگر ۱ اکیدا مغلوب است، بنابراین هرگز آن را بازی نخواهد کرد.

تعادل نش بر اساس جدول فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(L)=0,\sigma_2(C)=1,\sigma_3(l)=1$$

$$S_1=R;S_2=C;\mu_2(x_1|h)=1;S_3=l;\ \mu_3(x_2|H)=1$$

$$\sigma_1'(L)=0,\sigma_2'(C)=0,\sigma_3'(l)\in\left[0\,,\frac{1}{2}\right]$$

برای حرکت l بازیگر ۳ باید باوری داشته باشد که رشته‌ای عقلایی باشد:

$$\begin{aligned}&U_3(R,C,l)\mu_3'(x_2|H)+U_3(L,C,l)\big(1-\mu_3'(x_2|H)\big)\\&\qquad<U_3(R,C,r)\mu_3'(x_2|H)+U_3(L,C,r)\big(1-\mu_3'(x_2|H)\big)\end{aligned}$$

$$\mu_3'<(1-\mu_3')$$

$$\frac{1}{2}>\mu_3'$$

$$S_1=R;S_2=S;\mu_2'(x_1|h)=1;S_3=r;\ \mu_3'(x_2|H)<\frac{1}{2}$$

$$S_1=R;S_2=S;\mu_2''(x_1|h)=1;\ \sigma_3''(l)\in\left(0\,,\frac{1}{2}\right];\ \mu_3''(x_2|H)=\frac{1}{2}$$

در نتیجه سه تعادل بیزی به دست آمد:

$$S_1=R;S_2=C;\mu_2(x_1|h)=1;S_3=l;\ \mu_3(x_2|H)=1$$

$$S_1=R;S_2=S;\mu_2'(x_1|h)=1;S_3=r;\ \mu_3'(x_2|H)<\frac{1}{2}$$

$$S_1=R;S_2=S;\mu_2''(x_1|h)=1;\ \sigma_3''(l)\in\left(0\,,\frac{1}{2}\right];\ \mu_3''(x_2|H)=\frac{1}{2}$$

ب)

برای تعادل اول که به شرح زیر است، از آنجایی که تمام مجموعه‌های اطلاعاتی داخل مسیر تعادل هستند و تعادل به‌دست‌آمده عقلایی رشته‌ای است، پس این تعادل، تعادل رشته‌ای نیز است:

$$S_1=R;S_2=C;\mu_2(x_1|h)=1;S_3=l;\ \mu_3(x_2|H)=1$$

برای تعادل دوم از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی H داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$S_1 = R; S_2 = S; \mu_2'(x_1|h) = 1; S_3 = r;\ \mu_3'(x_2|H) < \frac{1}{2}$$

$$\tau_1^n(L) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(R) = 1 - \epsilon^n;\ \tau_2^n(C) = \delta^n;\ \tau_2^n(S) = 1 - \delta^n;\ \tau_3^n(l) = \zeta^n;\ \tau_3^n(r) = 1 - \zeta^n;$$

رشته حرکات τ^n به σ' همگرا می‌شود.

باور $\mu_3'(x_2|H)$ هرگز توسط τ^n تولید نمی‌شود. تنها باور سازگار $\mu_3'(x_2|H) = 1$ است ولی این باور سازگار با حرکات فوق نیست. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای نیست.

برای تعادل سوم از آنجایی که مجموعه اطلاعاتی H داخل مسیر تعادل نیست، باید تعادل رشته‌ای بودن را بررسی کرد.

$$S_1 = R; S_2 = S; \mu_2''(x_1|h) = 1;\ \sigma_3''(l) \in \left(0\,, \frac{1}{2}\right];\ \mu_3''(x_2|H) = \frac{1}{2}$$

$$\tau_1^n(L) = \epsilon^n;\ \tau_1^n(R) = 1 - \epsilon^n;\ \tau_2^n(C) = \delta^n;\ \tau_2^n(S) = 1 - \delta^n;\ \tau_3^n(l) = \sigma_3''(l) + \zeta^n;\ \tau_3^n(r) = \sigma_3''(r) - \zeta^n;$$

رشته حرکات τ^n به σ'' همگرا می‌شود.

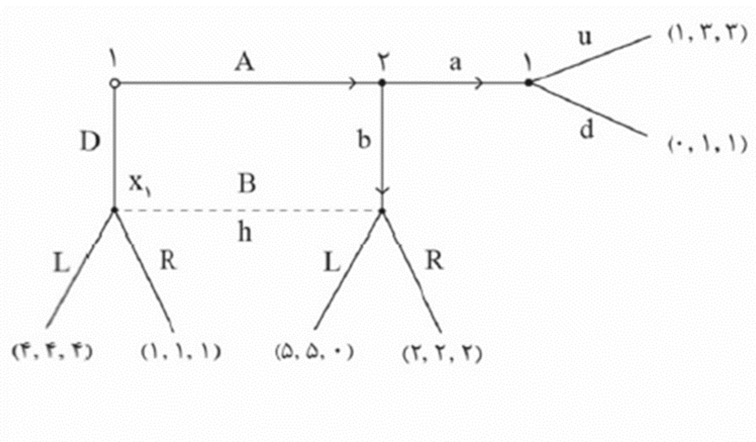
باور $\mu_3''(x_2|H)$ هرگز توسط τ^n تولید نمی‌شود. تنها باور سازگار $\mu_3''(x_2|H) = 1$ است ولی این باور سازگار با حرکات فوق نیست. بنابراین این تعادل، تعادل رشته‌ای نیست.

در نتیجه مجموعه تعادل‌های رشته‌ای به شرح زیر است:

$$S_1 = R; S_2 = C; \mu_2(x_1|h) = 1; S_3 = l;\ \mu_3(x_2|H) = 1$$

فصل ۳، تمرین ۸: سعید حجتی نژاد

الف) ابتدا جدول بازی را رسم می‌کنیم و بهترین پاسخ‌های هر بازیگر را به حرکت‌های دیگر بازیگران پیدا می‌کنیم:



«نمودار ۳. ۲۳»

بازیگر ۳					
		L		R	
		بازیگر ۲		بازیگر ۲	
		a	b	a	b
بازیگر ۱	Au	1, 3, 3	5, 5, 0	1, 3, 3	2, 2, 2
	Ad	0, 1, 1	5, 5, 0	0, 1, 1	2, 2, 2
	Du	4, 4, 4	4, 4, 4	1, 1, 1	1, 1, 1
	Dd	4, 4, 4	4, 4, 4	1, 1, 1	1, 1, 1

در نتیجه مطابق جدول بالا، مجموعه تعادل‌های نش محض به شرح زیر خواهد بود:

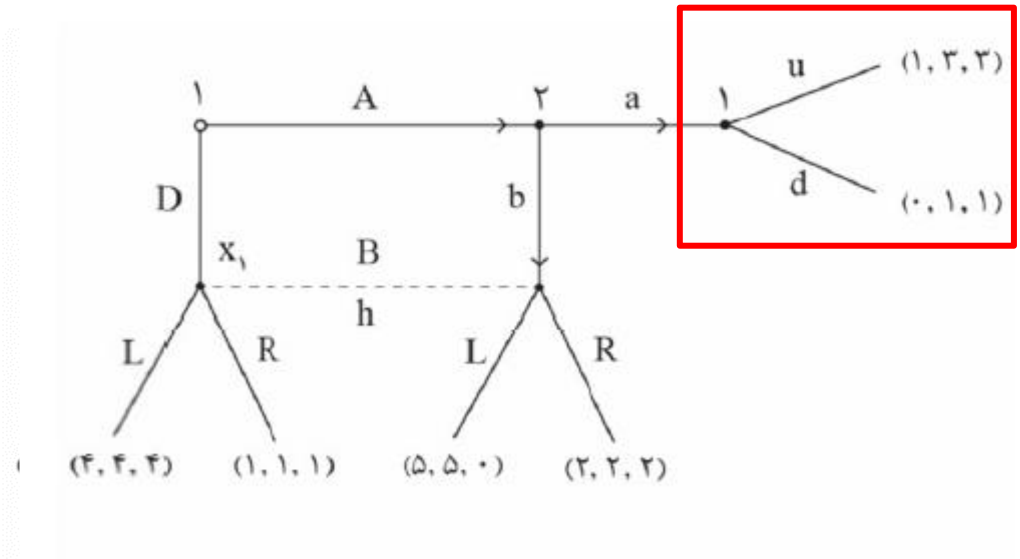
$$\sigma_1 = Du, \sigma_2 = a, \sigma_3 = L$$

$$\sigma_1 = Dd, \sigma_2 = a, \sigma_3 = L$$

$$\sigma_1 = Au, \sigma_2 = a, \sigma_3 = R$$

$$\sigma_1 = Ad, \sigma_2 = b, \sigma_3 = R$$

ب) برای اینکه تعادلی عضو مجموعه تعادل‌های محض کامل زیربازی‌ها هم باشد، باید علاوه بر این که در درخت کامل بازی تعادل است، در زیربازی‌های مناسب نیز تعادل باشد. از آنجایی که تنها یک زیربازی مناسب غیر از درخت کامل در بازی وجود دارد و آن زیربازی به شکل نشان داده شده در زیر است، بنابراین تعادل‌هایی که در این زیربازی تعادل نباشند، عضو مجموعه تعادل‌های محض کامل زیربازی‌ها نخواهند بود:



«نمودار ۳. ۲۳»

با توجه به اینکه در این زیربازی بازیگر ۱ همواره حرکت u را انجام خواهد داد، تعادل‌های نشی که در آن بازیگر ۱ حرکت d را انجام دهد عضو مجموعه تعادل‌های محض کامل زیربازی‌ها نخواهند بود. بنابراین، مجموعه تعادل‌های محض کامل زیربازی‌ها به شرح زیر است:

$$\sigma_1 = Du, \sigma_2 = a, \sigma_3 = L$$

$$\sigma_1' = Au, \sigma_2' = a, \sigma_3' = R$$

ج) برای یافتن مجموعه تعادل‌های محض بیزی، رشته‌ای عقلایی بودن تعادل‌های کامل زیربازی‌ها را بررسی می‌کنیم و باورهای سازگار را می‌یابیم:

$$\sigma_1 = Du, \sigma_2 = a, \sigma_3 = L$$

در تعادل اول، بازیگر دوم حرکت b را که به L منتهی می‌شود (مطلوبیت ۵) اکیدا به حرکت a که به u منتهی می‌شود (مطلوبیت ۳) ترجیح می‌دهد. لذا با هیچ احتمال مثبتی حرکت a را نباید در عقلایی رشته‌ای بازی کند. لذا این تعادل عقلایی رشته‌ای نیست و بنابراین تعادل بیزی نیست.

$$\sigma_1' = Au, \sigma_2' = a, \sigma_3' = R$$

برای اینکه حرکت بازیگر سوم در گره اطلاعاتی h رشته‌ای عقلایی باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U_3(D,-,R)\mu_3'(x_1|h) + U_3(A,b,R)\big(1-\mu_3'(x_1|h)\big) \\ > U_3(D,-,L)\mu_3'(x_1|h) + U_3(A,b,L)\big(1-\mu_3'(x_1|h)\big) \end{aligned}$$

$$\mu_3'(x_1|h) = \mu_3$$

$$\mu_3 + 2(1-\mu_3) > 4\mu_3$$

$$\rightarrow \quad 2 > 5\mu_3$$

$$\mu_3 < 0.4$$

$$\sigma_1' = Au, \sigma_2' = a, \sigma_3' = R, \mu_3'(x_1|h) = [0,0.4)$$

در نتیجه مجموعه تعادل‌های بیزی بازی به شرح زیر خواهد بود:

$$\sigma_1' = Au, \sigma_2' = a, \sigma_3' = R, \mu_3'(x_1|h) = [0,0.4)$$

د) برای اینکه بازیگران بخواهند حرکت ترکیبی انجام دهند باید بین حرکات خود بی‌تفاوت باشند. بنابراین برای اینکه بازیگر ۳ بین حرکات خود بی‌تفاوت باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U_3(D,-,R)\mu_3'(x_1|h) + U_3(A,b,R)\big(1-\mu_3'(x_1|h)\big) \\ = U_3(D,-,L)\mu_3'(x_1|h) + U_3(A,b,L)\big(1-\mu_3'(x_1|h)\big) \end{aligned}$$

$$\mu_3' = 0.4$$

از طرفی چون بازیگر ۱ در گره سمت راست همواره u را بازی می‌کند، بنابراین برای اینکه بازیگر ۲ بی‌تفاوت باشد باید داشته باشیم:

$$U_2(A,a,u) = U_2(A,b,L)\sigma_3(L) + U_3(A,b,R)\big(1-\sigma_3(L)\big)$$

$$\rightarrow \quad 3 = 5\sigma_3(L) + 2\big(1 - \sigma_3(L)\big)$$

$$\sigma_3(L) = \frac{1}{3}$$

همچنین برای اینکه بازیگر ۱ بین حرکت‌های A و D بی‌تفاوت باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U_1(D,-,L)\sigma_3(L) + U_1(D,-,R)\big(1-\sigma_3(L)\big) \\ = U_1(A,a,u)\sigma_2(a) + U_1(A,b,L)\big(1-\sigma_2(a)\big)\sigma_3(L) \\ + U_1(A,b,R)\big(1-\sigma_2(a)\big)\big(1-\sigma_3(L)\big) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \sigma_2(a) + \frac{5}{3}\big(1-\sigma_2(a)\big) + \frac{4}{3}\big(1-\sigma_2(a)\big)$$

$$2 = \sigma_2(a) + 3\big(1-\sigma_2(a)\big)$$

$$\sigma_2(a) = 0.5$$

از طرفی طبق قانون بیز می‌دانیم:

$$\mu_3 = \frac{\sigma_1(D)}{\sigma_1(D) + \Big(\big(1-\sigma_1(D)\big) \times \big(1-\sigma_2(a)\big)\Big)}$$

$$0.4 = \frac{\sigma_1(D)}{\sigma_1(D) + \Big(\big(1-\sigma_1(D)\big) \times 0.5\Big)}$$

$$5 = 1 + \frac{1}{\sigma_1(D)}$$

$$\sigma_1(D) = \frac{1}{4}$$

بنابراین این تعادل بیزی به شرح زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(D) = \frac{1}{4}, \sigma_1(u) = 1, \sigma_2(a) = 0.5, \sigma_3(L) = \frac{1}{3}, \mu_3(x_1|h) = 0.4$$

فصل ۳، تمرین ۹: حسن ابوذرپور

الف)

حاج حسین (۲)

		جوجه (q)	چلوکباب
مشهدی حسن (۱)	جوجه (p)	(۱.۵,۱.۵)	(۳,۲)
	چلوکباب	(۲,۳)	(۲.۲)

همانطور که در جدول مشخص است این بازی ۲ تعادل نش محض یعنی {(جوجه و کباب) و (کباب و جوجه) : (۲ و ۱)} دارد.

در ضمن یک تعدل نش ترکیبی نیز دارد:

U_2 (جوجه) = ۱.۵p + ۳$(1-p)$

U_2 (چلوکباب) = ۲

$\longrightarrow$ U_2 (جوجه) = U_2 (کباب) $\Rightarrow p = \frac{2}{3}$

U_1 (جوجه) = ۱.۵ q + ۳$(1-q)$

U_1 (چلوکباب) = ۲

$\longrightarrow$ U_1 (جوجه) = U_1 (کباب) $\Rightarrow q = \frac{2}{3}$

تعادل نش ترکیبی: σ = { σ_1(جوجه) = $\frac{2}{3}$ و σ_2 (جوجه) = $\frac{2}{3}$ }

ب)

استراتژی‌های حاجی = {کباب، جوجه}

استراتژی‌های مشهدی = {(حاجی کباب سفارش دهد) و (حاجی جوجه سفارش بدهد)}

= {(جوجه و جوجه) ، (کباب و جوجه) ، (جوجه و کباب) ، (کباب و کباب)}

حاجی ۲ استراتژی دارد و مشهدی ۴ استراتژی.

نمایش جدولی:

حاجی

		جوجه	کباب
مشهدی	(جوجه و جوجه)	(۱.۵,۱.۵)	(۲,۳)
	(کباب و جوجه)	(۱.۵,۱.۵)	(۲,۳)
	(جوجه و کباب)	(۳,۲)	(۲,۲)

(کباب و کباب)	(۳,۲)	(۲,۲)

توجه: در نمایش جدولی مولفه راست هر زوج مرتب، مطلوبیت مربوط به مشهدی است.

لذا کلیه تعادل‌های نش محض این بازی:

{((کباب و جوجه) و کباب) ، ((جوجه و جوجه) و کباب) ، ((کباب و کباب) و جوجه ، ((جوجه و کباب) و جوجه}

از آنجایی که این بازی تنها زیر بازی (کل بازی) دارد لذا تمامی تعادل‌های نش محض، تعادل محض کامل زیر بازی نیز می‌باشند.

ج) راهبردهای ۲ بازیگر:

حاجی = $\{(x_1 , x_2)$: (جوجه و جوجه) ، (کباب و جوجه) ، (جوجه و کباب) و (کباب و کباب)}

{(کباب و کباب) ، (جوجه و کباب) ، (کباب و جوجه) ، (جوجه و جوجه) : (حاجی کباب سفارش دهد و حاجی جوجه سفارش دهد)} = استراتژی‌های مشهدی

نمایش جدولی:

مشهدی

	(جوجه و جوجه)	(کباب و جوجه)	(جوجه و کباب)	(کباب و کباب)
حاجی (جوجه و جوجه)	(۱.۵,۱.۵)	(۱.۵,۱.۵)	(۳,۲)	(۳,۲)
حاجی (کباب و جوجه)	(۲.۵,۱.۵)	(۲.۵,۱)	(۲.۵,۲.۵)	(۲.۵,۲)
حاجی (جوجه و کباب)	(۱,۳)	(۱,۲.۵)	(۲.۵,۲.۵)	(۲.۵,۲)
حاجی (کباب و کباب)	(۲,۳)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۲)

لذا تعادل‌های نش محض:

{((کباب و کباب) و (جوجه و جوجه) و ((جوجه و کباب) و (جوجه و جوجه)) : (مشهدی و حاجی)}

بررسی تعادل بیزی بودن ۲ تعادل نش محض:

۱- ((جوجه و کباب) و (جوجه و جوجه)) = (مشهدی و حاجی)

بررسی عقلایی رشته‌ای بودن:

x_1 حاجی در:

U (جوجه) = ۳ ≥ U (کباب) = ۲

x_2 حاجی در:

U (جوجه) = ۳ ≥ U (کباب) = ۲

h مشهدی در : ۲μ (x۴| h) + ۲ (۱-μ) ≥ ۳μ → μ ∈ [۰ , $\frac{2}{3}$]

H مشهدی در : ۳μ (x۵| H) + ۳ (۱−μ) ≥ ۲μ + ۲ (۱−μ) ⟶ ۳≥۲ ⟶ μ ∈ [۰,۱]

بررسی قانون بیز:

$\mu(x_4|\,h) = \frac{0.5 \times 1}{0.5 \times 1 + 0.5 \times 1} = \frac{1}{2}$

مجموعه H در مسیر راهبرد نیست لذا هر باوری به x۵ به قانون بیز سازگار است.

این تعادل تعادل بیزی است.

۲- ((کباب و کباب) و (جوجه و جوجه)) = (مشهدی و حاجی)

بررسی عقلایی رشته‌ای بودن:

x_1 حاجی در:

U (جوجه) = ۳ ≥ U (کباب) = ۲

x_2 حاجی در:

U (جوجه) = ۳ ≥ U (کباب) = ۲

h مشهدی در : ۲μ (x_4| h) + ۲ (۱−μ) ≥ ۳μ ⟶ μ ∈ [۰ , $\frac{2}{3}$]

H مشهدی در : ۲μ (x_5| H) + ۲ (۱−μ) ≥ ۳μ + ۳ (۱−μ) ⟶ ۲≥۳ ⟶ چنین μای وجود ندارد

این تعادل تعادل بیزی نیست.

بررسی تعادل بیزی ترکیبی:

مطلوبیت حرکات افراد در مجموعه اطلاعات h و H و گره‌های x_1و x_2

$$\begin{cases} u_1\left(\text{جوجه}\,\middle|\,x_1\right) = \frac{1}{2} \\ u_1\left(\text{کباب}\,\middle|\,x_1\right) = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{p\,=\,1}$$ حاجی در x_1همواره جوجه را انتخاب می‌کند.

$$\begin{cases} u_1\,(\text{جوجه} \mid x_2) = \frac{3}{2}(1-r) \\ u_1\left(\text{کباب}\,\middle|\,x_2\right) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2\,(\text{جوجه} \mid h) = \frac{3}{2}q \\ u_2\,(\text{کباب} \mid h) = p+q \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2\,(\text{جوجه} \mid H) = \frac{3(1-p)}{2} + \frac{3(1-q)}{2} \\ u_2\,(\text{کباب} \mid H) = (1-p)+(1-q) \end{cases}$$

مشهدی می‌تواند در h طوری در h بازی کند که حاجی را در x_2 بی تفاوت کند

حاجی در x_2 کباب سفارش می‌دهد $\quad r > \frac{1}{3}$

حاجی در x_2 جوجه سفارش می‌دهد $\quad r < \frac{1}{3}$

$\frac{3}{2}(1-r)=۱ \rightarrow 1-r=\frac{2}{3} \rightarrow r=\frac{1}{3}$

$if\ : r > \frac{1}{3}$

$p = 1$ ، حاجی در x_2 کباب سفارش می‌دهد $q = 0$ پس در نتیجه مشهدی در H جوجه سفارش می‌دهد $s = 1$. در این حالت مشهدی در h هم کباب سفارش می‌دهد. $r = 1$

لذا حاجی در x_2 عقلایی رفتار نکرده است (۲ را به ۳ ترجیح داده) پس این حالت هیچ تعادلی ندارد.

$if\ : r = \frac{1}{3}$

$p = 1$ ، حاجی در x_2 ترکیبی انتخاب می‌کند $q \in [۰, ۱]$

مشهدی در h کباب سفارش می‌دهد. $r = 1$

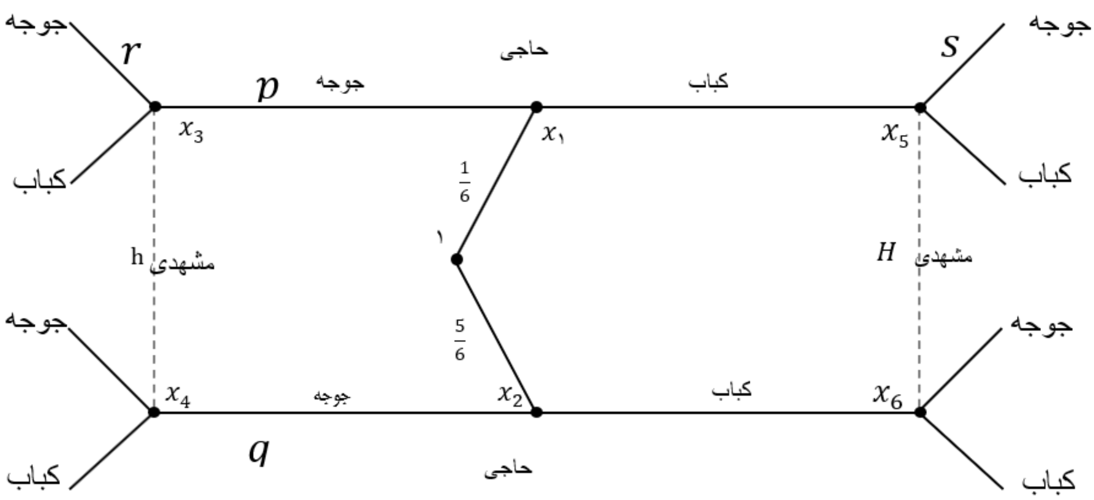
$if\ : r < \frac{1}{3}$

$p = 1$, حاجی در x_2 جوجه سفارش می‌دهد $(q = 1)$ ← مشهدی در h جوجه سفارش می‌دهد $r = 0$

مشهدی در H: $(۱-\mu)$ ۲ + μ۲ ≥ $(۱-\mu)$ ۳ + $(x_5 | H)$ μ۳

همواره جوجه سفارش می‌دهد$(s = 1)$ $[۰,۱] \in (x_5 | H)$ μ که این همان تعادل نش است.

د)



زنمایش جدولی

مشهدی

حاجی	(کباب و کباب)	(جوجه و کباب)	(کباب و جوجه)	(جوجه و جوجه)
(جوجه و جوجه)	(۳,۲)	(۳,۲)	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
(کباب و جوجه)	$(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}$, ۲)	$(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}, \frac{5}{2}+\frac{1}{3})$	$(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$	$(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
(جوجه و کباب)	$(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}$,,۲)	$(\frac{1}{3}+\frac{5}{2}, \frac{1}{2}+\frac{5}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{5}{2})$	$(\frac{1}{3}$,۳)
(کباب و کباب)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۲)	(۲,۳)

همانطور که از نتایج جدول مشخص است، تعادل نش محض وجود ندارد.

همواره جوجه سفارش می‌دهد x_1 حاجی در $\xrightarrow{p\ =\ 1}$ $\begin{cases} \mathrm{u}_1\left(\text{جوجه}\,\middle|\,x_1\right) = \frac{1}{2} \\ \mathrm{u}_1\left(\text{کباب}\,\middle|\,x_1\right) = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathrm{u}_1\ (\text{جوجه} \mid x_2) = \frac{5}{2}(1-r) \\ \mathrm{u}_1\ \left(\text{کباب}\,\middle|\,x_2\right) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{u}_2\ (\text{جوجه} \mid h) = \frac{5}{2}q \\ \mathrm{u}_2\ (\text{کباب} \mid h) = \frac{p}{3}+\frac{5q}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{u}_2\ (\text{جوجه} \mid H) = \frac{1-p}{2}+\frac{5(1-q)}{2} \\ \mathrm{u}_2\ (\text{کباب} \mid H) = \frac{1-p}{3}+\frac{5(1-q)}{3} \end{cases}$$

مشهدی می‌تواند طوری در h بازی کند که حاجی را در x_2 بی تفاوت کند

حاجی کباب سفارش می‌دهد $r > \frac{1}{5}$

حاجی جوجه سفارش می‌دهد $r < \frac{1}{5}$

$\frac{5}{2}(1-r)$ = ۲ $\rightarrow 1-r = \frac{4}{5} \rightarrow r = \frac{1}{5}$

$if\ : r > \frac{1}{5}$

$p = 1$, حاجی درx_2کباب سفارش می‌دهد $q = 0$ پس در نتیجه مشهدی در h کباب سفارش می‌دهد

این حالت هیچ تعادلی ندارد : $r = 0$

$if\ : r = \frac{1}{5}$

$p = 1$, حاجی در x_2 بی تفاوت است q ∈ [۰, ۱]

مشهدی در H جوجه سفارش می‌دهد. $s = 1$ و مشهدی در h بی تفاوت است

تعادل نش ترکیبی

$\frac{5}{2}\mathrm{q} = \frac{1}{3}+\frac{5}{3}q \rightarrow \frac{15q-10q}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{5}{6}\mathrm{q} = \frac{1}{3} \rightarrow \mathrm{q} = \frac{2}{5}$

بررسی عقلایی رشته‌ای بودن:

x_1: ۳>۲

x_2 : ۳ $\times\frac{4}{5}$ ≠ ۲   not optimal

این تعادل نش ترکیبی، تعادل بیزی نیست.

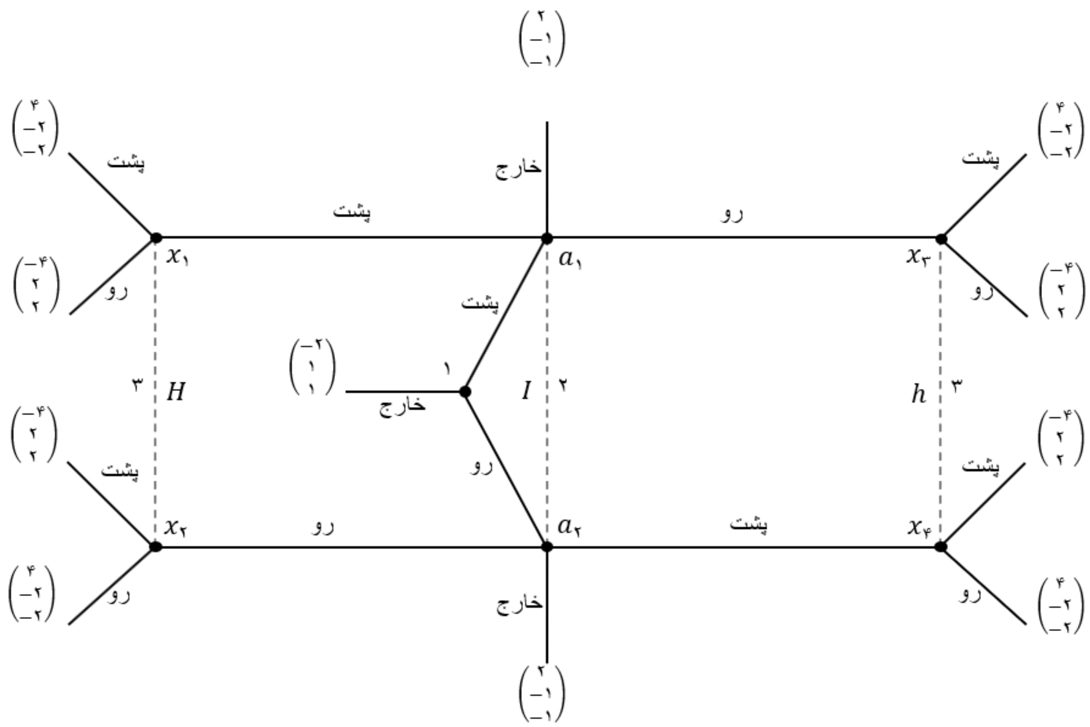
$if\ : r < \frac{1}{5}$

$p = 1$, حاجی در x_2 جوجه سفارش می‌دهد ($q = 1$) ← مشهدی در h جوجه سفارش می‌دهد $r = 1$

این حالت نیز هیچ تعادلی ندارد.

فصل ۳، تمرین ۱۰: مهرداد پورقاسم

الف) شکل درختی:



ب) مجموعه‌ی انتخاب‌های ممکن بازیگر ۱: **پشت، رو، خارج**

مجموعه‌ی انتخاب‌های ممکن بازیگر ۲: **پشت، رو، خارج**

مجموعه‌ی انتخاب‌های ممکن بازیگر ۳:

پشت، پشت (پشت اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان باشد، پشت اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان نباشد)

پشت، رو (پشت اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان باشد، رو اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان نباشد)

رو، رو (رو اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان باشد، رو اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان نباشد)

رو، پشت (رو اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان باشد، پشت اگر حرکات دو بازیگر دیگر یکسان نباشد)

بازیگر ۲

بازیگر ۱	رو	پشت	خارج
خارج	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲
پشت	−۲، −۲، ۴	−۲، −۲، ۴	−۱، −۱، ۲
رو	۲، ۲، −۴	۲، ۲، −۴	−۱، −۱، ۲

پشت، پشت

بازیگر ۲

بازیگر ۱	رو	پشت	خارج
خارج	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲
پشت	۲، ۲، −۴	−۲، −۲، ۴	−۱، −۱، ۲
رو	۲، ۲، −۴	−۲، −۲، ۴	−۱، −۱، ۲

پشت، رو

بازیگر ۳

بازیگر ۲

بازیگر ۱	رو	پشت	خارج
خارج	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲
پشت	۲، ۲، −۴	۲، ۲، −۴	−۱، −۱، ۲
رو	−۲، −۲، ۴	−۲، −۲، ۴	−۱، −۱، ۲

رو، رو

بازیگر ۲

بازیگر ۱	رو	پشت	خارج
خارج	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲	۱، ۱، −۲
پشت	−۲، −۲، ۴	۲، ۲، −۴	−۱، −۱، ۲
رو	−۲، −۲، ۴	۲، ۲، −۴	−۱، −۱، ۲

رو، پشت

بازیگر ۳

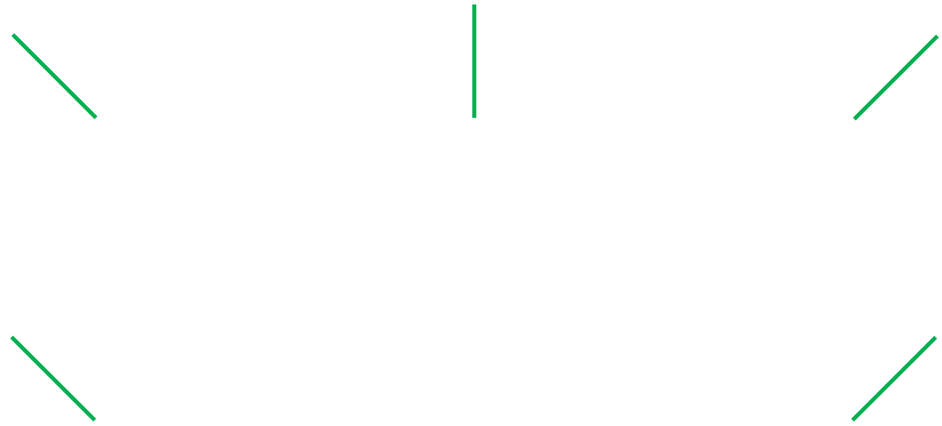
تعادل‌های نش محض:

{پشت، خارج، (پشت، پشت)}، {خارج، رو، (پشت، رو)}، {رو، خارج، (رو، رو)}، {خارج، پشت، (رو، پشت)}

ج) از میان تعادل‌های نش محض بالا، آن‌هایی تعادل محض بیزی نیز هستند که عقلایی رشته‌ای باشند و باوری سازگار داشته باشند. در ادامه باورهایی که با هر یک از راهبردهای بالا سازگار باشند را به دست می‌آوریم:

ج-۱) مجموعه‌ی راهبردهای {پشت، خارج، (پشت، پشت)} را در نظر بگیرید:

۴)



برای اینکه انتخاب خارج توسط بازیگر ۲ عقلایی رشته‌ای باشد، باید داشته باشیم:

$$-1 > \mu'(a_1|I).(-2) + \big(1-\mu'(a_1|I)\big).(2) \Rightarrow \ \mu'(a_1|I) > \frac{3}{4}$$

همچنین، باور بازیگر ۲ باید با راهبردهای بازیگر ۱ سازگار باشد. ازآنجاکه در تعادل نش بالا، مجموعه‌ی اطلاعاتی I در مسیر تعادل قرار دارد، برای تحقیق در مورد باور بازیگر ۲ از قانون بیز استفاده می‌کنیم:

$$\mu'(a_1|I) = \frac{\Pr\Big(\sigma_2\Big(\text{پشت}\Big|I\Big) = 1\Big)}{\Pr\Big(\sigma_2\Big(\text{پشت}\Big|I\Big) = 1\Big) + \Pr\Big(\sigma_2\Big(\text{رو}\Big|I\Big) = 1\Big)} = 1$$

درنتیجه، به ازای $\mu'(a_1|I) = 1$ این باور با راهبرد بالا سازگار خواهد بود.

برای تعیین باورهای خارج از مسیر تعادل نیز داریم:

- درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان باشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی H قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب پشت را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_1|H).(-2) + \mu(x_2|H).(2) > \mu(x_1|H)(2) + \mu(x_2|H)(-2)$$

با جایگذاری $\mu(x_2|H) = 1 - \mu(x_1|H)$ خواهیم داشت:

$$\mu(x_1|H).(-2) + \big(1-\mu(x_1|H)\big).(2) > \mu(x_1|H)(2) + \big(1-\mu(x_1|H)\big)(-2)$$

$$\Rightarrow \ \mu(x_1|H) < \frac{1}{2}$$

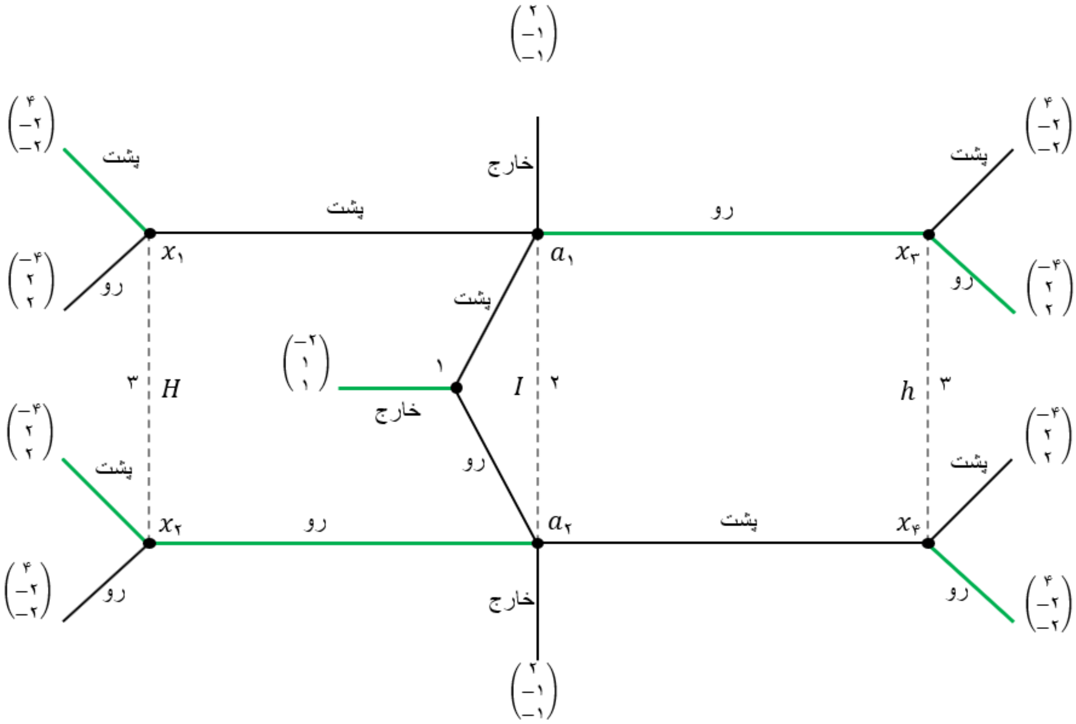
- به‌طور مشابه، درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان نباشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی h قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب پشت را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_3|h).(-2) + \big(1-\mu(x_3|h)\big).(2) > \mu(x_3|h)(2) + \big(1-\mu(x_3|h)\big)(-2)$$
$$\Rightarrow\ \mu(x_3|h) < \frac{1}{2}$$

به‌این‌ترتیب، ارزیابی زیر یک تعادل محض بیزی است:

{پشت، خارج، (پشت، پشت)} و $\mu(x_1|H) \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ و $\mu(x_3|h) \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$ و $\mu'(a_1|I) = 1$

ج-۲) مجموعه‌ی راهبردهای {خارج، رو، (پشت، رو)} را در نظر بگیرید:



راهبرد بالا عقلایی رشته‌ای است. برای تعیین باورهای خارج از مسیر تعادل داریم:

- درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان باشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی H قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب پشت را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_1|H) < \frac{1}{2}$$

- به‌طور مشابه، درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان نباشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی h قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب رو را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

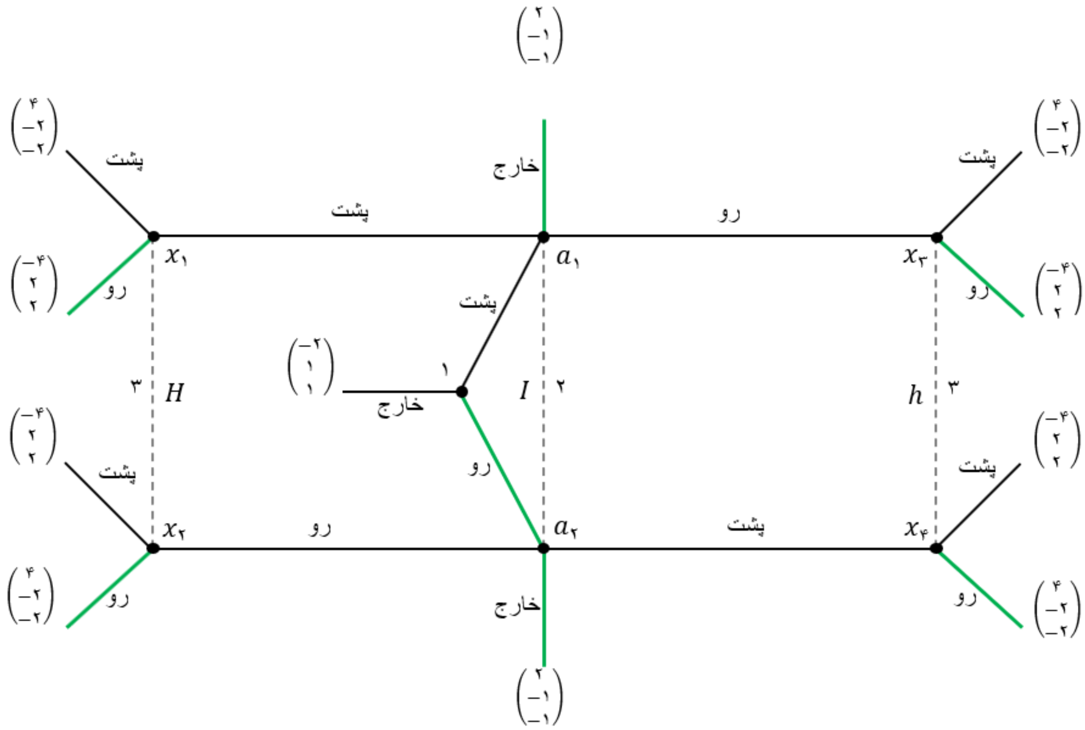
$$\mu(x_3|h) > \frac{1}{2}$$

- در مجموعه‌ی اطلاعاتی I نیز، بازیگر ۲ به ازای هر باوری، همواره، انتخاب رو را انتخاب می‌کند.

به‌این‌ترتیب، ارزیابی زیر یک تعادل محض بیزی است:

$$\{\text{خارج، رو، (پشت، رو)}\} \text{ و } \mu(x_1|H) \in \left[0,\frac{1}{2}\right) \text{ و } \mu(x_3|h) \in \left(\frac{1}{2},1\right] \text{ و } \mu'(a_1|I) \in [0,1]$$

ج-۳) مجموعه‌ی راهبردهای {رو، خارج، (رو، رو)} را در نظر بگیرید:



برای اینکه انتخاب خارج توسط بازیگر ۲ عقلایی رشته‌ای باشد، باید داشته باشیم:

$$-1 > \mu'(a_1|I).(2) + \left(1-\mu'(a_1|I)\right).(-2) \Rightarrow \mu'(a_1|I) < \frac{1}{4}$$

که به ازای $\mu'(a_1|I) = 0$ این باور با راهبرد بالا سازگار خواهد بود (قانون بیز).

برای تعیین باورهای خارج از مسیر تعادل نیز داریم:

- درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان باشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی H قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب رو را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_1|H) > \frac{1}{2}$$

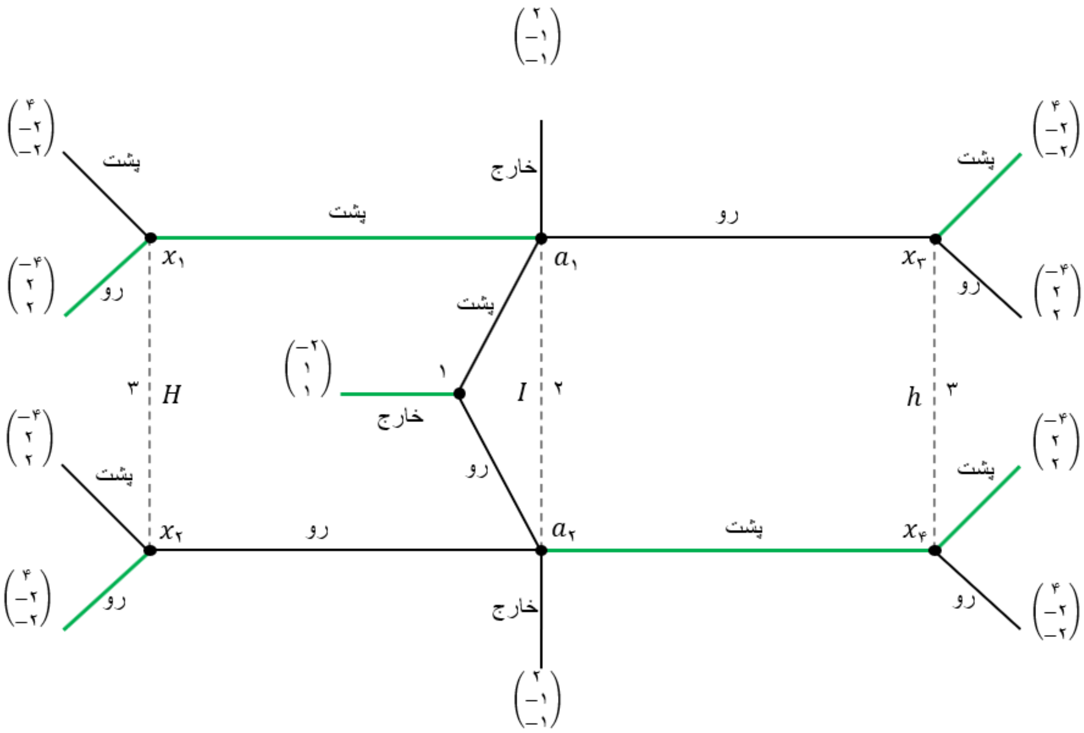
- به‌طور مشابه، درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان نباشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی h قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب رو را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_3|h) > \frac{1}{2}$$

به‌این‌ترتیب، ارزیابی زیر یک تعادل محض بیزی است:

$$\{\text{رو، خارج، (رو، رو)}\} \text{ و } \mu(x_1|H) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ و } \mu(x_3|h) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ و } \mu'(a_1|I) = 0$$

ج-۴) مجموعه‌ی راهبردهای {خارج، پشت، (رو، پشت)} را در نظر بگیرید:



راهبرد بالا عقلایی رشته‌ای است. برای تعیین باورهای خارج از تعادل داریم:

- درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان باشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی H قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب رو را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_1|H) > \frac{1}{2}$$

- به‌طور مشابه، درصورتی‌که حرکات بازیگر ۱ و ۲ یکسان نباشند و بازی در مجموعه‌ی اطلاعاتی h قرار گیرد، بازیگر ۳ انتخاب پشت را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$\mu(x_3|h) < \frac{1}{2}$$

- در مجموعه‌ی اطلاعاتی I نیز، بازیگر ۲ به ازای هر باوری، همواره، انتخاب پشت را انتخاب می‌کند.

به‌این‌ترتیب، ارزیابی زیر یک تعادل محض بیزی است:

{خارج، پشت، (رو، پشت)} و $\mu(x_{۱}|H) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ و $\mu(x_{۳}|h) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ و $\mu'(a_{۱}|I) \in [0, 1]$

د)

د–۱)

{پشت، خارج، (پشت، پشت)} و $\mu(x_{۱}|H) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ و $\mu(x_{۳}|h) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ و $\mu'(a_{۱}|I) = 1$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) = ۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{رو}) = \varepsilon^{n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{خارج}) = \varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_{۲}^{n}(\text{خارج}) = ۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{رو}) = \xi^{n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) = \xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_{۱}|I) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو})} = \frac{۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}}{۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n} + \varepsilon^{n}} = ۱$$

$$\mu(x_{۱}|H) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو}).\tau_{۲}^{n}(\text{رو})} = \frac{(۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}).\xi^{۲n}}{(۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}).\xi^{۲n} + \varepsilon^{n}.\xi^{n}} = ۱$$

$$\mu(x_{۳}|h) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{رو})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{رو}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو}).\tau_{۲}^{n}(\text{پشت})} = \frac{(۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}).\xi^{n}}{(۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}).\xi^{n} + \varepsilon^{n}.\xi^{۲n}} = ۱$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای محض نیست.

د–۲)

{خارج، رو، (پشت، رو)} و $\mu(x_{۱}|H) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ و $\mu(x_{۳}|h) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ و $\mu'(a_{۱}|I) \in [0, 1]$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_{۱}^{n}(\text{خارج}) = ۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{رو}) = \varepsilon^{n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) = \varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_{۲}^{n}(\text{رو}) = ۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) = \xi^{n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{خارج}) = \xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_{۱}|I) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^{۲n}}{\varepsilon^{۲n} + \varepsilon^{n}} = ۰$$

$$\mu(x_{۱}|H) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو}).\tau_{۲}^{n}(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^{۲n}.\xi^{n}}{\varepsilon^{۲n}.\xi^{n} + \varepsilon^{n}.(۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n})} = ۰$$

$$\mu(x_۳|h)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})+\tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{پشت})}=\frac{\varepsilon^{۲n}.(۱-\xi^n-\xi^{۲n})}{\varepsilon^{۲n}.(۱-\xi^n-\xi^{۲n})+\varepsilon^n.\xi^n}=۱$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای محض است.

د-۳)

$$\{\text{رو، خارج، (رو، رو)}\} \text{ و } \mu(x_۱|H)\in\left(\frac{1}{2},1\right] \text{ و } \mu(x_۳|h)\in\left(\frac{1}{2},1\right] \text{ و } \mu'(a_۱|I)=0$$

راهبرد کاملاً ترکیبی برای:

$$\tau_۱^n(\text{رو})=۱-\varepsilon^n-\varepsilon^{۲n},\qquad \tau_۱^n(\text{پشت})=\varepsilon^n,\qquad \tau_۱^n(\text{خارج})=\varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_۲^n(\text{خارج})=۱-\xi^n-\xi^{۲n},\qquad \tau_۲^n(\text{رو})=\xi^n,\qquad \tau_۲^n(\text{پشت})=\xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_۱|I)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت})+\tau_۱^n(\text{رو})}=\frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^n+۱-\varepsilon^n-\varepsilon^{۲n}}=۰$$

$$\mu(x_۱|H)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت})+\tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{رو})}=\frac{\varepsilon^n.\xi^{۲n}}{\varepsilon^n.\xi^{۲n}.\xi^{۲n}+۱-\varepsilon^n-\varepsilon^{۲n}.\xi^n}=۰$$

$$\mu(x_۳|h)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})+\tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{پشت})}=\frac{\varepsilon^n.\xi^n}{\varepsilon^n.\xi^n+\varepsilon^n.(۱-\varepsilon^n-\varepsilon^{۲n})}=۰$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای محض نیست.

د-۴)

$$\{\text{خارج، پشت، (رو، پشت)}\} \text{ و } \mu(x_۱|H)\in\left(\frac{1}{2},1\right] \text{ و } \mu(x_۳|h)\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \text{ و } \mu'(a_۱|I)\in[0,1]$$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_۱^n(\text{خارج})=۱-\varepsilon^n-\varepsilon^{۲n},\qquad \tau_۱^n(\text{رو})=\varepsilon^n,\qquad \tau_۱^n(\text{پشت})=\varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_۲^n(\text{پشت})=۱-\xi^n-\xi^{۲n},\qquad \tau_۲^n(\text{رو})=\xi^n,\qquad \tau_۲^n(\text{خارج})=\xi^{۲n}$$

قانون بیز:

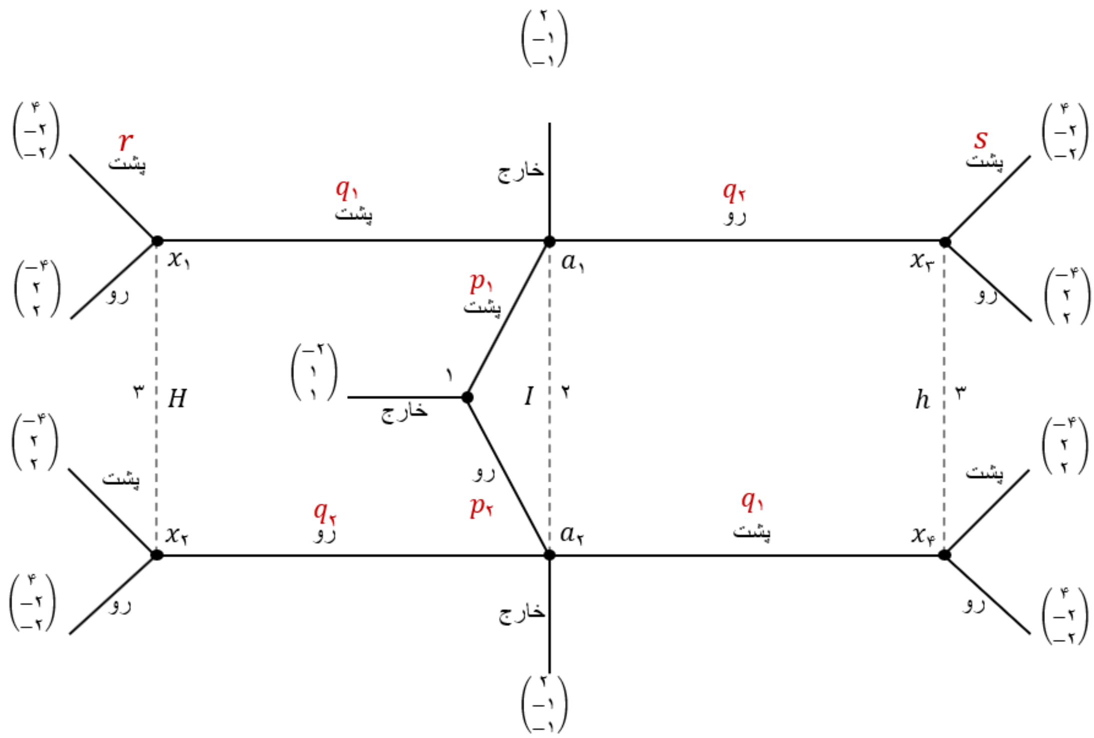
$$\mu'(a_۱|I)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت})+\tau_۱^n(\text{رو})}=\frac{\varepsilon^{۲n}}{\varepsilon^{۲n}+\varepsilon^n}=۰$$

$$\mu(x_۱|H)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\,\tau_۲^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\,\tau_۲^n(\text{پشت})+\tau_۱^n(\text{رو}).\,\tau_۲^n(\text{رو})}=\frac{\varepsilon^{۲n}.\,(۱-\xi^n-\xi^{۲n})}{\varepsilon^{۲n}.\,(۱-\xi^n-\xi^{۲n})+\varepsilon^n.\,\xi^{۲n}}=۱$$

$$\mu(x_۳|h)=\frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\,\tau_۲^n(\text{رو})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\,\tau_۲^n(\text{رو})+\tau_۱^n(\text{رو}).\,\tau_۲^n(\text{پشت})}=\frac{\varepsilon^{۲n}.\,\xi^n}{\varepsilon^{۲n}.\,\xi^n+\varepsilon^n.\,(۱-\xi^n-\xi^{۲n})}=۰$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای محض است.

«ه» و «و»)



قانون بیز:

$$\mu(x_۱|H) = \frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2}, \qquad \mu(x_۳|H) = \frac{p_1 q_2}{p_1 q_2 + p_2 q_1}$$

بی‌تفاوتی بازیگر ۳ در H به ازای $\mu(x_۱|H)$:

$$U_3(\text{پشت}|H) = U_3(\text{رو}|H) \Rightarrow -2\mu(x_1|H) + 2(1-\mu(x_1|H)) = 2\mu(x_1|H) - 2(1-\mu(x_1|H))$$
$$\Rightarrow \mu(x_1|H) = \frac{1}{2}$$

که در این صورت لازم است $p_۱q_۱ = p_۲q_۲$ باشد.

بی‌تفاوتی بازیگر ۳ در h به ازای $\mu(x_۳|h)$:

$$U_3(\text{پشت}|h) = U_3(\text{رو}|h) \Rightarrow -2\mu(x_3|h) + 2(1-\mu(x_3|h)) = 2\mu(x_3|h) - 2(1-\mu(x_3|h))$$
$$\Rightarrow \mu(x_3|h) = \frac{1}{2}$$

که در این صورت لازم است $p_۱q_۲ = p_۲q_۱$ باشد.

اگر $\mu(x_۱|H) < ۱/۲$ و $\mu(x_۳|h) < ۱/۲$ باشد (و به‌صورت مشابه: $\mu(x_۱|H) > ۱/۲$ و $\mu(x_۳|h) > ۱/۲$)

بازیگر ۳ در H انتخاب پشت ($r = ۱$) و در h انتخاب پشت ($s = ۱$) را بازی می‌کند.

$$U_2\left(\text{پشت}\middle|I, r = 1, s = 1\right) - U_2\left(\text{رو}\middle|I, r = 1, s = 1\right) = 0$$

در این صورت بازیگر ۲ میان پشت و رو بی‌تفاوت است و خارج را انتخاب نمی‌کند اگر و تنها اگر:

$$(-2)\mu'(a_1|I) + 2\left(1 - \mu'(a_1|I)\right) > -1 \Rightarrow \mu'(a_1|I) < \frac{3}{4}$$

حالت ۱) اگر $\mu'(a_۱|I) < ۳/۴$: در این صورت بازیگر ۲ بین پشت و رو ترکیب می‌کند. اکنون انتخاب پشت برای بازیگر ۱ همواره مطلوبیت بیشتری خواهد داشت و بازیگر ۳ انگیزه‌ی انحراف خواهد داشت و دیگر پشت را بازی نخواهد کرد.

حالت ۲) اگر $\mu'(a_۱|I) > ۳/۴$: در این صورت بازیگر ۲ بین پشت و رو ترکیب می‌کند. اکنون بازیگر ۱ میان انتخاب پشت و رو بی‌تفاوت است و به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۲ انگیزه‌ی انحراف نداشته باشد. در این صورت، تعادل بیزی بازی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(\text{خارج}) = 0;\ \sigma_1(\text{پشت}) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right];\ \sigma_2(\text{خارج}|I) = 1;\ \sigma_3(\text{پشت}|H) = \sigma_3(\text{پشت}|h) = 1$$

$$\mu(x_1|H) \in \left[0, \frac{1}{2}\right); \mu(x_3|h) \in \left[0, \frac{1}{2}\right);\ \mu'(a_1|I) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_۱^n(\text{پشت}) = p - \varepsilon^n, \qquad \tau_۱^n(\text{رو}) = ۱ - p - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_۱^n(\text{خارج}) = \varepsilon^n + \varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_۲^n(\text{خارج}) = ۱ - \xi^n - \xi^{۲n}, \qquad \tau_۲^n(\text{رو}) = \xi^{۲n}, \qquad \tau_۲^n(\text{پشت}) = \xi^n$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_۱|I) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو})} = \frac{p - \varepsilon^n}{p - \varepsilon^n + ۱ - p - \varepsilon^{۲n}} = p$$

$$\mu(x_۱|H) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{رو})} = \frac{(p - \varepsilon^n).\xi^n}{(p - \varepsilon^n).\xi^n + (۱ - p - \varepsilon^{۲n}).\xi^{۲n}} = p$$

$$\mu(x_۳|h) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو}) + \tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{پشت})} = \frac{(p - \varepsilon^n).\xi^{۲n}}{(p - \varepsilon^n).\xi^{۲n} + (۱ - p - \varepsilon^{۲n}).\xi^n} = p$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای ترکیبی است.

اگر $\boldsymbol{\mu(x_۱|H) < ۱/۲}$ و $\boldsymbol{\mu(x_۳|h) > ۱/۲}$ باشد (و به‌صورت مشابه: $\boldsymbol{\mu(x_۱|H) > ۱/۲}$ **و** $\boldsymbol{\mu(x_۳|h) < ۱/۲}$)

بازیگر ۳ در H انتخاب پشت ($r = ۱$) و در h انتخاب رو ($s = ۰$) را بازی می‌کند. در این صورت بازیگر ۲ فارغ از هر باوری که داشته باشد انتخاب رو را ترجیح می‌دهند و مطلوبیتی که کسب می‌کند بیشتر از انتخاب خارج خواهد بود؛ در این صورت، بازیگر ۱ نیز خارج را انتخاب می‌کند. درنتیجه، به یک تعادل محض بیزی می‌رسیم.

اگر $\boldsymbol{\mu(x_۱|H) = ۱/۲}$ و $\boldsymbol{\mu(x_۳|h) > ۱/۲}$ باشد (و به‌صورت مشابه: $\boldsymbol{\mu(x_۱|H) > ۱/۲}$ و $\boldsymbol{\mu(x_۳|h) = ۱/۲}$)

بازیگر ۳ در H میان انتخاب پشت و رو بی‌تفاوت است و در h انتخاب رو ($s = ۰$) را بازی می‌کند. در این صورت بازیگر ۲ به ازای هر باوری انتخاب رو را به پشت ترجیح می‌دهد و خارج را بازی نمی‌کند اگر و تنها اگر:

$$-1 < 2\mu'(a_1|I) + (4r-2)\big(1-\mu'(a_1|I)\big) \Rightarrow \mu'(a_1|I) > \frac{1/4\ - r}{1-r} = \bar{\mu}$$

حالت ۱) فرض کنید رابطه‌ی بالا بر قرار باشد. در این صورت بازیگر ۲ انتخاب رو را بازی می‌کند؛ بنابراین، بازیگر ۱ انتخاب پشت را بازی نمی‌کند و انتخاب رو را بازی می‌کند اگر و تنها اگر:

$$4 - 8r > -2 \Rightarrow r < \frac{3}{4}$$

اما در این صورتی که بازیگر ۱ رو را بازی کند، بازیگر ۳ انگیزه‌ی انحراف خواهد داشت و دیگر میان پشت و رو بی‌تفاوت نیست. به‌طور مشابه، بازیگر ۱ میان انتخاب رو و خارج نیز ترکیب نمی‌کند.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که $r > ۳/۴$ باشد و بازیگر ۱ خارج را بازی می‌کند. توجه داشته باشید که این مقادیر r با فرضی که در بالا کردیم سازگار است. درنتیجه، تعادل بیزی بازی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(\text{خارج}) = 1;\ \sigma_2(\text{پشت}|I) = 0;\ \sigma_3(\text{پشت}|H) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right);\ \sigma_3(\text{پشت}|h) = 0$$

$$\mu(x_1|H) = \frac{1}{2}; \mu(x_3|h) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right);\ \mu'(a_1|I) \in [0, 1]$$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_۱^n(\text{خارج}) = ۱ - \varepsilon^n - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_۱^n(\text{رو}) = \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_۱^n(\text{پشت}) = \varepsilon^n$$

$$\tau_۲^n(\text{رو}) = ۱ - \xi^n - \xi^{۲n}, \qquad \tau_۲^n(\text{پشت}) = \xi^n, \qquad \tau_۲^n(\text{خارج}) = \xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_۱|I) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^n + \varepsilon^{۲n}} = ۱$$

$$\mu(x_۱|H) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^n.\xi^n}{\varepsilon^n.\xi^n + \varepsilon^{۲n}.(۱ - \xi^n - \xi^{۲n})} = ۰$$

$$\mu(x_۳|h)=\frac{τ_۱^n(\text{پشت}).τ_۲^n(\text{رو})}{τ_۱^n(\text{پشت}).τ_۲^n(\text{رو})+τ_۱^n(\text{رو}).τ_۲^n(\text{پشت})}=\frac{\varepsilon^n.\varepsilon^{۲n}}{\varepsilon^n.\varepsilon^{۲n}+\varepsilon^{۲n}.\xi^n}=۱$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای ترکیبی نیست.

حالت ۲) فرض کنید $\mu'(a_۱|I)<\bar{\mu}$ باشد. در این صورت بازیگر ۲ انتخاب خارج را بازی می‌کند و بازیگر ۱ میان انتخاب پشت و رو بی‌تفاوت است.

اگر $\boldsymbol{\mu(x_۱|H)=۱/۲}$ و $\boldsymbol{\mu(x_۳|h)<۱/۲}$ باشد (و به‌صورت مشابه: $\mu(x_۱|H)<۱/۲$ و $\mu(x_۳|h)=۱/۲$)

حل این حالت نیز به‌صورت حالت بالا خواهد بود.

اگر $\boldsymbol{\mu(x_۱|H)=۱/۲}$ و $\boldsymbol{\mu(x_۳|h)=۱/۲}$ باشد.

در این بازیگر ۳ هم در H و هم در h بی‌تفاوت است.

مطلوبیت بازیگر ۲:

$$U_2(\text{پشت}|I)=p_1(2-4r)+p_2(4s-2)=4p(s-r)$$

$$U_2(\text{رو}|I)=p_1(2-4s)+p_2(4r-2)=4p(r-s)$$

درنتیجه، بازیگر ۲ هیچ‌گاه خارج را بازی نمی‌کند.

حالت ۱. فرض کنید بازیگر ۳ به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۲ نیز میان انتخاب پشت و رو بی‌تفاوت باشد:

$$U_2(\text{پشت}|I)=U_2(\text{رو}|I)\Rightarrow s=r$$

همچنین، حالتی را در نظر بگیرید که بازیگر ۳ به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۱ نیز میان انتخاب پشت و رو بی‌تفاوت باشد و خارج را نیز انتخاب نکند:

$$U_1(\text{پشت})=U_1(\text{رو})\Rightarrow 8r-4=4-8s\Rightarrow r+s=1$$

$$U_1(\text{پشت})=U_1(\text{رو})>U_1(\text{خارج})\Rightarrow r>\frac{1}{4},\qquad s<\frac{3}{4}$$

با جایگذاری $r+s=1$ خواهیم داشت:

$$r=\frac{1}{2},\qquad s=\frac{1}{2}$$

در این صورت، تعادل بیزی بازی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(\text{پشت})=\sigma_1(\text{رو})=\frac{1}{2};\ \sigma_2(\text{پشت}|I)\in(0,1);\ \sigma_3(\text{پشت}|H)=\sigma_3(\text{پشت}|h)=\frac{1}{2}$$

$$\mu(x_1|H) = \mu(x_3|h) = \frac{1}{2};\ \mu'(a_1|I) = \frac{1}{2}$$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_۱^n(\text{پشت}) = \frac{۱}{۲} - \varepsilon^n, \qquad \tau_۱^n(\text{رو}) = \frac{۱}{۲} - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_۱^n(\text{خارج}) = \varepsilon^n + \varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_۲^n(\text{پشت}) = p - \xi^n, \qquad \tau_۲^n(\text{رو}) = 1 - p - \xi^{۲n}, \qquad \tau_۲^n(\text{خارج}) = \xi^n + \xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_۱|I) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو})} = \frac{\frac{۱}{۲} - \varepsilon^n}{\frac{۱}{۲} - \varepsilon^n + \frac{۱}{۲} - \varepsilon^{۲n}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\mu(x_۱|H) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{پشت}) + \tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{رو})} = \frac{(\frac{۱}{۲} - \varepsilon^n).(p - \xi^n)}{(\frac{۱}{۲} - \varepsilon^n).(p - \xi^n) + (\frac{۱}{۲} - \varepsilon^{۲n}).(1 - p - \xi^{۲n})}$$
$$= p$$

$$\mu(x_۳|h) = \frac{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو})}{\tau_۱^n(\text{پشت}).\tau_۲^n(\text{رو}) + \tau_۱^n(\text{رو}).\tau_۲^n(\text{پشت})} = \frac{\varepsilon^n.(1 - p - \xi^{۲n})}{\varepsilon^n.(1 - p - \xi^{۲n}) + \varepsilon^n.(p - \xi^n)} = ۱ - p$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای ترکیبی است.

حالت ۲. حالتی را در نظر بگیرید که بازیگر ۳ به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۲ انتخاب پشت را بازی کند:

$$U_2(\text{پشت}|I) - U_2(\text{رو}|I) = 4p(s - r) + 4p(s - r) = 8p(s - r) > 0 \Rightarrow s > r$$

الف) بازیگر ۳ به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۱ میان انتخاب هر سه انتخابش بی‌تفاوت باشد:

$$U_1(\text{پشت}) = U_1(\text{رو}) = U_1(\text{خارج}) \Rightarrow 8r - 4 = 4 - 8s = -2 \Rightarrow r = \frac{1}{4}, \qquad s = \frac{3}{4}$$

اما در این صورت، بازیگر ۳ انگیزه‌ی انحراف خواهد داشت و دیگر میان پشت و رو بی‌تفاوت نیست. درنتیجه، راهبرد بالا یک تعادل رشته‌ای ترکیبی نیست.

ب) بازیگر ۳ به‌گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۱ انتخاب خارج را بازی کند:

$$-2 > 8r - 4 \Rightarrow r < \frac{1}{4}$$

$$-2 > 4 - 8s \Rightarrow s > \frac{3}{4}$$

در این صورت، تعادل بیزی بازی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_1(\text{خارج}) = 1;\ \sigma_2(\text{پشت}|I) = 1;\ \sigma_3(\text{پشت}|H) \in \left[0,\frac{1}{4}\right);\ \sigma_3(\text{پشت}|h) \in \left(\frac{3}{4}\ ,1\right]$$

$$\mu(x_1|H) = \frac{1}{2};\mu(x_3|h) = \frac{1}{2};\ \mu'(a_1|I) = \frac{1}{2}$$

راهبرد کاملاً ترکیبی:

$$\tau_{۱}^{n}(\text{خارج}) = ۱ - \varepsilon^{n} - \varepsilon^{۲n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{رو}) = \varepsilon^{n}, \qquad \tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) = \varepsilon^{۲n}$$

$$\tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) = ۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{رو}) = \xi^{n}, \qquad \tau_{۲}^{n}(\text{خارج}) = \xi^{۲n}$$

قانون بیز:

$$\mu'(a_{۱}|I) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^{۲n}}{\varepsilon^{۲n} + \varepsilon^{n}} = ۰$$

$$\mu(x_{۱}|H) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{پشت})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{پشت}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{رو})} = \frac{\varepsilon^{۲n}.\,(۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n})}{\varepsilon^{۲n}.\,(۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n}) + \varepsilon^{n}.\,\xi^{n}} = ۱$$

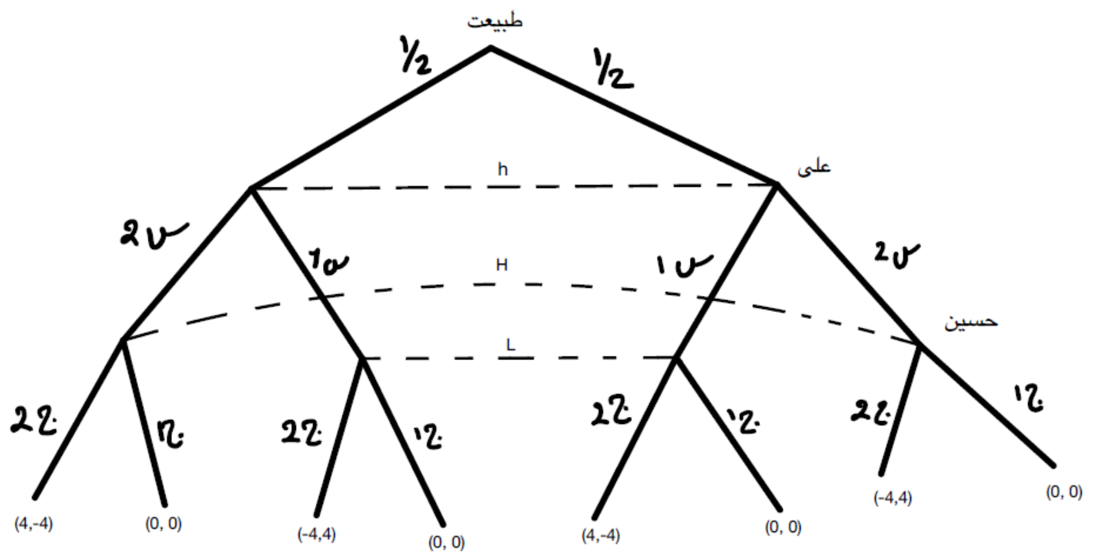
$$\mu(x_{۳}|h) = \frac{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{رو})}{\tau_{۱}^{n}(\text{پشت}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{رو}) + \tau_{۱}^{n}(\text{رو}).\,\tau_{۲}^{n}(\text{پشت})} = \frac{\varepsilon^{۲n}.\,\xi^{n}}{\varepsilon^{۲n}.\,\xi^{n} + (۱ - \xi^{n} - \xi^{۲n})} = ۰$$

درنتیجه، تعادل بالا یک تعادل رشته‌ای ترکیبی نیست.

فصل ۳، تمرین ۱۱: سعید حجتی نژاد

الف)

شکل درختی:



ب)

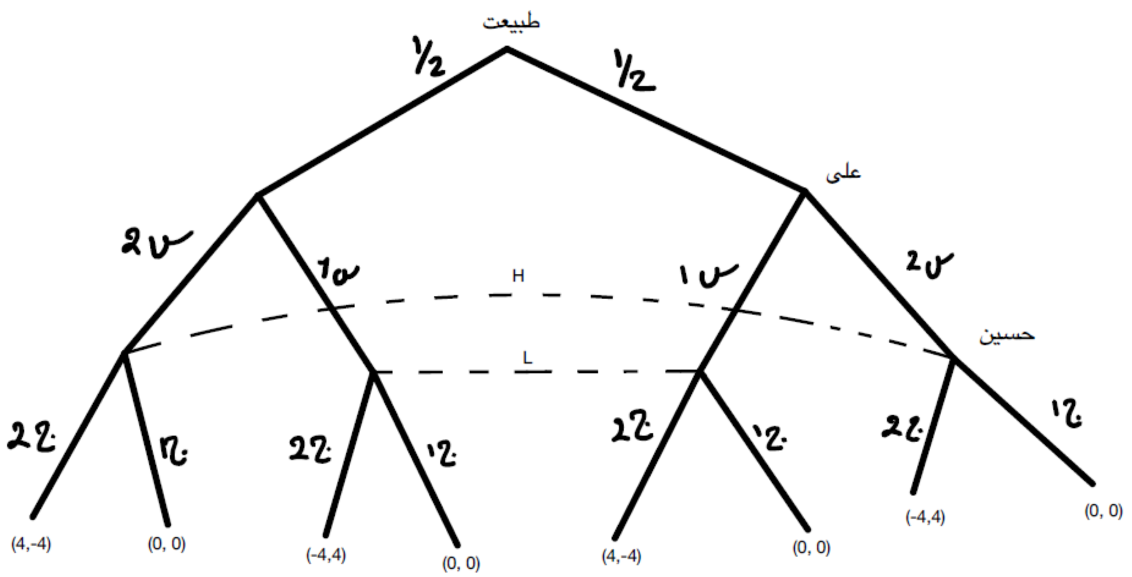
جدول بازی با توجه به احتمال بازی ۰.۵ و ۰.۵ توسط طبیعت به شکل زیر است:

ساختار را با Type (T) و جام را با Cup (C) نشان می‌دهیم. حرکات بازیگر ۲ به شکل زوج مرتب و به ترتیب در مجموعه اطلاعاتی L و مجموعه اطلاعاتی H است.

		بازیگر ۲			
		C1, C1	C1, C2	C2, C1	C2, C2
بازیگر ۱	T1	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)
	T2	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)

$$\sigma_1(T_1) \in [0,1], \sigma_2(C_1|L) \in [0,1], \sigma_2(C_1|H) \in [0,1]$$

ج)



برای به دست آوردن راهبردها باید بگوییم هر بازیگر در هر مجموعه اطلاعاتی که برای بازی فراخوانده می شود چه کاری انجام می‌دهد. حرکات بازیگر ۲ به شکل زوج مرتب و به ترتیب در مجموعه اطلاعاتی L و مجموعه اطلاعاتی H است.

طبیعت	Prob [0.5]: N			بازیگر ۲			
				C1, C1	C1, C2	C2, C1	C2, C2
		بازیگر ۱	T1	(0 , 0)	(0 , 0)	(-4 , 4)	(-4 , 4)

			T2	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{4}, -4)$	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{4}, -4)$

	Prob [0.5]: M			بازیگر ۲			
				C1, C1	C1, C2	C2, C1	C2, C2
		بازیگر ۱	T1	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{0}, 0)$	$(\underline{4}, -4)$	$(\underline{4}, -4)$
			T2	$(\underline{0}, 0)$	(-4 , 4)	(0 , 0)	(-4 , 4)

برای یافتن تعادل نش باید بهترین پاسخ هر بازیگر به هر استراتژی طرف مقابل را بیابیم. تقاطع این بهترین پاسخ ها تعادل نش است.

برای علی داریم:

$$BR_{\text{علی}}\left((C_1, C_1)\middle|N\right) = T_1/T_2$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_1, C_2)\middle|N\right) = T_2$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_2, C_1)\middle|N\right) = T_2$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_2, C_2)\middle|N\right) = T_2$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_1, C_1)\middle|M\right) = T_1/T_2$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_1, C_2)\middle|M\right) = T_1$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_2, C_1)\middle|M\right) = T_1$$

$$BR_{\text{علی}}\left((C_2, C_2)\middle|M\right) = T_1$$

همچنین برای حسین داریم:

$$BR_{\text{حسین}}(T_1, T_1) = (C_1, C_1)/(C_1, C_2)/(C_2, C_1)/(C_2, C_2)$$

$$BR_{\text{حسین}}(T_1, T_2) = (C_2, C_2)$$

$$BR_{\text{حسین}}(T_2, T_1) = (C_1, C_1)$$

$$BR_{\text{حسین}}(T_2, T_2) = (C_1, C_1)/(C_1, C_2)/(C_2, C_1)/(C_2, C_2)$$

تقاطع بهترین پاسخ‌ها تعادل نش هستند.

د) همانطور که از بهترین پاسخ‌ها در بالا واضح است، چنین تعادل محضی که C2 در زوج جواب باشد، وجود ندارد. همچنین اگر به جدول دقت کنید، مشاهده می‌کنید که پیامد انتظاری در حالت (C1,C1) برای هر دو بازیگر صفر است. اما اگر با هر احتمالی یکی از حرکاتی که C2 در روج مرتب هستند را انجام دهد، بازیگر اول در حالت اول حرکت محض T2 و در حالت دوم حرکت محض T1 را انجام می‌دهد. در این حالت نیز در همه حالات پیامد انتظاری برای بازیگر دوم کمتر از صفر می‌شود. بنابراین هیچ حرکت ترکیبی که بازیگر دوم حرکت C2 را با احتمالی مثبت انجام دهد، تعادل نخواهد بود.

فصل ۳، تمرین ۱۲: مهرداد پوراصغری

الف) تعادل‌های نش محض: (U, L, BC) و (U, L, BD) و (U, L, AC) و (U, L, AD)

بازیگر ۳

	AD	AC	BD	BC
U	۵،۵،۰	۵،۵،۰	۵،۵،۰	۵،۵،۰
M	۱۰،۰،۱	۱۰،۰،۱	۰،۰،۰	۰،۰،۰
K	۰،۰،۱	۰،۰،۱	۱۰،۰،۰	۱۰،۰،۰

R

بازیگر ۳

بازیگر ۱	AD	AC	BD	BC
U	۵،۵،۰	۵،۵،۰	۵،۵،۰	۵،۵،۰
M	۱،۱،۱	۳،۱،۰	۱،۱،۱	۳،۱،۰
K	۱،۱،۰	۳،۱،۲	۱،۱،۰	۳،۱،۲

L

بازیگر ۲

این بازی تنها یک زیربازی دارد که آن کل بازی است؛ بنابراین، تمامی تعادل‌های نش بالا، تعادل کامل زیربازی نیز هستند.

ب) از میان تعادل‌های نش محض بالا، آن‌هایی تعادل محض بیزی نیز هستند که عقلایی رشته‌ای باشند و باوری سازگار داشته باشند.

اگر بازی به مجموعه‌ی اطلاعاتی $h_۳$ برسد، بازیگر ۳ همواره انتخاب A را بازی خواهد کرد؛ بنابراین، هیچ باوری وجود ندارد که بر اساس آن بازیگر ۳ در مجموعه‌ی اطلاعاتی $h_۳$ مجاب شود انتخاب B را بازی کند. درنتیجه، تعادل‌های (U, L, BC) و (U, L, BD) عقلایی رشته‌ای نیستند و نمی‌توانند تعادل بیزی باشند.

ج) برای بازیگر ۲، انتخاب R اکیداً مغلوب انتخاب L است و او همواره انتخاب L را بازی می‌کند؛ بنابراین، بازیگر ۱ با انتخاب M یا K حداکثر پیامدی برابر ۳ را کسب می‌کند. درنتیجه، برای بازیگر ۱ انتخاب‌های M و K اکیداً مغلوب انتخاب U است و او همواره انتخاب U را بازی می‌کند. به‌این‌ترتیب، تعادلی که بازیگر ۱ حرکت محض انجام ندهد وجود ندارد.

د) تعادل‌های رشته‌ای زیرمجموعه‌ای از تعادل‌های بیزی هستند. ازآنجاکه (U, L, BD) تعادل بیزی نیست، تعادل رشته‌ای نیز نمی‌تواند باشد.

فصل ۳، تمرین ۱۳: سعید حجتی نژاد

الف)

از آنجایی که هر سه ماشین محصول یک کارخانه هستند، و از بین دو کارخانه فقط کارخانه G ماشین باکیفیت تولید می‌کند، اگر فروشنده‌ای مشاهده کند که ماشینش باکیفیت است مطمئن می‌شود که هر سه ماشین محصول کارخانه G است. بنابراین:

$$P(HH|H) = p^2$$

اما اگر فروشنده مشاهده کند که ماشینش بی‌کیفیت است، نمی‌داند محصول کدام کارخانه است و خواهیم داشت:

$$P(L) = \big(P(G) \times P(L|G)\big) + \big(P(B) \times P(L|B)\big) = \big(0.5 \times (1-p)\big) + 0.5$$

$$P(HH|L) = \frac{P(HH,L)}{P(L)} = \frac{0.5 \times p^2 \times (1-p)}{\big(0.5 \times (1-p)\big) + 0.5} = p^2\left(\frac{1-p}{2-p}\right)$$

ب)

مشابه محاسبات بالا برای حالت‌های دیگر هم احتمال را حساب می‌کنیم:

$$P(HH|H) = p^2$$

$$P(HH|L) = p^2\left(\frac{1-p}{2-p}\right)$$

$$P(HL|H) = p(1-p)$$

$$P(HL|L) = p\left(\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)$$

$$P(LL|H) = (1-p)^2$$

$$P(LL|L) = \frac{1+(1-p)^3}{2-p}$$

برای اینکه نشان دهیم راستگویی برای همه بازیگرها یک تعادل بیزی است باید نشان دهیم که با باورهای بالا، در صورتی که دو بازیگر دیگر راستگو باشند آیا برای بازیگر سوم هم در همه حالات راستگویی غالب است. به این منظور در نظر می‌گیریم که دو بازیگر دیگر راستگو هستند و بنابراین کیفیت اعلامی آنها با کیفیت واقعی آنها برابر است. در نتیجه برای بررسی راستگویی بازیگر سوم خواهیم داشت:

$$U\left(\text{راستگویی}\middle|L\right) > U\left(\text{دروغگویی}\middle|L\right)$$

$$\rightarrow \quad U(L|HHL)P(HH|L) + U(L|HLL)P(HL|L) + U(L|LHL)P(LH|L) + U(L|LLL)P(LL|L) > U(H|HHL)P(HH|L) + U(H|HLL)P(HL|L) + U(H|LHL)P(LH|L) + U(H|LLL)P(LL|L)$$

$$\rightarrow \quad \left(11 \times p^2 \left(\frac{1-p}{2-p}\right)\right) + 2\left(10 \times p \left(\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)\right) + \left(10 \times \frac{(1-p)^3}{2-p}\right) > \left(12 \times p^2 \left(\frac{1-p}{2-p}\right)\right) + 2\left(12 \times p \left(\frac{(1-p)^2}{2-p}\right)\right) + \left(9 \times \frac{1+(1-p)^3}{2-p}\right)$$

$$U\left(\text{راستگویی}\middle|H\right) > U\left(\text{دروغگویی}\middle|H\right)$$

$$\rightarrow \quad U(H|HHH)P(HH|H) + U(H|HLH)P(HL|H) + U(H|LHH)P(LH|H) + U(H|LLH)P(LL|H) > U(L|HHH)P(HH|H) + U(L|HLH)P(HL|H) + U(L|LHH)P(LH|H) + U(L|LLH)P(LL|H)$$

$$\rightarrow \quad (12 \times p^2) + 2\big(12 \times p(1-p)\big) + (9 \times (1-p)^2) > (11 \times p^2) + 2\big(10 \times p(1-p)\big) + (10 \times (1-p)^2)$$

با اعداد گفته شده در سوال پاسخ‌ها با خواسته سوال متناقض بدست می‌آیند و نیاز به بررسی سوال است.

فصل ۳، تمرین ۱۴: علی امینی

الف) حرکت‌های حسن آقا در حالتی که با احتمال ۸۰ درصد ماهی سفید شکار کند:

- تن ماهی (T)
- خانه (H)

حرکت‌های حسن آقا در حالتی که با احتمال ۲۰ درصد ماهی اوزون برون شکار کند:

- تن ماهی (T)
- خانه (H)
- مبادله (E)

بنابراین راهبردهای حسن آقا به‌صورت مجموعه $\{TT, TH, TE, HT, HH, HE\}$ است.

همسرش اطلاعی از شکار حسن آقا ندارد بنابراین تنها دو حرکت زیر را دارد:

- آماده کردن وسایل پخت ماهی سفید (W)

- آماده کردن وسایل پخت ماهی اوزون برون (U)

اکنون پیامد انتظاری را برای هر راهبرد محاسبه می‌کنیم.

- حسن آقا راهبرد TT و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(TT, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 15 = 11$$

$$U_2(TT, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 15 = 11$$

- حسن آقا راهبرد TT و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(TT, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 15 = 11$$

$$U_2(TT, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 15 = 11$$

- حسن آقا راهبرد TH و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(TH, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 0 = 8$$

$$U_2(TH, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 0 = 8$$

- حسن آقا راهبرد TH و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(TH, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 50 = 18$$

$$U_2(TH, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 50 = 18$$

- حسن آقا راهبرد TE و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(TE, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 20 = 12$$

$$U_2(TE, W) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 20 = 12$$

- حسن آقا راهبرد TE و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(TE, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 0 = 8$$

$$U_2(TE, U) = 0.8 \times 10 + 0.2 \times 0 = 8$$

- حسن آقا راهبرد HT و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(HT, W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 15 = 19$$

$$U_2(HT, W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 15 = 19$$

- حسن آقا راهبرد HT و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(HT, U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 15 = 3$$

$$U_2(HT, U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 15 = 3$$

- حسن آقا راهبرد HH و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(HH, W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 0 = 16$$

$$U_2(HH,W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 0 = 16$$

- حسن آقا راهبرد HH و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(HH,U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 50 = 10$$

$$U_2(HH,U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 50 = 10$$

- حسن آقا راهبرد HE و همسرش W را اتخاذ کند

$$U_1(HE,W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 20 = 20$$

$$U_2(HE,W) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 20 = 20$$

- حسن آقا راهبرد HE و همسرش U را اتخاذ کند

$$U_1(HE,U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 0 = 0$$

$$U_2(HE,U) = 0.8 \times 0 + 0.2 \times 0 = 0$$

بنابراین نمایش جدولی به‌صورت زیر خواهد بود:

همسر

حسن آقا		W	U
	TT	(۱۱, ۱۱)	(۱۱, ۱۱)
	TH	(۸, ۸)	(۱۸, ۱۸)
	TE	(۱۲, ۱۲)	(۸, ۸)
	HT	(۱۹, ۱۹)	(۳, ۳)
	HH	(۱۶, ۱۶)	(۱۰, ۱۰)
	HE	(۲۰, ۲۰)	(۰, ۰)

ب)

بهترین واکنش حسن آقا با رنگ سبز و بهترین واکنش همسرش با رنگ زرد در جدول مشخص شده‌اند. بنابراین دو تعادل نش محض وجود دارد که مربوط به برنامه‌های زیر است:

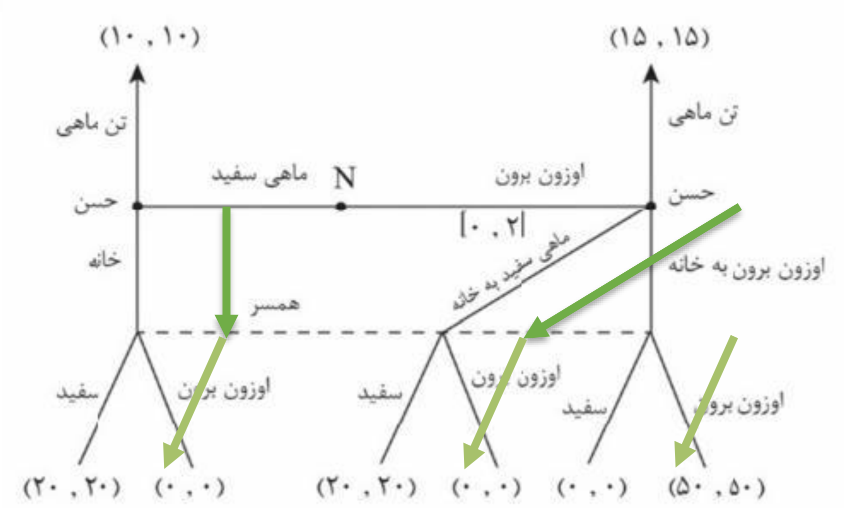
$$\boxed{NE = \{TH, U\}}$$

$$\boxed{NE = \{HE, W\}}$$

با توجه به اینکه در برنامه تعادلی دوم، مطلوبیت انتظاری هر دو بیشتر از برنامه اول است، بنابراین برنامه آوردن ماهی سفید به خانه در صورت صید ماهی سفید و مبادله اوزون برون در غیر اینصورت و آماده کردن وسایل پخت ماهی سفید توسط همسر تعادل بهینه است.

ج)

مسیر تعادل در شکل زیر مشخص شده‌است.



«نمودار ۳. ۲۷»

برای بررسی اینکه آیا این تعادل رشته‌ای است یا نه باید ارزیابی (σ, μ) را به‌گونه‌ای بیابیم که باید دو شرط برقرار باشند:

الف) ارزیابی (σ, μ) عقلایی رشته‌ای باشد.

ب) رشته‌ای از راهبردهای کاملا ترکیبی $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ وجود داشته‌باشد که با استفاده از قانون بیز باورهای $\{\mu^k\}_{k=1}^{\infty}$ را القا کند و به ارزیابی (σ, μ) همگرا شود.

به بررسی هر کدام از این شروط می‌پردازیم:

- بررسی شرط الف)

$$U_2(W) > U_2(U)$$

$$\Rightarrow \quad 20\mu_1 + 20\mu_2 + 0 \times (1 - \mu_1 - \mu_2) \quad > \quad 0 \times \mu_1 + 0 \times \mu_2 + 50 \times (1 - \mu_1 - \mu_2)$$

$$\mu_1 + \mu_2 > \frac{5}{7}$$

برنامه تعادلی که عقلایی رشته‌ای است به صورت زیر است:

$$(\sigma, \mu) = \left\{\sigma_1(H) = 1, \sigma_1(E) = 1, \sigma_2(W) = 1;\ \ \mu_1 + \mu_2 > \frac{5}{7}\right\}$$

- بررسی شرط ب)

$$\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty} \ = \ \{\sigma^k{}_1(H) = 1 - \eta^k, \sigma^k{}_1(E) = 1 - \tau^k - \zeta^k, \sigma^k{}_1(H) = \zeta^k, \sigma^k{}_2(W) = 1 - \xi^k \}$$

داریم:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^k \ = \ \sigma$$

باورها را بر اساس قانون بیز می‌سازیم:

$$\mu_1^k = \frac{0.8 \times \sigma_1^k(H)}{0.8 \times \sigma_1^k(H) + 0.2 \times \sigma_1^k(H) + 0.2 \times \sigma_1^k(E)}$$

$$= \frac{0.8 \times (1 - \eta^k)}{0.8 \times (1 - \eta^k) + 0.2 \times \zeta^k + 0.2 \times (1 - \tau^k - \zeta^k)}$$

$$\mu_2^k = \frac{0.2 \times \sigma_1^k(E)}{0.8 \times \sigma_1^k(H) + 0.2 \times \sigma_1^k(H) + 0.2 \times \sigma_1^k(E)}$$

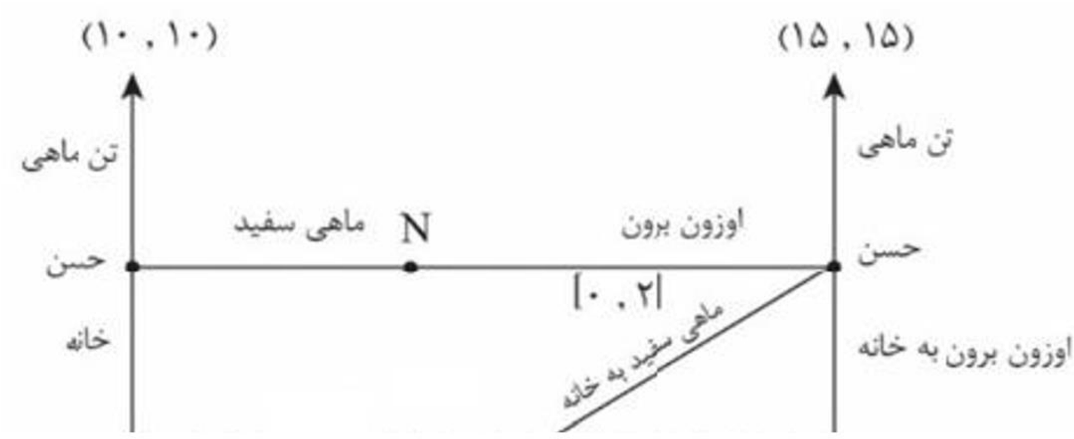
$$= \frac{0.2 \times (1 - \tau^k - \zeta^k)}{0.8 \times (1 - \eta^k) + 0.2 \times \zeta^k + 0.2 \times (1 - \tau^k - \zeta^k)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_1^k \ + \ \mu_2^k \ = \ 1$$

که با شرط عقلایی رشته‌ای بودن در قسمت الف ($\mu_1 + \mu_2 > \frac{5}{7}$) سازگار است.

بنابراین تعادل رشته‌ای داریم.

د) در این حالت همسر حسن آقا همواره می‌داند که چه وسیله‌ای برای پخت باید آماده کند، بنابراین نمودار به صورت زیر در خواهد آمد.



در این حالت اگر ماهی سفید بیاید حسن آقا با همسرش تماس می‌گیرد تا وسایل پخت ماهی سفید را اماده کند و اگر اوزون برون بیاید، نیز با او تماس میگیرد تا وسایل اوزون برون را آماده کند. چون مطلوبیت این حالات از سایر حالات بیشتر است.

بنابراین مطلوبیت انتظاری تعادلی آن‌ها در این حالت برابر است با:

$U_1(HH) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 50 = 26$

$U_2(HH) = 0.8 \times 20 + 0.2 \times 50 = 26$

برای محاسبه بیشترین مقداری که حسن آقا حاضر است برای موبایل ماهواره‌ای بپردازد باید مطلوبیت او در این حالت را با حالت قبلی مقایسه کنیم.

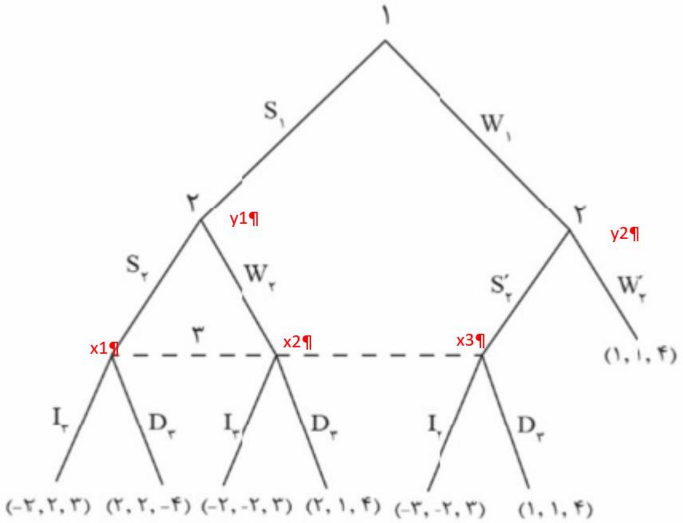
با داشتن موبایل$U_1 = 26$

بدون داشتن موبایل$U_1 = 20$

بیشینه مقداری که حاضر است بپردازد: $\boxed{26 - 20 = 6}$

پس حسن آقا حداکثر حاضر است ۶ واحد پرداخت کند.

فصل ۳، تمرین ۱۵: ملیکا عبدی



مجموعه اطلاعات بازیگر ۳ را h می‌نامیم. همچنین برای سادگی:

$$\mu(x_1|h) = \mu_1, \mu(x_2|h) = \mu_2, \mu(x_3|h) = \mu_3.$$

الف)

با توجه به جدول سه تعادل نش داریم:

بازیگر سوم (ستون‌ها)، *بازیگر دوم* (سطرها)

S:

	I	D
SS	(−۲,۲,۳)	(۲,۲,−۴)
SW	(−۲,۲,۳)	(۲,۲,−۴)
WS	(−۲,−۲,۳)	(۲,۱,۴)
WW	(−۲,−۲,۳)	(۲,۱,۴)

W:

	I	D
SS	(−۳,−۲,۳)	(۱,۱,۴)
SW	(۱,۱,۴)	(۱,۱,۴)
WS	(−۳,−۲,۳)	(۱,۱,۴)
WW	(۱,۱,۴)	(۱,۱,۴)

بازیگر اول بین جدول راست و چپ انتخاب می‌کند

تعادل اول (S,SS,I):

$$\sigma_1(S) = \sigma_2(SS) = \sigma_3(I) = 1 \rightarrow \mu_1 = 1$$

برای این که نشان دهیم تعادل رشته‌ای است، باید رشته‌ای از حرکات کاملا ترکیبی تعریف کنیم که به این باور همگرا شود:

$$\sigma_1^n(W) = \epsilon^n, \sigma_2^n(W) = \xi^n \rightarrow \ \mu_1 = \frac{(1-\epsilon^n)(1-\xi^n)}{(1-\epsilon^n)(1-\xi^n) + (1-\epsilon^n)\xi^n + \epsilon^n(1-\xi^n)}$$
$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_1 = 1$$

پس این تعادل رشته‌ای نیز هست.

تعادل دوم (W,SW,I):

$$\sigma_1(W) = \sigma_2(SW) = \sigma_3(I) = 1$$
$$u_3(I) > u_3(D) \ \rightarrow \ 3\mu_3 + 3\mu_2 + 3\mu_1 > -4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 \ \rightarrow \ 3 > -4\mu_1 + 4(1-\mu_1)$$
$$\rightarrow \ \mu_1 > \frac{1}{8}$$

برای تعادل رشته‌ای:

$$\sigma_1^n(W) = 1-\epsilon^n, \sigma_2^n(W|S_1) = \xi^n,$$
$$\sigma_2^n(W|W_1) = 1 - a\epsilon^n \ \rightarrow \ \mu_1 = \frac{(\epsilon^n)(1-\xi^n)}{(\epsilon^n) + (1-\epsilon^n)(a\epsilon^n)} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_1 = \frac{1}{1+a}$$

پس با تنظیم a میتوان رشتهٔ مورد نظر را تولید کرد و این تعادل نیز رشته‌ای است.

تعادل سوم (W,WW,I):

$$\sigma_1(W) = \sigma_2(WW) = \sigma_3(I) = 1$$
$$u_3(I) > u_3(D) \ \rightarrow \ 3\mu_3 + 3\mu_2 + 3\mu_1 > -4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 \ \rightarrow \ 3 > -4\mu_1 + 4(1-\mu_1)$$
$$\rightarrow \ \mu_1 > \frac{1}{8}$$

برای تعادل رشته‌ای:

$$\sigma_1^n(W) = 1-\epsilon^n, \sigma_2^n(W|S_1) = 1-\xi^n,$$
$$\sigma_2^n(W|W_1) = 1 - \zeta^n \ \rightarrow \ \mu_1 = \frac{(\epsilon^n)(\xi^n)}{(\epsilon^n) + (1-\epsilon^n)(\zeta^n)} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_1 = 0, \lim \mu_2 = 1$$

پس تعادل رشته‌ای این است: (W,WW,I), $\mu_1 = 1$

ب)

در این حالت جدول به صورت زیر تغییر می‌کند:

بازیگر سوم

بازیگر		I	D
	S	(−۲,۲,۳)	(۲,۲,−۴)
	W	(−۲,−۲,۳)	(۲,۲,−۴)

S

بازیگر سوم

	I	D
S	(−۳,−۲,۳)	(۱,۱,۴)
W	(۱,۱,۴)	(۱,۱,۴)

W

بازیگر اول بین جدول راست و چپ انتخاب می‌کند

مجموعه اطلاعات بازیگر 2 را H می‌نامیم. همچنین برای سادگی:

$$\mu(y_1|H) = \gamma_1, \mu(y_2|H) = \gamma_2$$

با توجه به شکل دو تعادل نش محض داریم.

تعادل *(S,S,I)*:

$$\sigma_1(S) = 1, \sigma_2(S) = 1, \sigma_3(I) = 1 \rightarrow \mu_1 = 1\,, \mu_2 = \mu_3 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0$$

$$2\gamma_1 + \ -2\gamma_2 > -2\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 > \frac{3}{7}$$

این تعادل رشته‌ای است چون:

$$\sigma_1^n(W) = \epsilon^n, \sigma_2^n(W) = \xi^n \rightarrow \ \mu_1 = \frac{(1-\epsilon^n)(1-\xi^n)}{(1-\epsilon^n)(1-\xi^n) + (1-\epsilon^n)\xi^n + \epsilon^n(1-\xi^n)}$$
$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_1 = 1, \gamma_1 = 1 - \epsilon^n \rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \gamma_1 = 1$$

تعادل *(W,W,I)*:

$$\sigma_1(S) = 0, \sigma_2(S) = 0, \sigma_3(I) = 1$$

$$u_3(I) > u_3(D) \ \ \rightarrow \ \ 3\mu_3 + 3\mu_2 + 3\mu_1 > -4\mu_1 + 4\mu_2 + 4\mu_3 \ \ \rightarrow \ \ 3 > -4\mu_1 + 4(1-\mu_1)$$
$$\rightarrow \ \ \mu_1 > \frac{1}{8}$$

این تعادل نیز مشابه بخش قبل تعادل رشته‌ای نیست.

کارفرما ترجیح می‌دهد بازیگر۲ حرکت بازیگر۱ را ببیند. چرا که در این حالت کارگران به این تعادل که هر دو کار کنند سوق داده می‌شوند. چون اگر بازیگر۲ بداند در $y2$ قرار دارد، ترجیح می‌دهد کار کردن را انتخاب کند چون مطلوبیت انتظاری وی در این حالت بیشتر است. به طور مشابه در $y1$ ترجیح می‌دهد خوابیدن را انتخاب کند. با دانستن این‌ها کارفرما هم میداند که در صورتی که به مجموعه اطلاعات h برسد، با احتمال زیادی در $x1$ قرار دارد. پس با توجه به مطلوبیتها بازرسی را انتخاب می‌کند. از طرفی اگر بازیگر اول بداند که بازیگر۲ و۳ این‌گونه بازی می‌کنند، تمایل دارد کار کردن را انتخاب کند چون سود انتظاری وی در این حالت مثبت و در حالت خوابیدن منفی است.

بازیگر۱ نیز ترجیح می‌دهد بازیگر۲ حرکتش را ببیند چون در این صورت بازی به سمت تعادلی که هر دو کار می‌کنند هدایت می‌شود که در این حالت سودش مثبت است. اگر بازی به سمت دیگری هدایت شود، با توجه به این که حرکت معقول برای کارفرما بازرسی است، بازیگر۱ سود منفی خواهد داشت.

بازیگر۲ ممکن است انگیزه داشته باشد که حرکت بازیگر اول را نبیند چون در این حالت بازی با احتمال بیشتری به تعادل خواب هر دو کارگر سوق داده می‌شود که سود بازیگر۲ در این حالت نسبت به حالتی که هر دو کار کنند بیشتر است.

ج) در بخش ب نسبت به بخش الف یک مجموعه اطلاعات اضافه شده است. در واقع نسبت به بخش الف باور بازیگر۲ نیز حالا باید در قانون بیز و نامعادلات مربوط به انگیزه بازیگر۲ برای انجام حرکت محض صدق کند. پس نسبت به بخش قبل قیدهای بیشتری داریم که مجموعه جواب را نسبت به بخش قبل محدودتر می‌کند. پس ممکن است برخی تعادل‌های بیزی و رشته‌ای اینجا صدق نکنند

د)

در بخش‌های قبل تعادل‌های رشته‌ای برای حالت محض به دست آمده‌اند. در این بخش باید حالات ترکیبی را محاسبه کنیم. فرض کنیم بازیگر۱ با احتمال $p1$ میخوابد و بازیگر۳ با احتمال $p3$ نظارت می‌کند. مطلوبیت بازیگر۲ را برای حالت‌های مختلف بازی او محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم که در چه حالاتی انگیزه ترکیب دارد:

$$u_2(SS) = 2p_1p_3 + 2p_1(1-p_3) - 2(1-p_1)p_3 + (1-p_1)(1-p_3) = p_1 - 3p_3 + 3p_1p_3 + 1$$

$$u_2(SW) = 2p_1p_3 + 2p_1(1-p_3) + (1-p_1) = p_1 + 1$$

$$u_2(WS) = -2p_1p_3 + p_1(1-p_3) - 2p_3(1-p_1) + (1-p_1)(1-p_3) = 1 - 3p_3$$

$$u_2(WW) = -2P_1P_3 + p_1(1-p_3) + (1-p_1) = 1 - 3p_1p_3$$

حال نحوهٔ ترکیب‌های مختلف بازیگر۲ را به دست می‌آوریم:

$$1)\ u_2(SS) = u_2(SW) \rightarrow p_1 = 1$$

$$2)\ u_2(SS) = u_2(WS) \rightarrow p_1 = 0$$

$$3)\ u_2(SS) = u_2(WW) \rightarrow 6p_1p_3 = 3p_3 - p_1$$

$$4)\ u_2(SW) = u_2(WS) \rightarrow p_1 = p_3 = 0$$

$$5)\ u_2(SW) = u_2(WW) \rightarrow p_1 = 0$$

$$6)\ u_2(WS) = u_2(WW) \rightarrow p_1 = 1$$

همچنین بازیگر۳ برای این که انگیزۀ ترکیب کردن داشته باشد باید:

$$7)\ \mu = \frac{p_1p_2}{p_1p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2} = \frac{1}{8} \rightarrow 9p_1p_2 = p_1 + p_2$$

با دستگاه کردن این معادله با معادلات ۱-۶ به جز معادله ۳، به دست می‌آید که در این حالات تعادل ترکیبی شکل نمیگیرد چون احتمالات یک یا صفر به دست می‌آیند. در این مساله صورتبندی به گونه‌ای است که اگر بازیگر ۳ و ۲ ترکیب نکنند، بازیگر۱ نیز انگیزۀ ترکیب حرکاتش را ندارد. پس تنها تعادل ترکیبی که باقی می‌ماند ناشی از معادلۀ ۳ است. تنها در این حالت بازیگر۱ انگیزه دارد ترکیب کند:

$$u_1(S) = -2p_2p_3 + 2p_2(1-p_3) + \ -2p_3(1-p_2) + 2(1-p_2)(1-p_3) = 2 - 4p_3$$

$$u_1(W) = -3p_2p_3 + p_2(1-p_3) + 1 - p_2 = 1 - 4p_2p_3$$

$$u_1(S) = u_1(W) \rightarrow 8)\ 1 = 4p_3(1-p_2)$$

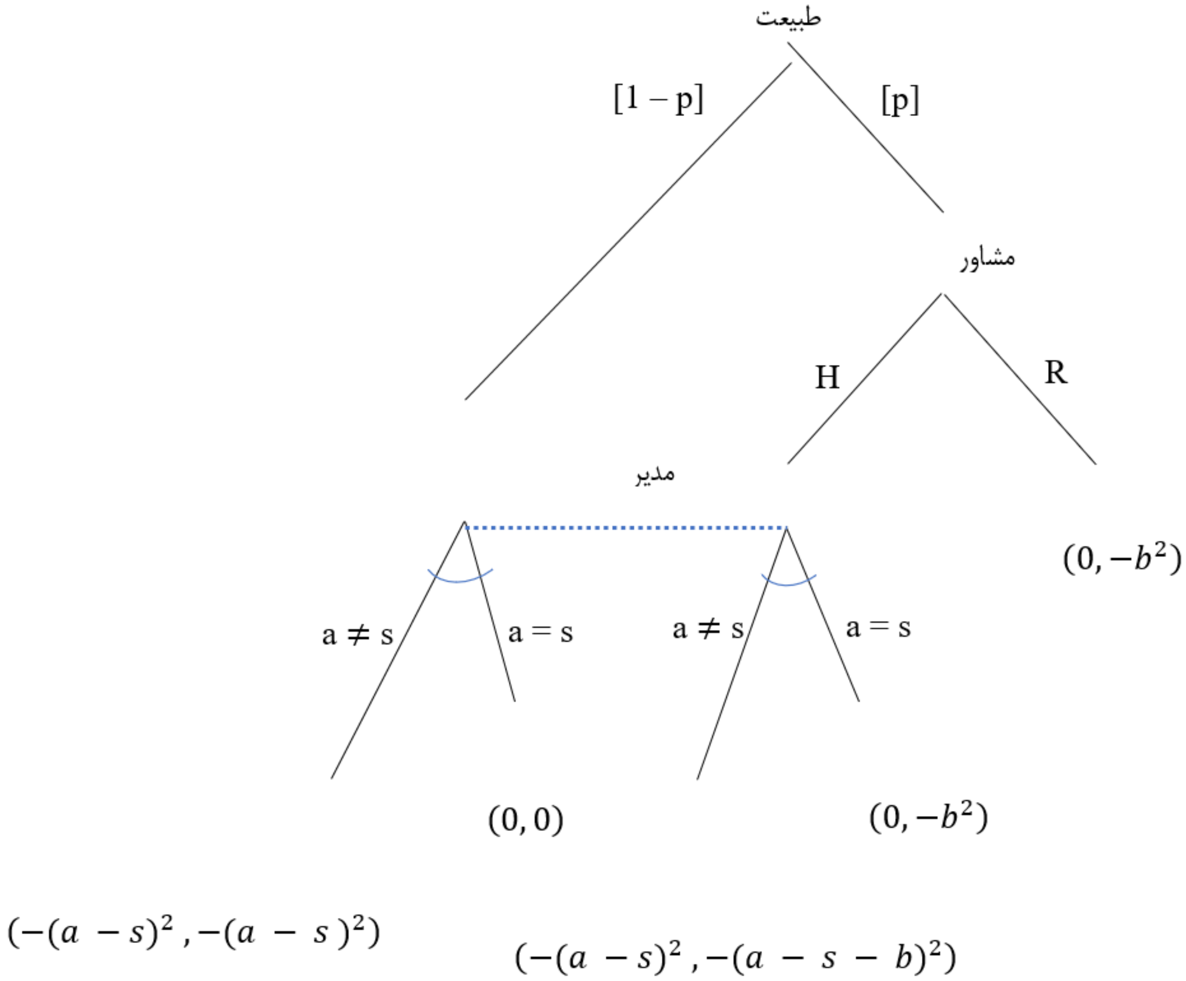
با دستگاه کردن سه معادله ۳و۷و۸ داریم:

$$p_1 = \sigma_1(S) = \frac{37+\sqrt{337}}{172}, p_2 = \sigma_2(SS) = 1 - \sigma_2(WW) = \frac{\sqrt{337}-17}{8}, p_3 = \sigma_3(I) = \frac{25+\sqrt{337}}{144}$$

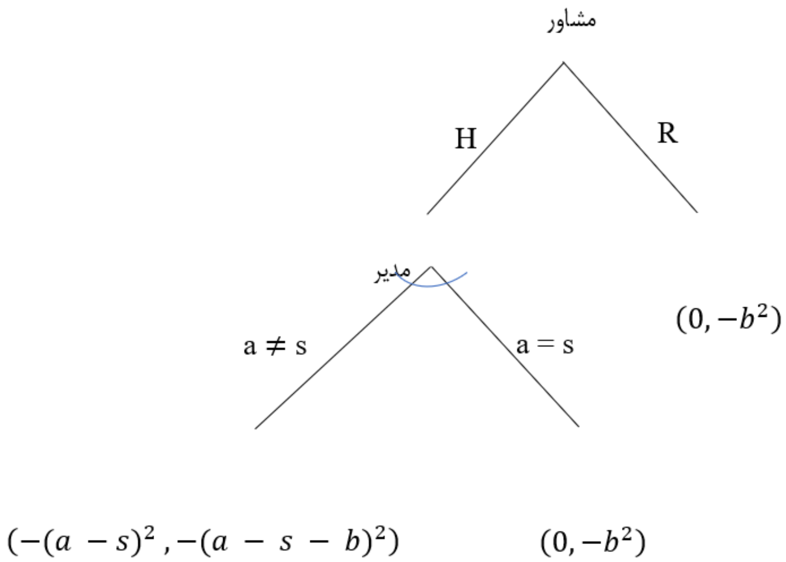
فصل ۳، تمرین ۱۶: علی امینی

الف)

نمودار درختی بازی در حالت کلی به‌صورت زیر است:



اما در این قسمت با فرض اینکه p = 1 است خواهیم داشت:



در این قسمت از سوال، p=1 است بنابراین مشاور همواره مقدار s را می‌بیند. تصمیم مدیر در حالتی که مشاور مقدار دیده‌شده را به او گزارش کند مشخص است ولی اگر مشاور این مقدار را از او پنهان کند، مدیر باید براساس مطلوبیت انتظاری خود تصمیم‌گیری کند.

مطلوبیت انتظاری مدیر برابر است با:

$$EU_1 = \int_{s_1}^{s_2} -(a-s)^2 f(s)ds = \frac{1}{3(s_2-s_1)}((a-s_2)^3-(a-s_1)^3)$$

$$= \frac{1}{3}((a-s_2)^2+(a-s_2)(a-s_1)+(a-s_1)^2)$$

تصمیم مدیر از حل مسئله حداکثرسازی مطلوبیت انتظاری وی برابر است با:

$$\frac{\partial EU_1}{\partial a} = \frac{1}{3}(2(a-s_2) + (a-s_2) + (a-s_1) + 2(a-s_1)) = 0$$

$$\boxed{a = \frac{s_1+s_2}{2}}$$

مشاور با دانستن مقدار a (چون می‌داند رفتار مدیر عقلایی است) و دیدن مقدار s، مطلوبیت خود از حرکت H را با مطلوبیت خود از حرکت R مقایسه می‌کند. یعنی:

$$U_2(H) = -\left(\frac{s_1+s_2}{2} - s - b\right)^2$$

$$= \boxed{-\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 - s^2 - b^2 + 2\frac{s_1+s_2}{2}s + 2\frac{s_1+s_2}{2}b - 2bs}$$

برای آنکه مشاور حرکت H را انجام دهد، باید مطلوبیت انتظاری او از این حرکت بیشتر از مطلوبیت او از حرکت R باشد:

$$EU_2(H) > U_2(R)$$

$$-\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 - s^2 - b^2 + 2\frac{s_1+s_2}{2}s + 2\frac{s_1+s_2}{2}b - 2bs > -b^2$$

$$s^2 + (2b - (s_1+s_2))\, s - (s_1+s_2)b + \left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 < 0$$

به‌ازای هر b و s که رابطه فوق برقرار شود، مشاور s را مخفی خواهد کرد (H را انجام می‌دهد).

ب) با توجه به روابط به‌دست آمده قسمت قبل با فرض b = 0 خواهیم داشت:

$$s^2 - 2\frac{s_1+s_2}{2}\,s + \left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 < 0$$

با توجه به اینکه رابطه فوق به‌ازای هیچ مقدار حقیقی s_1 و s_2 برقرار نمی‌شود، در این حالت مشاور **همواره** حرکت R را انجام می‌دهد، یعنی مقدار s را آشکار می‌کند.

ج) دوباره با توجه به رابطه به‌دست آمده در قسمت الف، داریم:

$$s^2 + (2b - (s_1+s_2))\,s - (s_1+s_2)b + \left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)^2 < 0$$

برای سادگی حل مسئله و بدون خدشه وارد کردن به عمومیت مسئله فرض می‌کنیم، بازه $[s_1, s_2]$ برابر با [۰, ۱] است.

$$s^2 + 2(b - \frac{1}{2})\,s - b + \frac{1}{4} < 0$$

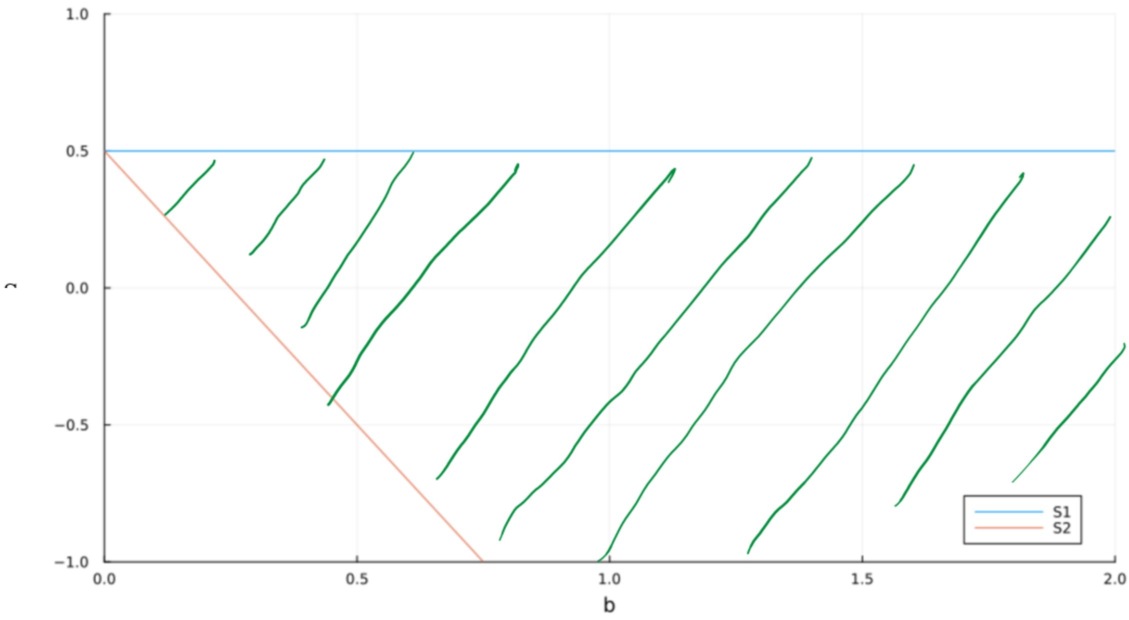
$$s^2 + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)s - \frac{1}{2}\left(2b - \frac{1}{2}\right) < 0$$

معادله سمت چپ را بر حسب s تعیین علامت می‌کنیم:

$$s = \frac{-2\left(b-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(2b-\frac{1}{2}\right)}}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} - 2b < s < \frac{1}{2}}$$

مکان هندسی نقاطی که بین دو ریشه قرار دارند، عبارت مورد نظر را منفی می‌کنند، بنابراین با رسم شکل، ناحیه هاشور خورده عبارت فوق برقرار است و در نتیجه مشاور مخفی کردن (H) را ترجیح می‌دهد. در غیر اینصورت آشکار کردن (R) را ترجیح می‌دهد. همچنین مشخص است که تعادل منحصر به فردی وجود ندارد.



د)

نمودار بازی در این حالت در قسمت الف ترسیم شده‌است. با توجه به اینکه مطلوبیت مدیر در هر دو گره مجموعه اطلاعاتی‌اش یکسان است، بنابراین به‌ازای هر باوری مطلوبیت انتظاری‌اش مانند قسمت‌های قبل است و کماکان مانند قبل a را انتخاب می‌کند.

$$\boxed{a = \frac{s_1 + s_2}{2}}$$

اما مطلوبیت انتظاری مشاور در این دو حالت متفاوت است؛ در حالتی که مقدار s رابببند ولی آن را مخفی کند، مطلوبیت او مانند قسمت قبل است و در حالتی که s را نبیند، مطلوبیت انتظاری او مشابه مدیر است.

$$EU_2(Not\ \ observe) = \int_{s_1}^{s_2} -(a-s)^2 f(s)ds \ = \frac{1}{3(s_2 - s_1)}\left((a-s_2)^3 - (a-s_1)^3\right)$$

$$= \frac{-1}{3}\left((a-s_2)^2 + (a-s_2)(a-s_1) + (a-s_1)^2\right)$$

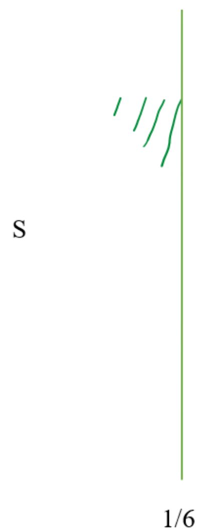
$$= \frac{-1}{3}\left(\left(\frac{s_1+s_2}{2} - s_2\right)^2 + \left(\frac{s_1+s_2}{2} - s_2\right)\left(\frac{s_1+s_2}{2} - s_1\right) + \left(\frac{s_1+s_2}{2} - s_1\right)^2\right)$$

$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{s_1 - s_2}{2}\right)^2$$

برای سادگی حل مسئله و بدون خدشه وارد کردن به عمومیت مسئله فرض می‌کنیم، بازه [s1, s2] برابر با [۰, ۱] است.

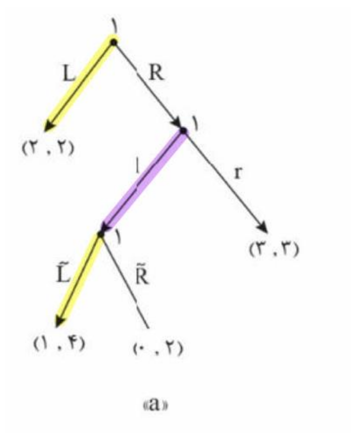
$$EU_2(Not\ \ observe) = EU_1(Not\ \ observe) = \left(\frac{-1}{12}, \frac{-1}{12}\right)$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که طبیعت مقدار s را به مشاور نشان داده‌است. با استفاده از نمودار قسمت قبل مشخص است که مشاور در قسمت هاشور زده شده، مقدار s را مخفی می کند (H) و در غیر اینصورت آشکار می‌کند (R) را بازی می‌کند و انگیزه انحراف ندارد.

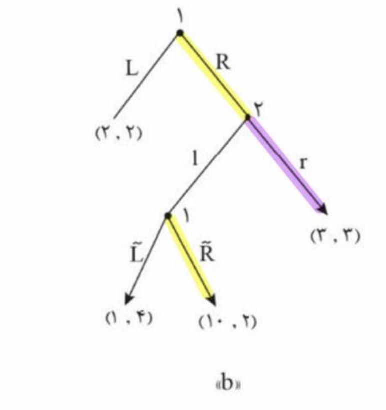


فصل ۳، تمرین ۱۷: مرضیه علی‌اکبرپور

الف) باتوجه به اینکه بازی اطلاعات کامل است، با استنتاج پس‌رو تمام تعادل‌های کامل زیربازی‌ها را بدست می‌آوریم. درخت بازی a شامل ۳ زیر درخت مناسب است.

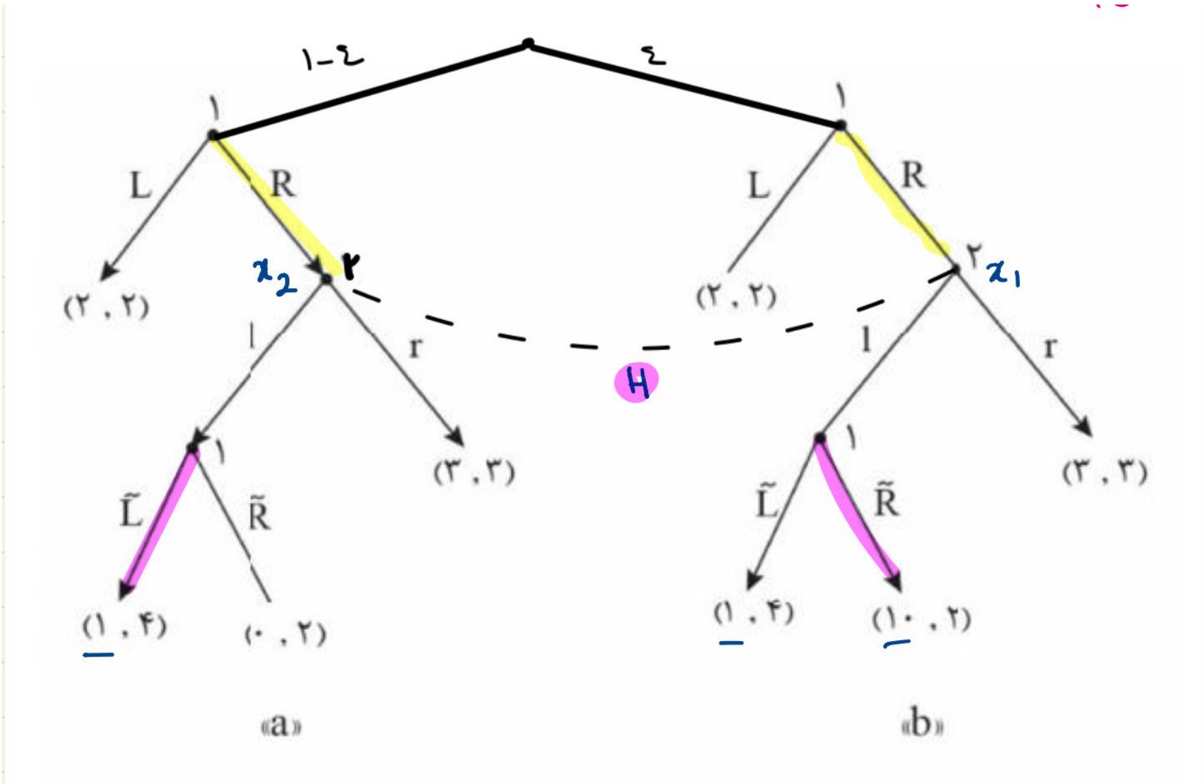


ب) مشابه قسمت قبل تعادل‌های کامل زیربازی‌های درخت b را بدست می‌آوریم.



۱
L
R
(۲ , ۲)
۲
l
r
۱
(۳ , ۳)
L̃
R̃
(۱ , ۴)
(۱۰ , ۲)
«b»

ج)



۱-ع
ع
۱
۱
L
R
L
R
x_2 ۲
(۲ , ۲)
(۲ , ۲)
۲ x_1
l
r
l
r
H
۱
(۳ , ۳)
۱
(۳ , ۳)
L̃
R̃
L̃
R̃
(۱ , ۴)
(۰ , ۲)
(۱ , ۴)
(۱۰ , ۲)
«a»
«b»

«نمودار ۳. ۲۹»

$$\sigma_1(R\mid a) \text{ or } \sigma_1(R\mid b) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = \mu(x_2\mid H) = \frac{(1-\varepsilon)\,\sigma_1(R\mid a)}{(1-\varepsilon)\,\sigma_1(R\mid a) + \varepsilon\,\sigma_1(R\mid b)}$$

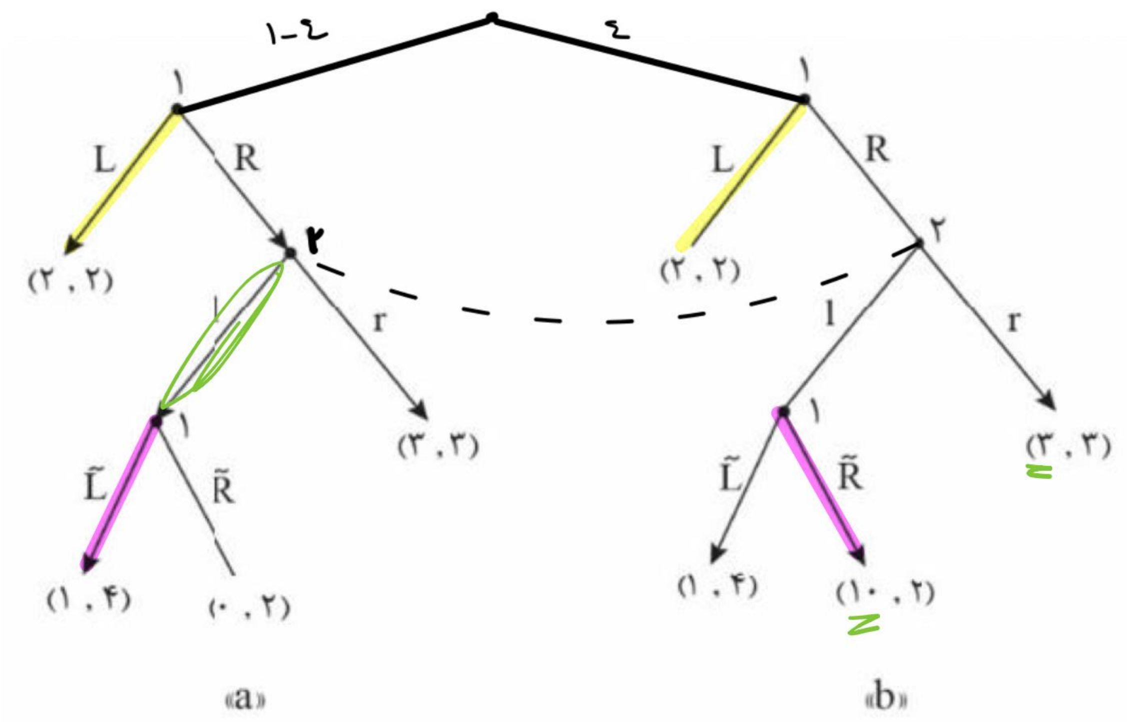
$$u_2(l\mid\mu) = \mu\times 4 + (1-\mu)\times 2 = 2 + 2\mu$$

$$u_2(r\mid\mu) = \mu\times 3 + (1-\mu)\times 3 = 3$$

$$\mu > \frac{1}{2}: \quad u_2(l\mid\mu) > u_2(r\mid\mu)$$

طبیعت			بازیگر 1			
			LL	LR	RL	RR
$Prob\,[1-\varepsilon]: a$	بازیگر 2	l	(2, 2)	(2, 2)	(1, 4)	(0, 2)
		r	(2, 2)	(2, 2)	(3, 3)	(3, 3)

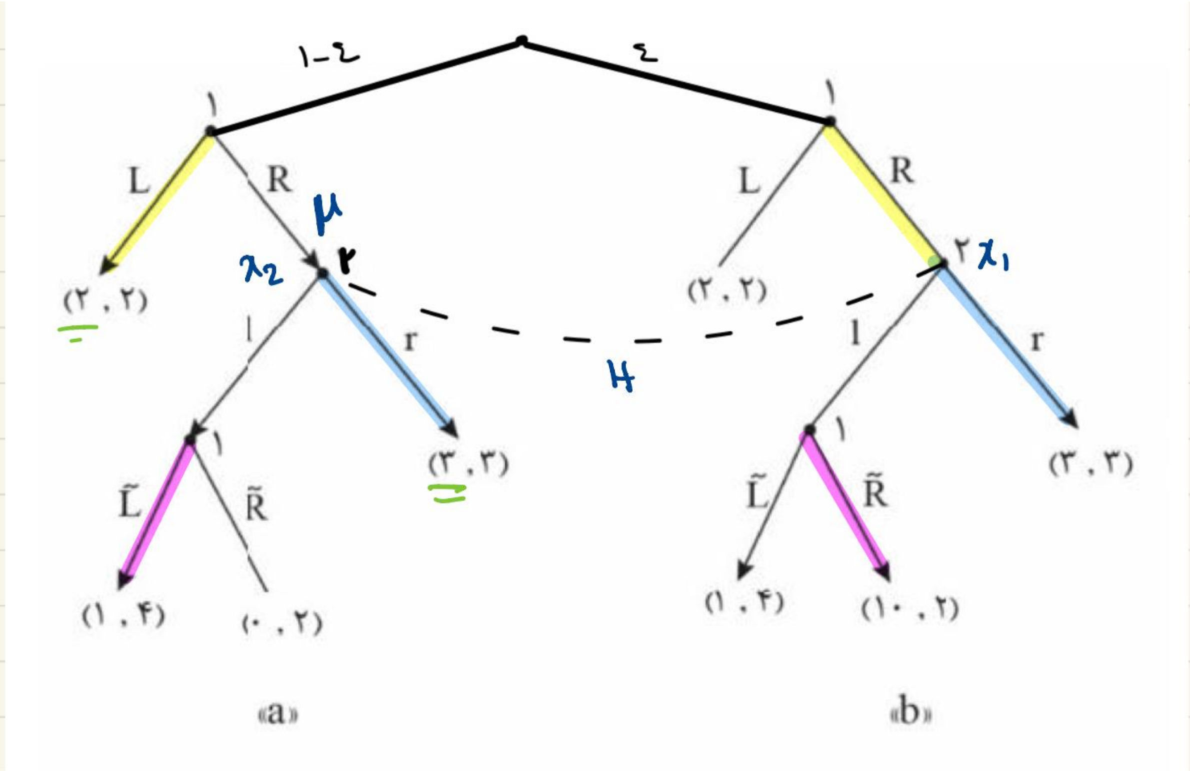
طبیعت			بازیگر 1			
			LL	LR	RL	RR
$Prob\,[\varepsilon]: b$	بازیگر 2	l	(2, 2)	(2, 2)	(1, 4)	(10, 2)
		r	(2, 2)	(2, 2)	(3, 3)	(3, 3)



«نمودار ۳. ۲۹»

$$\sigma(l) + 3 \times (1 - \sigma(l)) < 2 \longrightarrow \frac{1}{2} < \sigma(l)$$

$$10\,\sigma(l) + 3(1 - \sigma(l)) < 2 \longrightarrow \sigma(l) < 0$$

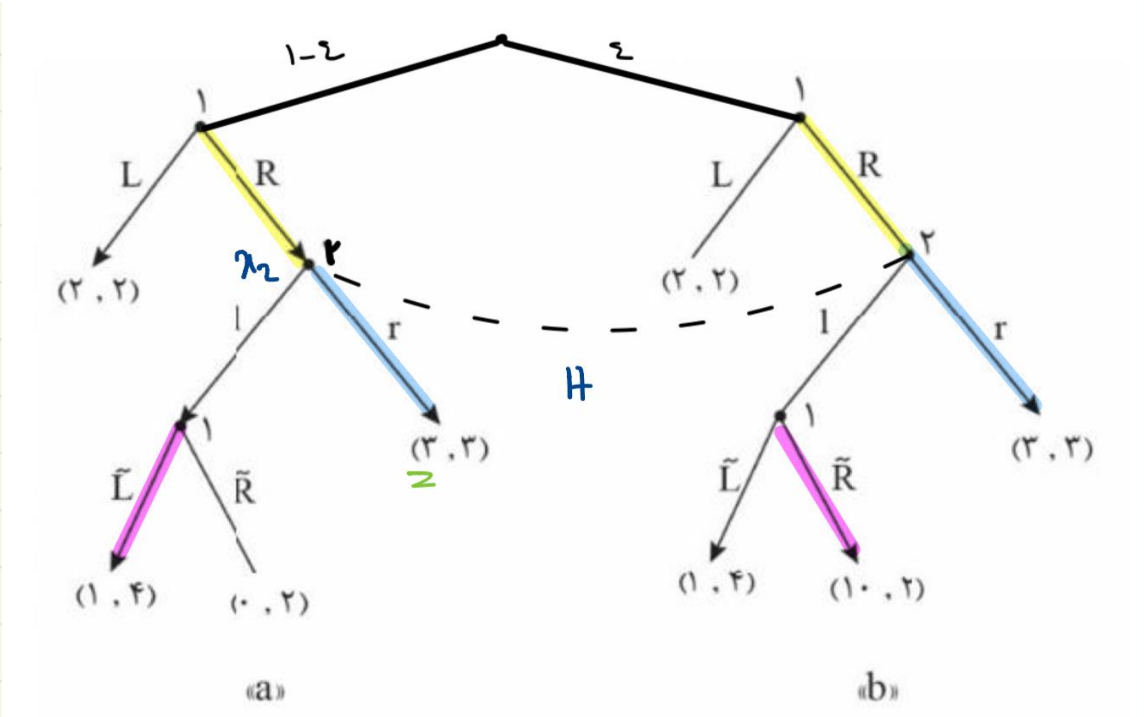


«نمودار ۳. ۲۹»

$$\mu(x_1|H) = \frac{\varepsilon\, \overset{1}{\cancel{\sigma(R|b)}}}{\varepsilon\, \underset{1}{\cancel{\sigma(R|b)}} + (1-\varepsilon)\,\sigma(R|a)} = 1$$

$$\mu(x_2|H) = \mu = 0 < \frac{1}{2}$$

انگیزه تخطی برای بازیکن اول وجود دارد.

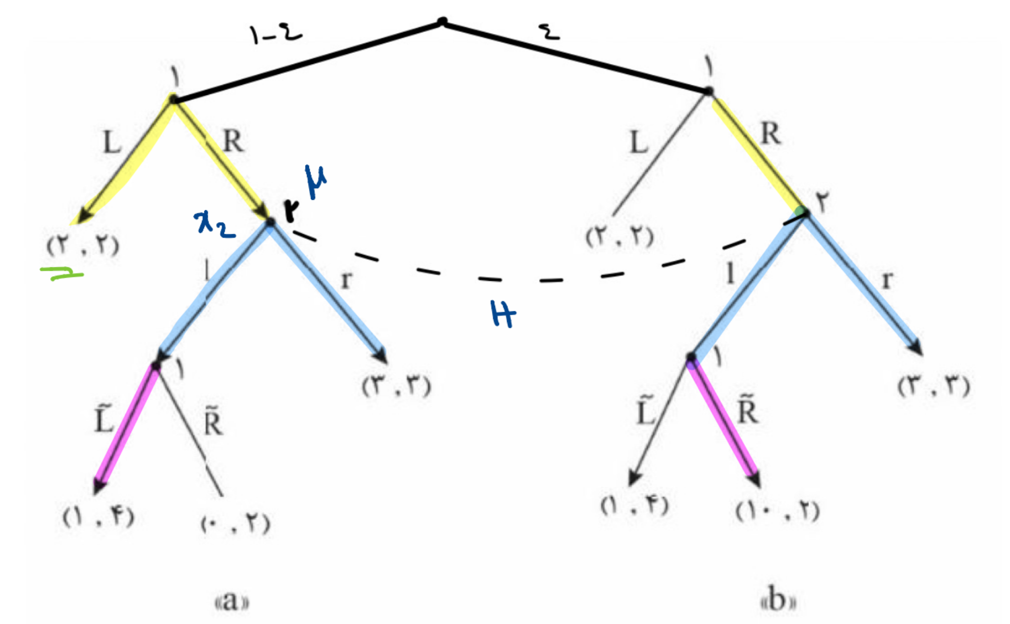


«نمودار ۳. ۲۹»

$$\mu(x_2 \mid H) = \frac{\sigma(R \mid a)(1-\varepsilon)}{\sigma(R \mid a)(1-\varepsilon) + \varepsilon\, \sigma(R \mid b)} = 1-\varepsilon$$

$$\varepsilon > 1/2 \Rightarrow \mu < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sigma_1(R \mid a,b) = 1, \quad \sigma(r) = 1, \quad \mu = 1-\varepsilon}$$



«نمودار ۳. ۲۹»

$$\mu(x_2 \mid H) = \frac{(1-\varepsilon)\,\sigma(R \mid a)}{(1-\varepsilon)\,\sigma(R \mid a) + \varepsilon}$$

$$\sigma_2(l) \times 1 + (1-\sigma_2(l)) \times 3 = 2 \longrightarrow \sigma_2(l) = \frac{1}{2}$$

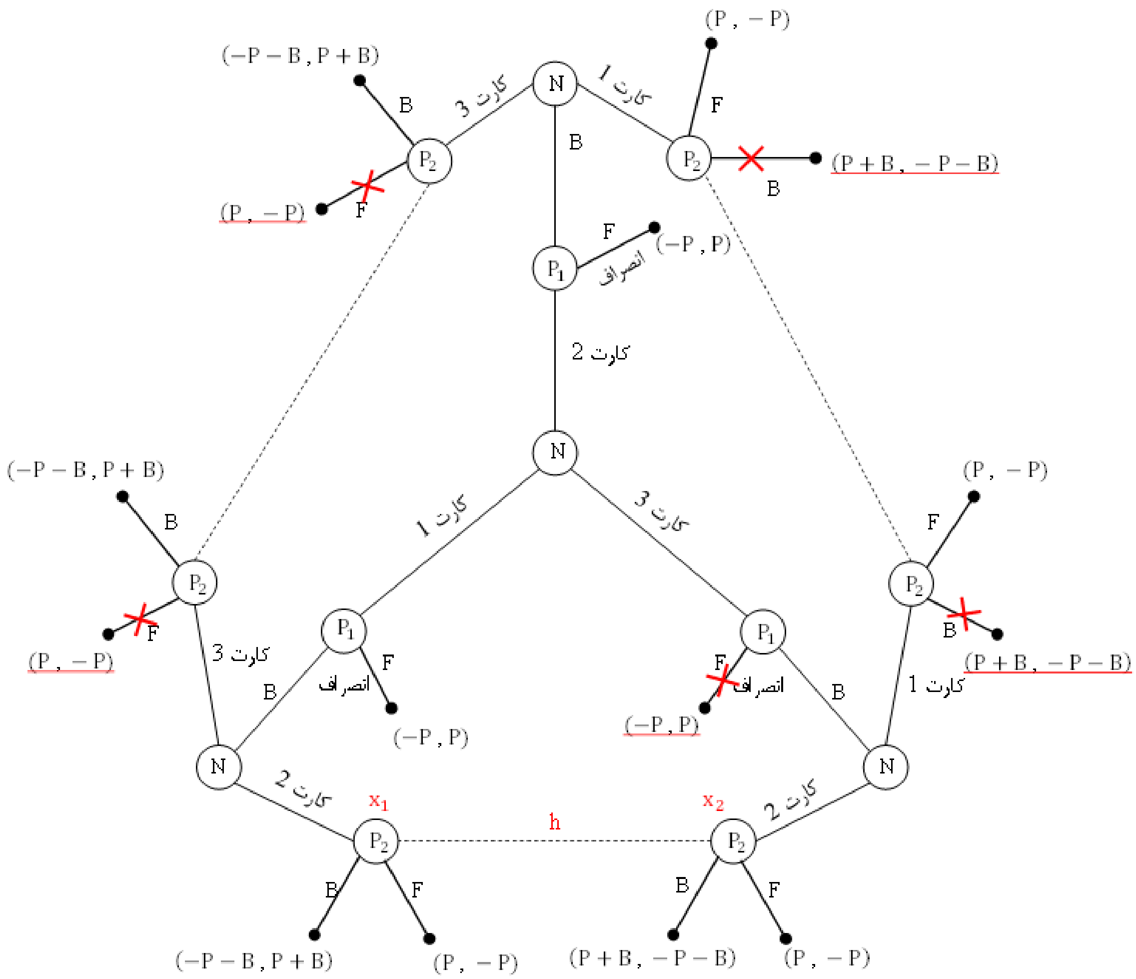
$$\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma(R \mid a) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$\sigma_1(R \mid a) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \sigma_1(R \mid b) = 1,\ \sigma_2(l) = \frac{1}{2},\ \mu = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_1(R \mid a) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} > 1$$

فصل ۳، تمرین ۱۸: فاطمه اصغری

در ابتدا همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، حرکات اکیداً مغلوب را حذف می‌کنیم.



در صورتی که بازیگر ۲ کارت شماره یک را در اختیار داشته باشد، هیچ‌گاه حرکت B را انتخاب نخواهد کرد، در این صورت اگر بازیگر ۱ کارت شماره ۳ را در اختیار داشته باشد که حتما B را انتخاب می‌کند و اگر کارت شماره ۲ را در اختیار داشته باشد، نیز بنا به استدلال زیر B را انتخاب خواهد کرد.

$$EU_1(F) = -P$$

$$EU_1(B) = \frac{1}{2}[-P-B] + \frac{1}{2}[P] = \frac{-B}{2}$$

می دانیم $B < 2P \implies \frac{-B}{2} > -P \implies$ Player chooses B

در صورتی که بازیگر ۲ کارت شماره سه را در اختیار داشته باشد، هیچ‌گاه حرکت F را انتخاب نخواهد کرد، در صورتی که بازیگر ۱ کارت شماره ۲ را داشته باشد که بنا به استدلال قبل B را انتخاب می‌کند، و در صورتی که کارت شماره یک را داشته باشد، انگیزه دارد که از B تخطی کرده و F را انتخاب کند.

حال باید بگوییم که در مجموعه اطلاعاتی h چه اتفاقی می‌افتد.

بسته به باور بازیگر ۲ در مجموعه اطلاعاتی h می‌توان تعادل داشت. اگر باور بازیکن ۲ این باشد که بازیکن ۱ کارت سه را دارد او F را انتخاب می‌کند (در صورتی که بازیگر یک کارت ۳ را در اختیار داشته باشد همواره B را انتخاب می‌کند). اگر باور بازیکن ۲ این باشد که بازیکن ۱ کارت شماره یک را دارد او B را انتخاب می‌کند، در این شرایط بازیگر یک در صورت داشتن کارت شماره یک انگیزه تخطی دارد و می‌خواهد F را انتخاب کند، بر این اساس در مجموعه اطلاعاتی h که بازیکن ۲ کارت ۲ را دارد:

- $\sigma_1(B|\text{card } 1) = q \quad \sigma_2(B|h) = r$
- Bayes rule: $\mu(x_1|h) = \dfrac{q}{q+1}$
- $U_1(B|\text{card } 1) = \dfrac{1}{2}(-P-B) + \dfrac{1}{2}(r(-P-B) + (1-r)P)$

بازیگر ۲ در h، حرکت B را انتخاب می‌کند، اگر و تنها اگر:

$$U_2(B|h) > U_2(F|h) \implies -P > \mu(P+B) - (1-\mu)(P+B) \implies \mu(x_1|h) > \frac{B}{2(P+B)} = \bar{\mu}$$

$$\bar{\mu} = \frac{B}{2(P+B)} < \frac{B}{B+2B} = \frac{1}{3}$$

حالت ۱: $\mu > \bar{\mu}$

- بازیگر ۲، B را بازی می‌کند $(r = 1)$
- بازیگر ۱، F را بازی می‌کند $(q = 0)$
- $q = 0 \leftarrow \mu = 0 \leftarrow$ بازیگر دو F را ترجیح می‌دهد! (contradiction!!!)

حالت ۲: $\mu < \bar{\mu}$

- بازیگر ۲، F را بازی می‌کند $(r = 0)$
- بازیگر ۱، B را بازی می‌کند $(q = 1)$
- $q = 1 \leftarrow \mu = 0.5 \leftarrow$ اما می‌دانیم $\bar{\mu} < \frac{1}{3}$ است و بازیگر دو B را ترجیح می‌دهد! (contradiction!!!)

حالت ۳: $\mu = \bar{\mu}$

- بازیگر ۲ بی‌تفاوت است، او به گونه‌ای بازی می‌کند که بازیگر ۱ بی‌تفاوت شود.

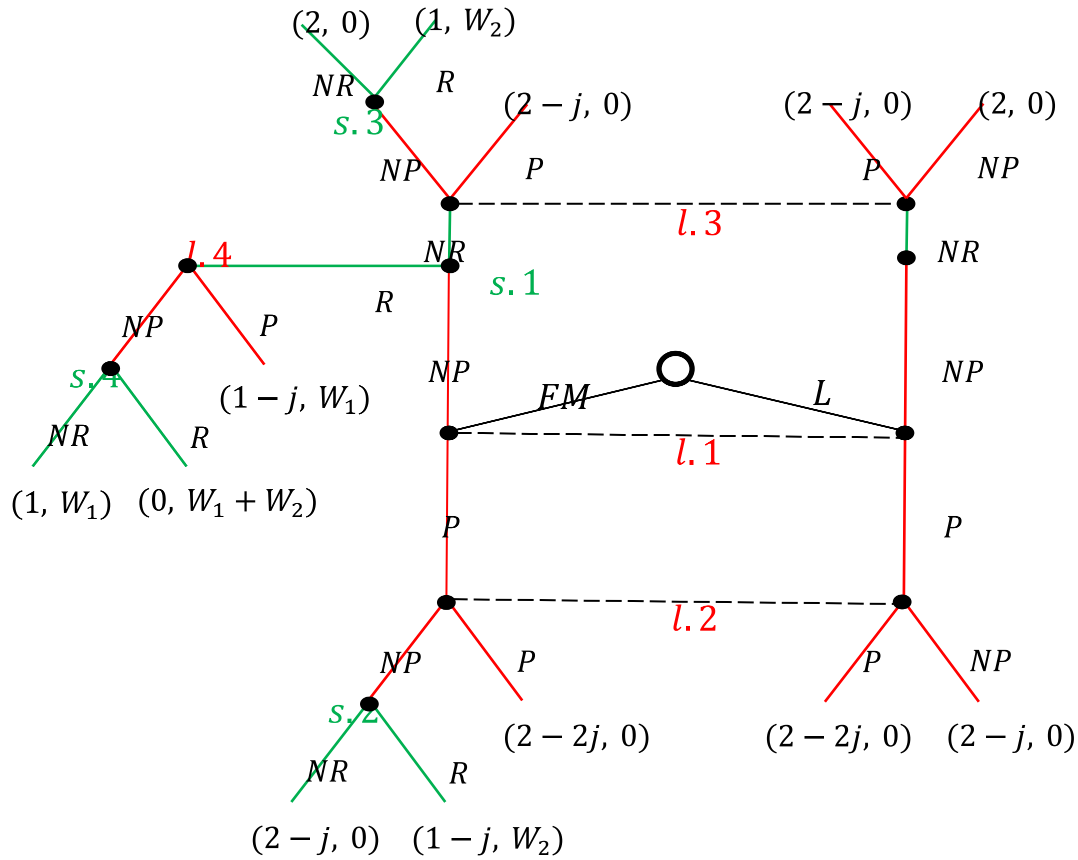
$$U_1(B|\text{type }1) > U_1(F|\text{type }1) \longrightarrow r = \frac{2P-B}{2P+B}$$

$$\mu = \bar{\mu} \longrightarrow \frac{q}{1+q} = \frac{B}{2(P+B)} \longrightarrow q = \frac{B}{2P+B}$$

فصل ۳، تمرین ۱۹: محمدصدرا حیدری

قسمت الف)

از آنجا که در هر دو مرحله کارگر از نوع $\theta = 1$ اســت، نمایش درختی بازی را رســم می‌کنیم. در این نمایش ابتدا طبیعت تصمیم می‌گیرد بازرس طرفدار بازار آزاد (FM) یا طرفدار حقوق کارگر (L) باشد. حرکات کارگر با رنگ



قرمز و حرکات سرپرست با رنگ سبز مشخص‌شده است.

گزارش کردن (R) برای ســرپرســت در گره تصــمیم‌گیری $s.4$ مطلوبیت بیشــتری از عدم گزارش (NR) دارد. بنابراین کارگر که عاقل است می‌داند مطلوبیتش به‌ازای عدم هزینه (NP) در گره تصمیم‌گیری $l.4$ کمتر از هزینه

کردن می‌باشد. بنابراین در این گره هزینه را پرداخت می‌کند (P) که باعث می‌شود مطلوبیت سرپرست از گزارش کردن در گره تصمیم‌گیری $s.1$ برابر با W_1 شود.

با استدلال بالا سرپرست در گره تصمیم‌گیری $s.3$ حتما گزارش می‌کند. با اعمال قانون بیز در گره تصمیم‌گیری $l.3$، کارگر باور دارد با احتمال $1-S$ بازرس طرفدار بازار آزاد است. بنابراین مطلوبیت انتظاری از حرکاتش در گره $l.3$ به شرح زیر خواهد بود:

$$U_1(P|l.3) = S(2-j) + (1-S)(2-j) = 1 + (1-j)$$
$$U_1(NP|l.3) = 2S + (1-S) = S + 1 = 1 + S$$

از آنجا که طبق گفته سؤال $S < 1 - j$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که مطلوبیت پرداخت هزینه برای کارگر در گره تصمیم‌گیری $l.3$ بیشتر از عدم پرداخت هزینه است و در این گره کارگر حتما حرکت P را بازی می‌کند که در نتیجه باعث می‌شود مطلوبیت گزارش کردن در گره $s.1$ برای سرپرست بیشتر از گزارش نکردن شود و انگیزه انحراف در این گره نداشته باشد.

حال انگیزه انحراف کارگر از عدم پرداخت هزینه در گره $l.1$ را بررسی می‌کنیم. مشابه استدلال بالا می‌دانیم سرپرست در گره تصمیم‌گیری $s.2$ گزارش کردن را انتخاب می‌کند. بنابراین مطلوبیت کارگر از حرکاتش در گره تصمیم‌گیری $l.2$ برابر است با:

$$U_1(P|l.2) = S(2-2j) + (1-S)(2-2j) = (1-j) + (1-j)$$
$$U_1(NP|l.2) = S(2-j) + (1-S)(1-j) = 1 + S - j = (1-j) + S$$

از آنجا که طبق گفته سؤال $S < 1 - j$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که مطلوبیت پرداخت هزینه برای کارگر در گره تصمیم‌گیری $l.2$ بیشتر از عدم پرداخت هزینه است و در این گره کارگر حتما حرکت P را بازی می‌کند. بنابراین مطلوبیت کارگر از انتخاب حرکت P در گره تصمیم‌گیری $l.1$ برابر با $2(1-j)$ خواهد بود.

کارگر که می‌داند سرپرست در گره تصمیم‌گیری $s.1$ نوع او را گزارش می‌کند، نتیجه می‌گیرد وقتی به گره تصمیم‌گیری $l.3$ می‌رسد که سرپرست طرفدار حقوق کارگر باشد. بنابراین در گره $l.3$ عدم پرداخت را انتخاب می‌کند. در نتیجه مطلوبیت کارگر از عدم پرداخت در گره $l.1$ برابر می‌شود با:

$$U_1(NP|l.1) = 2S + (1-S)(1-j) = (1+S)(1-j)$$

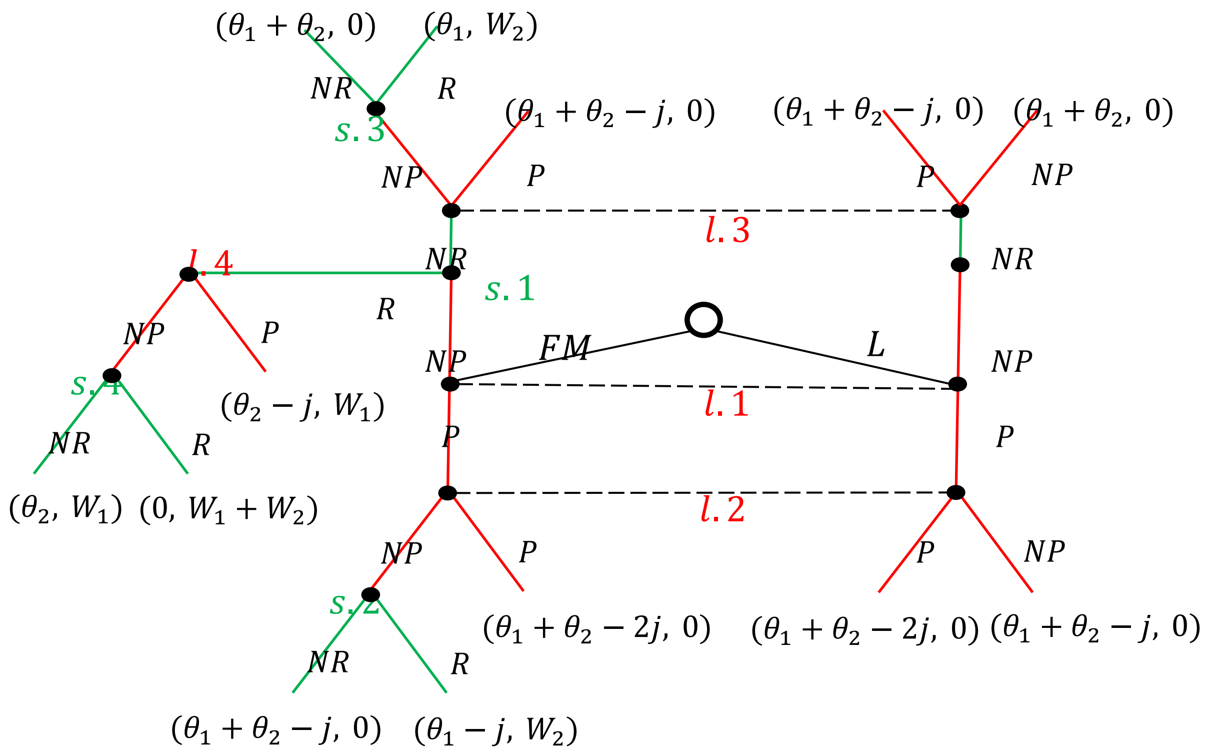
در نتیجه تنها زمانی کارگر در مرحله اول تصمیم می‌گیرد پرداخت نکند که شرط زیر برقرار باشد:

$$(1+S)(1-j) > 2(1-j) \Rightarrow \begin{cases} j = 1 \Rightarrow S < 0 \\ 1 + S > 2 \Rightarrow S > 1 \end{cases}$$

که امکان‌پذیر نبوده و چنین تعادلی وجود ندارد.

قسمت ب)

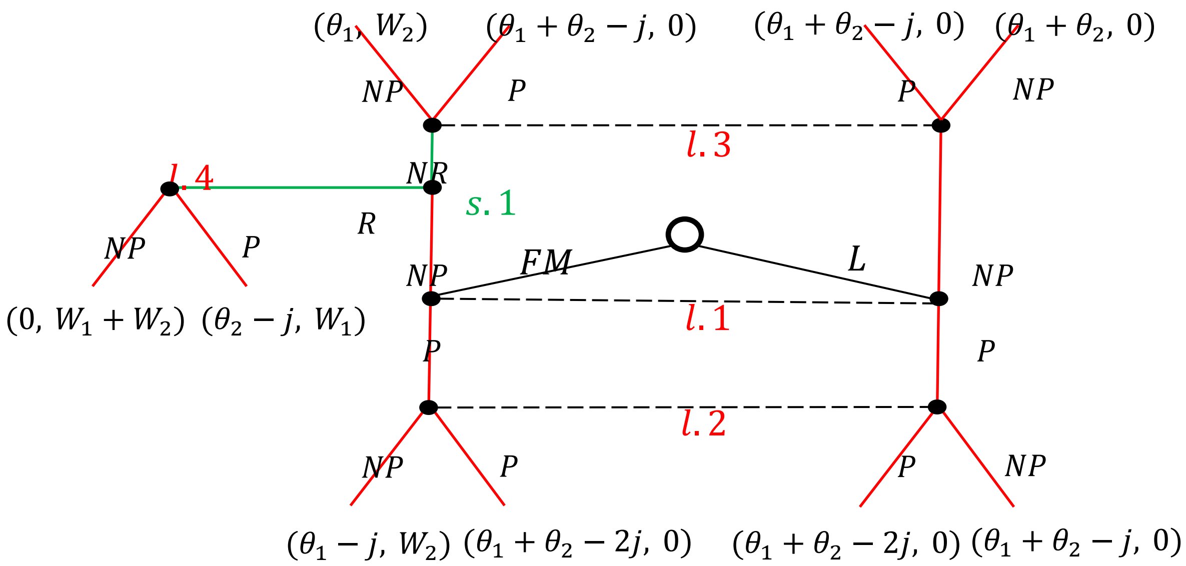
نمایش درختی بازی در حالت کلی به شرح زیر است:



همانطور که در شکل بالا مشخص است، پیامد استراتژی‌ها وابسته به نوع کارگر در هرکدام از مراحل است. می‌دانیم در کل ۴ حالت برای این بازی قابل تصور است. ماتریس احتمال ρ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_{ij} = \Pr(\theta_1 = i, \theta_2 = j)\,, \qquad i,j \in \{0,1\}$$

از آن‌جا که $W_1, W_2 > 0$ می‌دانیم در گره‌های تصمیم‌گیری $s.2$، $s.3$ و $s.4$ بازرس حتما نوع کارگر را گزارش می‌کند. بنابراین می‌توان نمایش جدولی بازی را به شکل زیر ساده کرد:



در گره تصـــمیم‌گیری $l.4$ با فرض $j>0$ اگر نوع کارگر $\theta_2=0$ باشـــد، کارگر هزینه نکرده و در غیر این صورت حتما هزینه می‌کند. همچنین در گره تصمیم‌گیری $l.3$ اگر نوع کارگر $\theta_2=0$ باشد مطلوبیت هزینه نکردن برابر با θ_1 و مطلوبیت هزینه کردن برابر با θ_1-j خواهد شد بنابراین در این حالت نیز کارگر هزینه نمی‌کند.

می‌دانیم در گره‌های تصـــمیم‌گیری $s.2$، $s.3$ و $s.4$ بازرس حتما نوع کارگر را گزارش می‌کند. بنابراین به‌ازای حالات مختلف وجود تعادل را بررسی می‌کنیم:

- $\boldsymbol{\theta_1=0}$
  - $\theta_2=0$

در این حالت هزینه کردن برای بازیگر در هر دو مرحله حرکت مغلوب اســت. بنابراین مســتقل از بازی بازرس در هرمرحله عدم هزینه را انتخاب می‌کند و در نتیجه در گره‌های $l.2$، $l.3$ و $l.4$ حرکت NP را انتخاب می‌کند.

  - $\theta_2=1$

کارگر در گره $l.4$ حتما هزینه می‌کند. در گره $l.3$ اگر کارگر با احتمال μ_3 باور داشـته باشـد که بازرس طرفدار بازار آزاد است، مطلوبیت حاصل از حرکاتش برابر می‌شود با:

$$U_1(P|l.3,\mu_3)=1-j,\qquad U_1(NP|l.3,\mu_3)=1-\mu_3$$

بنـابراین بـه‌ازای $\mu_3>j$ پرداخت کرده، $\mu_3=j$ بی‌تفاوت شـــده و $\mu_3<j$ هزینـه پرداخت نمی‌کند.

در گره $l.2$ از آنجا که حرکات بازرس تاثیری در باور کارگر ندارد، کارگر باور دارد با احتمال S در بازرس طرفدار حقوق کارگر است. بنابراین مطلوبیت انتظاری از حرکاتش به شرح زیر است:

$$U_1(P|l.2) = 1 - 2j, \qquad U_1(NP|l.2) = S(1-j) - j(1-S) = S - j$$

از آنجا که $S < 1 - j$ نتیجه می‌گیریم $1 - 2j > S - j$ بنابراین در این گره کارگر حتما پرداخت می‌کند.

حال بازرس که واکنش کارگر درازای حالات مختلف را می‌داند، برای آنکه بتواند در گره $s.1$ میان حرکاتش ترکیب کند باید بین آن‌ها بی‌تفاوت باشد. با فرض این احتمال ۰ بودن نوع بازیگر در مرحله دوم به شرط ۰ بودنش در مرحله اول برابر با x باشد، مطلوبیت حرکات بازرس در گره $s.1$ را بررسی می‌کنیم.

$$U_2(R|s.1, x) = x(W_1 + W_2) + (1 - x)W_1 = W_1 + xW_2$$

همچنین فرض می‌کنیم بازرس با احتمال t حرکت NR را در گره $s.1$ انتخاب می‌کند.

$$\Rightarrow \mu_3 = \frac{(1-S)t}{S + (1-S)t} \Rightarrow \mu_3 \in (0, 1 - S)$$

در حالتی که $\theta_1 = 0$ شود کارگر در $l.1$ حرکت NP را انتخاب می‌کند. چرا که اگر بازرس در گره $s.1$ حرکت NR را بازی کند مطلوبیت‌های همه انتخاب‌ها در گره $l.3$ بیشتر از گره $l.2$ خواهد بود و اگر حرکت R را انتخاب کند بدون هزینه توانسته نوع بازرس را شناسایی کرده و بیشینه مطلوبیت خود در این حالت را به‌دست آورد.

می‌دانیم کارگر از $\theta_2 = 0$ هزینه‌ای پرداخت نمی‌کند. در غیر این صورت و اگر $\theta_2 = 1$ به‌ازای باورهای مختلف کارگر در گره $l.3$ داریم:

- $\mu_3 > j$

$$U_2(NR|s.1, x) = xW_2 + (1 - x) \times 0 = xW_2$$

بنابراین در این حالت مطلوبیت گزارش کردن بیشتر از عدم گزارش است و امکان ترکیب وجود ندارد.

- $\mu_3 < j$

$$U_2(NR|s.1, x) = xW_2 + (1 - x)W_2 = W_2$$

در این حالت فقط زمانی ترکیب می‌کند که

$$x = 1 - \frac{W_1}{W_2} \Rightarrow_{W_1 < 0.9W_2} x > 0.1 \Rightarrow \rho_{00} > 0.01$$

- $\mu_3 = j$

فرض می‌کنیم کارگر در گره $l.3$ با احتمال r حرکت NP را بازی کند:

$$U_2(NR|s.1, x) = xW_2 + (1 - x)rW_2 = W_2(x + r - rx)$$

در این حالت بازرس زمانی ترکیب می‌کند که:

$$W_1 + xW_2 = W_2(x + r - rx) \Rightarrow r = \frac{W_1}{W_2(1-x)}$$

بنابراین در حالت $\theta_1 = 0$ چنین تعادلی وجود دارد.

- $\boldsymbol{\theta_1 = 1}$
  - $\theta_2 = 0$

مانند حالت قبل در این مرحله هزینه کردن مغلوب است و کارگر حرکت NP را در گره‌های $l.2$، $l.3$ و $l.4$ بازی می‌کند.

  - $\theta_2 = 1$

کارگر در $l.4$ حتما هزینه می‌کند.

در گره $l.2$ با همان استدلال قبلی می‌توان نشان داد که هزینه کردن غالب است و هزینه می‌کند.

در گره $l.3$ اگر باور داشته باشد با احتمال μ_3 بازرس طرفدار بازار آزاد است داریم:

$$U_1(P|l.3, \mu_3) = 2 - j, \qquad U_1(NP|l.3, \mu_3) = \mu_3 + 2(1 - \mu_3) = 2 - \mu_3$$

بنابراین به‌ازای $\mu_3 > j$ پرداخت کرده، $\mu_3 = j$ بی‌تفاوت شده و $\mu_3 < j$ هزینه پرداخت نمی‌کند.

که شرایط مانند حالت $\theta_1 = 0$ است و درنتیجه می‌توان نشان داد اگر کارگر در $l.1$ عدم پرداخت را انتخاب کند، در ادامه تعادلی وجود دارد که در بازرس با احتمال t در گره $s.1$ گزارش نکند و باورها با حرکات سازگار باشند.

بنابراین کافی‌است نشان دهیم مطلوبیت انتظاری کارگر از حرکت NP در گره تصمیم‌گیری $l.1$ در حالت $\theta_1 = 1$ بیشتر از مطلوبیت حاصل از حرکت P خواهد بود.

- $\mu_3 < j$

$$U_1(P|l.1) = x[1 - j] + (1 - x)[S(2 - 2j) + (1 - S)(2 - 2j)]$$

$$U_1(NP|l.1) = x[S + (1 - S)t] + (1 - x)\big[S(2 - j) + (1 - S)\big(t(2 - j) + (1 - t)(1 - j)\big)\big]$$

به‌ازای $t > 1 - j$ داریم:

$$U_1(P|l.1) < U_1(NP|l.1)$$

که شرط تعادل را فراهم می‌کند.

در نهایت نشان دادیم وجود چنین تعادلی ممکن است.

برای حالت خاص بررسی کنید به‌ازای مقادیر زیر تعادل بیزی وجود دارد یا نه

$$\begin{cases} j = 0.6 \\ S = 0.3 \\ t = 0.5 \end{cases}$$

فصل چهارم: بازی‌های تکرارشونده

فصل ۴، سوال ۱: سپیده عبداللهی

الف)

بازیگر ۲ / بازیگر ۱		p_1	p_2	$1-p_1-p_2$
		a_2	b_2	x_2
q_1	a_1	(4,4)	(1,6)	(0,5)
q_2	b_1	(6,1)	(-3,-3)	(-4,-4)
$1-q_1-q_2$	x_1	(5,0)	(-4,-4)	(-5,-5)

دو تعادل نش محض: $(b_1,a_2)\,,(a_1,b_2)$

تعادل ترکیبی: حرکات x_1 و x_2 مغلوب اکیداند پس $p_2=1-p_1$ و $q_2=1-q_1$. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{aligned}U_1(a_1)=4p_1+p_2=1+3p_1\\ U_1(b_1)=6p_1-3p_2=9p_1-3\end{aligned}\right\}\rightarrow 1+3\mathrm{p}_1=9p_1-3\rightarrow p_1=\frac{2}{3}$$

از آن جایی که پیامدهای بازی برای هر دو بازیگر یکسان‌اند به همین روش برای بازیگر ۲، $q_1=\frac{2}{3}$ حاصل می‌شود.

کم‌ترین بیشینه مطلوبیت: به دلیل این که در بازی حرکت اکیدا مغلوب وجود دارد، برای مثال بازیگر ۱ هرگز x_1 را انتخاب نمی‌کند. پس داریم:

$$U_1(a_1)=4p_1+p_2+0$$
$$U_1(b_1)=10p_1+p_2-4$$

کمینه مطلوبیت a_1 برای بازیگر ۱ برابر با ۰ است و کمینه مطلوبیت b_1 برای بازیگر ۱ برابر با ۴- منفی است. پایین‌ترین سطح مطلوبیتی که بازیگر ۲ می‌تواند به بازیگر ۱ تحمیل کند $\underline{V_1}=0$ است. طبق تقارن پیامدهای بازی، برای بازیگر ۲ نیز همین نتیجه ($\underline{V_2}=0$) حاصل می‌شود.

ب)

به دلیل این که a_1 و a_2 حرکات دخیل در تعادل‌های نش محض هستند، پس اگر بازیگر ۲ را در نظر بگیریم، می‌تواند به b_2 منحرف شود. حال بازیگر ۱ می‌خواهد راهبردی را بچیند به طوری که انحراف از آن راهبرد هزینه زیادی برای بازیگر ۲ داشته باشد. بدترین جریمه می‌تواند پیامد ۵- باشد اما به دلیل این که بازی دوبار انجام می‌شود، خود بازیگر ۱ انگیزه تخطی دارد و a_1 را به x_1 ترجیح می‌دهد. در این حالت پیامد بازیگر ۲ برابر با $6+0.3\times 5=$

7.5 و پیامد بازیگر ۱ برابر با $1 = 0 \times 0.3 + 1$ می‌شود. انتخاب جریمه ۴- با بازی (b_1, x_2) نیز به همین نتیجه ختم می‌شود.

حال برای جریمه ۳-، بازیگر ۱ انگیزه تخطی دارد و a_1 را به b_1 ترجیح می‌دهد. در این حالت پیامد بازیگر ۲ برابر با $7.8 = 6 \times 0.3 + 6$ و پیامد بازیگر ۱ برابر با $1.3 = 1 \times 0.3 + 1$ می‌شود. . انتخاب جریمه ۴- با بازی (x_1, b_2) نیز به همین نتیجه ختم می‌شود.

برای جریمه ۰ نیز بازیگر ۱ انگیزه تخطی دارد و b_1 را به x_1 ترجیح می‌دهد. در این حالت پیامد بازیگر ۲ برابر با $6.3 = 1 \times 0.3 + 6$ و پیامد بازیگر ۱ برابر با $2.8 = 6 \times 0.3 + 1$ می‌شود.

در مرحله سوم نیز اگر بیشترین جریمه را به بازیگر ۲ بدهیم مقدار $0.3^2 \times 1 = 0.09$ به پیامد آن اضافه می‌شود و اگر کمینه پیامد ممکن که ۶.۳ است را نظر بگیریم، مجموع پیامدهای بازیگر ۲ برابر با ۶.۳۹ می‌شود.

حال باید دید می‌توان راهبردی یافت که در مرحله دوم و سوم بازی پیامدی جز جریمه‌های گفته شده داشته باشد به صورتی که بازیگر ۲ انگیزه تخطی نداشته باشد؟

اگر به جز مرحله اول که پیامد ۴ دارد، در هر دو مرحله بیشترین پیامد را برای بازیگر ۲ در نظر بگیریم، برآیند پیامدهای آن برابر با $6.34 = 6 \times 0.3^2 + 6 \times 0.3 + 4$ می‌شود که از کم‌ترین برآیند محاسبه شده با جریمه کم‌تر است.

ج)

تعادلی که مطلوبیت ۳ را به همراه دارد، تعادل نش ترکیبی است. همچنین در این دو راهبرد مطلوبیت تعدیل شده برابر است با:

$$U_i(h^k) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{k} \delta^t u_i(a^t)$$

<u>راهبرد S_1:</u>

به دلیل این که مطلوبیت ۳ برای تعادل نش ترکیبی است، می‌توان در صورت عدم تخطی بازیگران، مطلوبیت تعدیل شده میانگین را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$U_i(h^k) = (1-\delta)(\sum_{t=0}^{k-2} \delta^t u_i(a^t) + 3\delta^{k-1}(\delta+1))$$
$$= 4(1-\delta^{k-1}) + 3\delta^{k-1}(1-\delta^2) = 4 - \delta^{k-1} - 3\delta^{k+1}$$

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که تخطی در تکرار mم ($m < k - 2$)توسط بازیگر ۱ رخ داده است:

$$U_i(h^k) = (1-\delta)(\sum_{t=0}^{m-1}\delta^t u_i(a^t) + \delta^m u_i(a^m) + \sum_{t=m+1}^{k}\delta^t u_i(a^t))$$

$$U_1(h^k) = (1-\delta)\left(4\frac{1-\delta^m}{1-\delta} + 6\delta^m + \delta^{m+1}\frac{1-\delta^{k-m-1}}{1-\delta}\right) = 4 + 2\delta^m - 5\delta^{m+1} - \delta^k$$

$$U_2(h^k) = (1-\delta)\left(4\frac{1-\delta^m}{1-\delta} + \delta^m + 6\delta^{m+1}\frac{1-\delta^{k-m-1}}{1-\delta}\right) = 4 - 3\delta^m + 5\delta^{m+1} - 6\delta^k$$

از آنجایی که در دو مرحله آخر دو بازیگر بین حرکات خود با احتمال به دست آمده از تعادل نش ترکیبی انتخاب می‌کنند، انگیزه تخطی ندارند و اگر کسی منحرف شود در $k-2$ مرحله اول خواهد بود.

<u>راهبرد S_2:</u>

به دلیل این که مطلوبیت ۳ برای تعادل نش ترکیبی است، می‌توان در صورت عدم تخطی بازیگران، مطلوبیت تعدیل شده میانگین را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$U_i(h^k) = (1-\delta)\left(-5 - 4\delta + 3\sum_{t=2}^{k+1}\delta^t\right) = -5 + \delta + 7\delta^2 - 3\delta^{k+2}$$

در این راهبرد نیز در نظر می‌گیریم که انحراف فقط در دو مرحله اول می‌تواند صورت گیرد، چرا که مطلوبیت ۳ حاصل از تعادل نش ترکیبی است.

انحراف در مرحله اول توسط بازیگر ۱:

$$U_1(h^k) = (1-\delta)\left(0 + \sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = \delta(1-\delta)(1-\delta^{k+2})$$

$$U_2(h^k) = (1-\delta)\left(5 + 6\sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = 5 + \delta - 6\delta^{k+3}$$

انحراف در مرحله اول توسط بازیگر ۲:

$$U_1(h^k) = (1-\delta)\left(0 + 6\sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = 6\delta(1-\delta)(1-\delta^{k+2})$$

$$U_2(h^k) = (1-\delta)\left(5 + \sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = 5 - 4\delta - \delta^{k+3}$$

انحراف در مرحله دوم توسط بازیگر ۱:

$$U_1(h^k) = (1-\delta)\left(-5+\delta+\sum_{t=2}^{k+2}\delta^t\right) = -5+6\delta-\delta^{k+3}$$
$$U_2(h^k) = (1-\delta)\left(-5+6\delta+6\sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = -5+11\delta-6\delta^{k+3}$$

انحراف در مرحله دوم توسط بازیگر ۲:

$$U_1(h^k) = (1-\delta)\left(-5+5\delta+6\sum_{t=2}^{k+2}\delta^t\right) = -5+10\delta+\delta^2-6\delta^{k+3}$$
$$U_2(h^k) = (1-\delta)\left(-5+0+\sum_{t=1}^{k+2}\delta^t\right) = -5+5\delta+\delta^2-\delta^{k+3}$$

همانطور که مشخص است، هر دو بازیگر انحراف در مرحله اول را ترجیح می‌دهند.

د)

در رویکرد مناسب به ازای هر رویداد و اطلاعاتی باید رویکرد کاملا مشخص باشد. در اینجا مطلوبیت ۳ ناشی از تعادل ترکیبی نش است و انتخاب بازیگر را مشخص نمی‌کند و صرفا احتمالا انتخاب هر حرکت را مشخص می‌کند و نتیجه بازی تعیینی نیست. برنامه اصلاحی می‌تواند بازی تعادل‌های محض به صورت یکی در میان باشد.

فصل ۴، تمرین ۲: سپیده عبداللهی

در این راهبرد در صورت انحراف حرکت نهایی به تعادل منجر نمی‌شود، پس دوباره انگیزه انحراف وجود دارد:

$$\pi_d+\delta\pi_c+\delta^2\pi_d+\delta^3\pi_c+000 \le \frac{1}{1-\delta}\frac{\pi_m}{2}$$

$$\frac{\pi_d}{1-\delta^2}+\frac{\delta\pi_c}{1-\delta^2} \le \frac{1}{1-\delta}\frac{\pi_m}{2} \quad \xrightarrow{\delta=\frac{1}{2}} \quad \frac{2}{3}(2\pi_d+\pi_c) \le \pi_m$$

فصل ۴، تمرین ۳: محمدصدرا حیدری

قسمت الف) برای هر بازیگر می‌دانیم $\underline{v_i}$ برابر با ۰ است. چرا که اگر یکی از دو بازیگر دیگر یکی حرکت $a_i = 0$ و دیگری حرکت $a_j = 1$ را انجام دهد، مستقل از بازی بازیگر مطلوبیت او برابر با ۰ خواهد بود. از طرفی بیشینه مطلوبیت ممکن برای بازیگر برابر با ۱ خواهد بود. بنابراین به کمک قضیه فولک می‌دانیم مجموعه پیامدهای قابل التزام به شرح زیر است:

$$\{(v_1, v_2, v_3) \mid v_i \in [0,1] \text{ for } i = 1,2,3\}$$

قسمت ب) فرض کنید کمینه مطلوبیت حاصل از یک تعادل کامل زیربازی‌ها برای همه بازیگرها برابر با m باشد. و فرض کنیم a^1 استراتژی بازیگرها در اولین مرحله از بازی باشد. آن‌گاه حداقل یکی از سه بازیگر وجود دارد (i) به طوری که دو بازیگر دیگر یا با هم حرکت $a^1_{-i} > \frac{1}{2}$ و یا حرکت $a^1_{-i} \le \frac{1}{2}$ را بازی کنند. در این حالت مطلوبیت بازیگر i از انحراف از تعادل در مرحله اول حداقل برابر با $\frac{1}{4}$ خواهد بود. بنابراین برای آن که بازیگر انگیزه انحراف نداشته باشد می‌بایست:

$$\frac{1}{4}+\frac{\delta}{1-\delta}m \le \frac{1}{1-\delta}m \quad\Rightarrow\quad m \ge \frac{1}{4}$$

بنابراین هر تعادل کامل زیربازی‌ها می‌بایست حداقل مطلوبیت $1/4$ به همراه داشته باشد.

فصل ۴، تمرین ۴: فاطمه اصغری

این بازی دو تعادل نش استراتژی محض دارد

(بازیگر ۲)

(بازیگر ۱)	A	B	C	D
A	۴ ، ۴	۰ ، ۰	۱۸ ، ۰	۱ ، ۱
B	۰ و ۰	۶ ، ۶	۰ ، ۰	۱ ، ۱
C	۰ ، ۱۸	۰ ، ۰	۱۳ ، ۱۳	۱ ، ۱
D	۱ ، ۱	۱ ، ۱	۱ ، ۱	۰ ، ۰

الف) بازی ۲ مرحله‌ای است پس درمرحله دوم تعادل نش بازی می‌شود، چون تعادل این بازی باید در هر زیر بازی از این بازی تعادل باشد، لذا در زیر بازی آخر تعادل نش بازی می‌شود. یک تعادل که متوسط مطلوبیت آن برای هر نفر از چهار واحد کمتر باشد این است که دو بازیگر در مرحله اول (D , D) را بازی کنند و اگر هر دو به این توافق پایبند بودند در مرحله بعد، تعادل نش با پیامد بزرگتر یعنی (B , B) را بازی کنند. در صورتی که هر کدام از طرفین به توافق پایبند نبود، در مرحله دوم تعادل نش با پیامد کمتر یعنی (A , A) بازی خواهد شد.

$$S^1 = (D , D),\ S^2 = \begin{cases}(B , B) & \text{if } S^1 = (D , D)\\ (A , A) & \text{o.w.}\end{cases}$$

برای هر بازیگر : $\left\{\begin{array}{ccc}\text{پیامد تعادل} & & \text{پیامد انحراف}\\ ۰+۶ & \ge & ۱+۴\end{array}\right.$

در این تعادل متوسط مطلوبیت هر دو بازیگر برابر ۳ و کمتر از ۴ است.

ب) مانند قسمت الف، در مرحله‌ی دو هر دو بازیگر تعادل نش را بازی خواهند کرد پس برای این که در تعادل در مرحله اول (C , C) بازی شود، یک برنامه می‌تواند این باشد که اگر در دوره اول به توافق عمل شود در دوره بعد (B , B) بازی شود و در غیر این صورت (A , A) بازی شود که. در این حالت هر دو بازیگر در مرحله اول انگیزه‌ی انحراف از C به A دارند چون مطلوبیت بیشتر کسب می‌کنند. برای هر بازیگر داریم:

پیامد انحراف   پیامد تعادل

$$۶+۱۳ \leq ۴+۱۸$$

بنابراین تعادلی نمی‌تواند وجود داشته باشد که در دو مرحله انجام این بازی در مرحله اول، (C , C) بازی شود.

ج) همانطور که در قسمت‌های قبل گفته شد در مرحله‌ی سوم بازی تعادل نش بازی خواهد شد و در یک برنامه پیشنهادی به عنوان مثال (B , B) تعادلی است که در صورت پایبندی طرفین به توافق مرحله اول و بازی شدن (C , C) بازی می‌شود و (A , A) تعادلی است که در صورت عدم پایبندی یکی از طرفین به توافق مرحله اول به عنوان جریمه بازی خواهد شد. برای مرحله دوم باید راهبردی انتخاب شود که پیامد تخطی از توافق را کوچکتر از پیامد پایبندی به آن بکند. (دقت کنید همان طور که در قسمت قبل گفتیم برای مرحله دوم نمی‌تواند (C , C) در تعادل بازی شود). می‌توان گفت که هر کس اگر از طرف مقابل تخطی ببیند دور بعد راهبرد D را بازی خواهد کرد و در غیر این صورت (B , B) بازی خواهد شد. در حالتی که در دور اول تخطی رخ دهد، در دور بعد حداکثر پیامد برای هر دو نفر برابر یک واحد خواهد بود (طرف مقابل D را بازی کند و بازیکنی که تخطی کرده به جای D هر یک از سه استراتژی دیگر را بازی کند).

$$S^{۱} = (C , C)$$

$$S^{۲} = \begin{cases} (B , B) & \text{if} \quad S^{۱} = (C , C) \\ (D , D) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$S^{۳} = \begin{cases} (B , B) & \text{if} \quad S^{۱} = (C , C) \\ (A , A) & \text{o.w.} \end{cases}$$

برای هر بازیگر: $\begin{cases} \text{پیامد انحراف} \quad \text{پیامد تعادل} \\ ۶ + ۶ + ۱۳ \geq ۴ + ۰ + ۱۸ \end{cases}$

بنابراین این تعادل، تعادل نش زیر بازی کامل است و هیچ بازیگری انگیزه‌ی انحراف از تعادل را ندارد.

فصل ۴، تمرین ۶: ملیکا عبدی

الف) برای به دست آوردن حداکثر مطلوبیت، دقت می‌کنیم طبق صفحهٔ ۲۵۴ کتاب «متوسط مطلوبیت بازیگر دائمی از بالا محدود به بیشترین کمینهٔ مطلوبیت است.»[۲] پس باید بیشترین کمینهٔ مطلوبیت بازیگر اول را به دست آوریم. برای این کار، فرض می‌کنیم بازیگر ۲ به این شکل بازی کند: $\sigma_2(U) = m$ و مطلوبیت بازیگر ۱ را در صورتی که هر کدام از حرکات ممکن را انجام دهد محاسبه می‌کنیم:

$I)\ u_1(L) = 2 - 2m$

$II)\ u_1(M) = -100m + 3 - 3m = 3 - 103m$

$III)\ u_1(R) = 1$

در بیشترین کمینه بازیگر اول با دانستن مقدار m تلاش می‌کند حرکتش را به گونه‌ای انتخاب کند تا مطلوبیتش را کمینه کند و بازیگر دوم تلاش می‌کند m را به گونه‌ای انتخاب کند که مطلوبیت بازیگر اول بیشینه شود. بنابراین حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:

- دقت کنید اگر $m > \frac{1}{101}$، داریم $u_1(M) < u_1(L)$ پس در این حالت بازیگر اول برای کمینه کردن مطلوبیتش بین M و R انتخاب خواهد کرد:
  - اگر $m > \frac{2}{103}$ باشد حرکت M بازیگر اول کمترین مطلوبیت را برای او خواهد داشت. از طرفی بازیگر ۲ می‌خواهد m را به گونه‌ای انتخاب کند تا مطلوبیت بازیگر ۱ بیشینه شود. با توجه به معادلهٔ II باید کمترین m ممکن را انتخاب کند. پس m=2/103 را انتخاب خواهد کرد و مطلوبیت بازیگر اول در این حالت ۱ خواهد بود.
  - به ازای مقادیر $m < \frac{2}{103}$ بازیگر ۱ حرکتR را انتخاب خواهد کرد. مطلوبیت بازیگر اول در این حالت ۱ خواهد بود.
- اگر $m < \frac{1}{101}$ داریم $u_1(M) > u_1(L)$ و در این حالت بازیگر ۱ بین Lو R انتخاب خواهد کرد:
  - در این حالت اگر $m < \frac{1}{2}$ حرکت R انتخاب خواهد شد که مطلوبیت بازیگر ۱ در این حالت ۱ است.
  - اگر $m > \frac{1}{2}$ حرکت L توسط بازیگر ۱ بازی خواهد شد. در این حالت اشتراک بازه‌های به دست آمده برای m تهی است پس این حالت رخ نخواهد داد.

پس بیشترین کمینهٔ مطلوبیت بازیگر ۱ برابر ۱ است.

ب) نشان می‌دهیم کمترین بیشینهٔ مطلوبیت بازیگر ۱ برابر بیشترین کمینهٔ آن و برابر با ۱ است. در این صورت طبق قضیه، مطلوبیت حاصل از بازی تکراری با حرکت ترکیبی برابر با ۱ باید باشد:

بازیگر ۲ در صورت انحراف بازیگر ۱ باید بازی را به یک تعادل نش که مطلوبیت کمتری برای بازیگر ۱ دارد هدایت کند. اما از آنجایی که چنین تعادلی وجود ندارد، (تعادل نش محض تنها حرکت (M,D) است که مطلوبیت ۳ برای بازیگر ۱ به همراه دارد و در تعادل‌های ترکیبی نیز مطلوبیت بزرگتر از یک است.) پس بازیگر ۱ از ابتدا نباید

[۲] توضیح بیشتر در مورد این قضیه را می‌توانید در مقالهٔ مروری فودنبرگ و دیگران ۱۹۹۰ مشاهده کنید.

انگیزهٔ انحراف داشته باشد چرا که در صورت انحراف بازیگر۲ توانایی تنبیه او را ندارد. پس باید به دنبال یک تعادل نش ترکیبی با مطلوبیت ۱ یا کمتر برای بازیگر۱ باشیم.

بازیگر۱ باید p و q را به گونه‌ای انتخاب کند که بازیگر۲ بین انجام دو حرکت Uو D بیتفاوت شود. چرا که واضح است بازیگر۲ اگر محض بازی کند بازیگر۱ نیز هرگز ترکیب نخواهد کرد:

$$u_2(U) = 6p - q\ , u_2(D) = 2p + (1 - p - q) \rightarrow 6p - q = 2p + (1 - p - q) \rightarrow p = \frac{1}{5}$$

بازیگر۲ نیز باید m را به گونه‌ای انتخاب کند که بازیگر۱ را بین انجام حداقل دو حرکت بی‌تفاوت کند:

$$I)\ u_1(L) = 2 - 2m$$

$$II)\ u_1(M) = -100m + 3 - 3m = 3 - 103m$$

$$III)\ u_1(R) = 1$$

با توجه به این که قبل‌تر به دست آوردیم p=1/5 پس حرکت L حتما بازی می‌شود. با توجه به این که سه عبارت بالا نمی‌توانند همزمان مساوری باشند، پس بازیگر۱ یا بین L,M ترکیب کرده یا بین L,R:

- ترکیب بین L,M: $2 - 2m = 3 - 103m \rightarrow m = \frac{1}{101}$

در این حالت مطلوبیت بازیگر۱ بزرگتر از ۱ است پس این حالت نمی‌تواند حرکت ترکیبی مدنظر باشد:

$$u_1 = -100 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{101} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{100}{101} + 3 \times \frac{4}{5} \times \frac{100}{101} = \frac{600}{101} > 1$$

- ترکیب بین L,R: $2 - 2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$

در حالت اول مطلوبیت بازیگر۱ برابر ۱ است و این حرکت ترکیبی مورد نظر است:

$$u_1 = 0 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = 1$$

ج) با توجه به این که بازیگر۲ گذری است، تمایل دارد مطلوبیت خود را در هر دوره حداکثر کند. با توجه به جدول وقتی بازیگر۱ L بازی کند مطلوبیت بازیگر۲ حداکثر می‌شود. داشتیم:

$$I)\ u_1(L) = 2 - 2m$$

$$II)\ u_1(M) = -100m + 3 - 3m = 3 - 103m$$

$$III)\ u_1(R) = 1$$

پس بازیگر۲ برای این که بازیگر۱ حرکت L را انتخاب کند باید 1/101<m<1/2 قرار دهد. در این حالت بازیگر۱ L بازی می‌کند و بیشترین مطلوبیتی که در این حالت در یک مرحله نصیب بازیگر۱ خواهد شد در حالتی خواهد بود که بازیگر۲ D بازی کرده باشد و مطلوبیت به دست آمده برای بازیگر۱ در این حالت ۲ خواهد بود.

فصل ۴، تمرین ۷: فاطمه اصغری

تعادل نش این بازی در جدول با رنگ قرمز نشان داده شده است (A , a). طبق اصل بهینگی راهبرد σ تعادل کامل زیربازی ها است اگر و تنها اگر هیچ بازیگری در هیچ تاریخچه ای تنها با یک بار انحراف از σ نتواند مطلوبیت بالاتری بدست بیاورد. پس شرایط مختلفی که بازیگران ممکن است به آن برسند را در نظر می‌گیریم و نرخ تنزیل را بهگونه‌ای که بازیگران نخواهند تخطی کنند بدست می‌آوریم. به دلیل متقارن بودن بازی کافیست برای یک بازیگر بررسی کنیم.

(بازیگر ۲)

		a	b	c
(بازیگر ۱)	A	۴ و ۴	۲ و ۳	۱ و ۱
	B	۳ و ۲	۲ و ۲	۱ و ۱
	C	۱ و ۱	۱ و ۱	-۱ و -۱

$$S^{۱} = (A , a) \quad , \quad S^{t>۱} = \begin{cases} (B , b) & \text{if} \quad S^{t-۱} = (A , a) \; or \; (B , b) \; or \; (C , c) \\ (C , c) & o.w. \end{cases}$$

وضعیت اول: این است که در ابتدای بازی باشیم و در تعادل نش باشیم. به ازای تمامی مقادیر δ هیچ کدام از طرفین انگیزه تخطی از تعادل نش را ندارند. $\delta \in [۰, ۱]$

وضعیت دوم: این است که در (B , b) باشیم. در این حالت بازیگر ۱ انگیزه دارد که استراتژی خود را از B به A تغییر دهد و در این مرحله سود بیشتری کسب کند. حال باید δ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که این تغییر باعث کاهش مطلوبیت طول عمر او شود.

$$(1-\delta)\left(3-\delta+\sum_{t=2}^{\infty} 2\times\delta^t\right) \le (1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty} 2\times\delta^t\right) \to (1-\delta)(3-\delta+\frac{2\delta^2}{1-\delta}) \le 2$$

$$3+3\delta^2-4\delta \le 2 \to 3\delta^2-4\delta+1 \le 0 \to \delta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

وضعیت سوم: این است که در (C , c) باشیم. در این حالت بازیگر ۱ انگیزه دارد که استراتژی خود را از C به A یا B تغییر دهد و در این مرحله سود بیشتری کسب کند. حال باید δ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که این تغییر باعث کاهش مطلوبیت طول عمر او شود.

$$(1-\delta)\left(1-\delta+\sum_{t=2}^{\infty} 2\times\delta^t\right) \le (1-\delta)\left(-1+\sum_{t=1}^{\infty} 2\times\delta^t\right) \to$$

$$(1-\delta)(1-\delta+\frac{2\delta^2}{1-\delta}) \le (1-\delta)(-1+\frac{2\delta}{1-\delta}) \rightarrow$$

$$1-2\delta+3\delta^2 \le -1+3\delta \rightarrow 3\delta^2-4\delta+1 \le 0 \rightarrow \delta \in \left[\frac{2}{3},1\right]$$

بنابراین به ازای $\delta \in \left[\frac{2}{3},1\right]$ برنامه گفته شده محقق خواهد شد.

فصل ۴، تمرین ۸: سپیده عبداللهی

بازیگر ۲

		A	D
بازیگر ۱	A	2,3	1,5
	D	0,1	1,0

بازیگر ۲ انگیزه انحراف از A به D دارند. اگر بازیگر ۲ به D منحرف شود، در گام بعد بازیگر ۱ کمینه پیامدی که می‌تواند به بازیگر ۲ تحمیل کند ۱ است (اگر بازیگر ۱ حرکت D را برای جریمه بازیگر ۲ انتخاب کند، بازیگر ۲ حرکت A را انتخاب می‌کند). در نتیجه داریم:

$$5+\frac{\delta}{1-\delta} \le \frac{3}{1-\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \le \delta$$

پس با $\delta = \frac{1}{6}$ نتیجه ((A,A),(A,A),...) نمی‌تواند حاصل تعادل کامل زیربازی‌ها باشد.

فصل ۴، تمرین ۹: ملیکا عبدی

الف) بازیگر گذری به گونه‌ای بازی می‌کند که مطلوبیت خود را حداکثر کند (برای تنبیه بازیگر اول حرکتی نمی‌کند که مطلوبیت خودش را کم کند چون فقط برای یک دوره زنده است) پس بازیگر۲ همواره D بازی می‌کند. تحت تاثیر این انتخاب بازیگر۲، بازیگر۱ هم D بازی می‌کند. پس تنها یک تعادل کامل زیربازی‌ها داریم.

ب) کمترین بیشینه و بیشترین کمینه را برای بازیگر۱ به دست می‌آوریم و از قضیهٔ ۴.۶ استفاده می‌کنیم. ابتدا باید مجموعهٔ B را برای بازیگر گذری محاسبه کنیم:

- بازیگر گذری در صورتی C بازی می‌کند که بازیگر۱ به صورتی ترکیب کرده باشد که مطلوبیت بازیگر گذری با حرکت C حداکثر شود: $u_2(C) > u_2(D) \rightarrow 3\sigma_1(C) > 1-\sigma_1(C) \rightarrow \sigma_1(C) > \frac{1}{4}$
- بازیگر گذری در صورتی D بازی میکند که بازیگر۱ به صورتی ترکیب کرده باشد که مطلوبیت بازیگر گذری با حرکت D حداکثر شود: $u_2(C) < u_2(D) \rightarrow 3\sigma_1(C) < 1-\sigma_1(C) \rightarrow \sigma_1(C) < \frac{1}{4}$

پس مجموعه B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B = \left\{(\sigma_1(C),C):\sigma_1(C) > \frac{1}{4}\right\} \bigcup \left\{(\sigma_1(C),D):\sigma_1(C) < \frac{1}{4}\right\}$$

در حالتی که بازیگر۲ C بازی کرده باشد، مطلوبیت بازیگر۱ برابر خواهد بود با $u_1(\sigma_1(C), C) = 3\sigma(C) + 4\big(1 - \sigma(C)\big) = 4 - \sigma(C)$. اگر بازیگر۲ D بازی کرده باشد مطلوبیت بازیگر۱ برابر خواهد بود با $u_1(\sigma_1(C), D) = 1 - \sigma(C)$. حالا کمترین بیشینه و بیشترین کمینه را محاسبه می‌کنیم:

- کمترین بیشینه: در این حالت بازیگر۱ می‌خواهد مطلوبیتش را در عبارات به دست آمده برای مطلوبیت بازیگر۱ در بالا بیشینه کند برای این کار کافی است $\sigma(C) = 0$ قرار دهد. با توجه به B حرکت بازیگر۲ اینجا تنها می‌تواند D باشد. پس کمترین بیشینه برابر با ۱ خواهد بود.
- بیشترین کمینه: بازیگر۱ می‌خواهد مطلوبیتش را کمینه کند. برای این کار قرار می‌دهد $\sigma(C) = 1$. با توجه به B حرکت بازیگر۲ اینجا تنها می‌تواند C باشد. پس کمترین بیشینه برابر با 3 خواهد بود.

طبق قضیه به ازای هر مطلوبیت بازیگر یک بین کمترین بیشینه و بیشترین کمینه مطلوبیت نرخ تنزیل $\underline{\delta}$ وجود دارد که برای هر $\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ تعادل کامل زیربازی‌هایی که این مطلوبیت متوسط را حاصل کنند وجود دارد.

فصل۴، تمرین ۱۰: مهرداد پورقاسم

الف) به‌سادگی می‌توان نشان داد که مطلوبیت تعدیل‌شده‌ی این بازی تکراری برابر است با $v = r$. برای محاسبه‌ی مطلوبیت تضمینی (کمترین بیشینه‌ی مطلوبیت) بازیگرها نیز، مطلوبیت حاصل از همکاری (انکار) و اعتراف برای بازیگر i در ازای $\sigma_{-i}\left(\text{همکاری}\right) = q$ را محاسبه می‌کنیم:

$$u_i\left(\text{همکاری}\right) = s + q(r - s), \qquad u_i\left(\text{اعتراف}\right) = p + q(t - p)$$

درنتیجه، مطلوبیت تضمینی بازیگرها برابر است با $\underline{v_i} = p$. از قضیه‌ی فولک می‌دانیم درصورتی‌که $v > v_i$ باشد، $\underline{\delta} < 1$ وجود دارد به‌نحوی‌که برای هر δ که بزرگ‌تر از $\underline{\delta}$ باشد، تعادل نشی در بازی تکراری با پیامد v وجود دارد.

ب) فرض کنید بازیگر ۱ به این برنامه پایبند باشد. اگر بازیگر ۲ در مرحله‌ی t اعتراف کند، در این صورت بازیگر ۱ نیز در مرحله‌ی $t + ۱$ اعتراف را بازی می‌کند و مادامی‌که بازیگر ۲ همکاری نکند، بازیگر ۱ اعتراف را انتخاب می‌کند. در وهله‌ی نخست، نیاز است پیامد برنامه برای هر بازیگر، بیشتر از انحراف یک‌باره‌ی او (حالتی که بازیگر ۲ در مرحله‌ی $t + ۱$ به انتخاب بازیگر ۱ در مرحله‌ی قبل نگاه می‌کند و همکاری را انتخاب می‌کند) باشد. در صورت پایبندی بازیگر ۲ به برنامه، جریان پیامدهای او به‌صورت (r، r، r، r، ...) و در صورت انحراف یک‌باره‌ی او، جریان پیامدهای او به‌صورت (t، s، t، s، ...) خواهد بود:

$$r(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) \geq t + \delta s + \delta^2 t + \delta^3 s + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{r}{1 - \delta} \geq \frac{t + \delta s}{1 - \delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta \geq \frac{t - r}{r - s}$$

همچنین، اگر انحرافی رخ می‌دهد، شروط مربوط به ادامه‌ی راهبرد در ادامه‌ی بازی[۳] نیز باید برقرار باشد. به‌بیان‌دیگر، بازیگر ۲ در مرحله‌ی $t+1$ با دو انتخاب مواجه است: به همکاری بازگردد که در بالا در مورد آن بحث کردیم؛ یا انتخاب اعتراف را ادامه دهد که در این صورت بازیگر ۱ نیز انتخاب اعتراف را ادامه می‌دهد. در حالت اول، جریان پیامدهای بازیگر ۲ به‌صورت (s، t، s، t، ...) و در حالت دوم، جریان پیامدهای او به‌صورت (p، p، p، p، ...) خواهد بود:

$$s + \delta t + \delta^2 s + \delta^3 t + \cdots \geq p(1 + \delta + \delta^2 + \cdots)$$

$$\Rightarrow \frac{s + \delta t}{1 - \delta^2} \geq \frac{p}{1 - \delta}$$

$$\Rightarrow \delta \geq \frac{p - s}{t - p}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم برنامه «چشم در مقابل چشم» تعادل نش است اگر و تنها اگر:

$$\delta \geq \frac{t - r}{r - s} \quad \text{and} \quad \delta \geq \frac{p - s}{t - p}$$

ج) نیاز است چهار زیربازی‌ای که به دنبال تاریخچه‌های (همکاری، همکاری)، (همکاری، اعتراف)، (همکاری، اعتراف) و (اعتراف، اعتراف) رخ می‌دهند را بررسی نماییم:

تاریخچه‌ی منتهی به (همکاری، همکاری) همان‌طور که در بالا بررسی کردیم، در این زیربازی، تخطی سودآور نیست اگر و تنها و اگر:

$$\delta \geq \frac{t - r}{r - s}$$

تاریخچه‌ی منتهی به (همکاری، اعتراف) (شرط عدم‌تخطی بازیگر ۱) فرض کنید بازیگر ۲ به برنامه پایبند بماند. اگر بازیگر ۱ نیز به برنامه پایبند باشد، آنگاه خروجی بازی در هر مرحله بین (اعتراف، همکاری) و (همکاری، اعتراف) تغییر می‌کند و پیامد بازیگر ۱ در صورت پایبندی به برنامه برابر است با:

$$t + \delta s + \delta^2 t + \delta^3 s + \cdots = (t + \delta s)(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots) = \frac{t + \delta s}{1 - \delta^2}$$

[۳] در زیربازی (همکاری، اعتراف)

اگر بازیگر ۱ در دوره‌ی اول همکاری کند و در ادامه به برنامه چشم در مقابل چشم پایبند باشد، خروجی هر دوره (همکاری، همکاری) خواهد بود و پیامد بازیگر ۱ برابر است با $r/(1-\delta)$. درنتیجه، در این زیربازی، تخطی برای بازیگر ۱ سودآور نیست اگر و تنها و اگر:

$$\frac{t+\delta s}{1-\delta^2} \geq \frac{r}{1-\delta}$$
$$\Rightarrow \delta \leq \frac{t-r}{r-s}$$

(شرط عدم‌تخطی بازیگر ۲) اکنون فرض کنید بازیگر ۱ به برنامه پایبند بماند. اگر بازیگر ۲ نیز به برنامه پایبند باشد، آنگاه خروجی بازی در هر مرحله بین (اعتراف، همکاری) و (همکاری، اعتراف) تغییر می‌کند و پیامد بازیگر ۲ در صورت پایبندی به برنامه برابر است با:

$$s+\delta t+\delta^2 s+\delta^3 t=(s+\delta t)(1+\delta^2+\delta^4+\cdots)=\frac{s+\delta t}{1-\delta^2}$$

اگر بازیگر ۲ در دوره‌ی اول اعتراف کند و در ادامه به برنامه چشم در مقابل چشم پایبند باشد، خروجی هر دوره (اعتراف ، اعتراف) خواهد بود و پیامد بازیگر ۲ برابر است با $p/(1-\delta)$. درنتیجه، در این زیربازی، تخطی برای بازیگر ۲ سودآور نیست اگر و تنها و اگر:

$$\frac{s+\delta t}{1-\delta^2} \geq \frac{p}{1-\delta}$$
$$\Rightarrow \delta \geq \frac{t-p}{p-s}$$

تاریخچه‌ی منتهی به (اعتراف ، همکاری) این زیربازی مشابه زیربازی منتهی به زیربازی (همکاری، اعتراف) است با این تفاوت که نقش بازیگرها برعکس است.

تاریخچه‌ی منتهی به (اعتراف ، اعتراف) اگر هر دو بازیگر به برنامه پایبند بمانند، خروجی هر دوره (اعتراف، اعتراف) خواهد بود و پیامد بازیگرها برابر است با $p/(1-\delta)$.

اگر هر یک از بازیگرها در دوره‌ی اول همکاری کند و در ادامه به برنامه چشم در مقابل چشم پایبند باشد، آنگاه خروجی بین (همکاری، اعتراف) و (اعتراف، همکاری) تغییر می‌کند و پیامد او خواهد بود با:

$$s+\delta t+\delta^2 s+\delta^3 t=(s+\delta t)(1+\delta^2+\delta^4+\cdots)=\frac{s+\delta t}{1-\delta^2}$$

درنتیجه، در این زیربازی، تخطی برای هر یک از بازیگرها سودآور نیست اگر و تنها و اگر:

$$\frac{p}{1-\delta} \geq \frac{s+\delta t}{1-\delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta \leq \frac{t-p}{p-s}$$

به‌این‌ترتیب، نتیجه می‌گیریم برنامه «چشم در مقابل چشم» تعادل کامل زیربازی‌ها است اگر و تنها اگر:

$$\delta = \frac{t-r}{r-s} \quad \text{and} \quad \delta = \frac{t-p}{p-s}$$

به‌بیان‌دیگر، این برنامه تنها به ازای مقادیر خاصی از پارامترها تعادل کامل زیربازی‌ها است.

فصل ۴، تمرین ۱۱، مرضیه علی‌اکبرپور

سوال ۱۱)

الف)

	L	H
L	46, 42	26, 44
H	52, 22	32, 24

ب) در بازی معمای زندانی، حرکت C غالب اکید است. در این بازی نیز حرکت تولید بالا (H) غالب اکید است. ⟸ هر دو بازی یک تعادل نش محض دارند و تعادل نش ترکیبی ندارند.

همچنین اگر به پیامد حرکت های دیگر نگاه کنیم در پیامد حرکت (L,L) برای هر دو بازیگر بیشتر از پیامد های حرکت (H,H) است و به طور مشابه در بازی معمای زندانی پیامد حرکت (NC,NC) بیشتر از (C,C) است.

ج) در تمام مراحل حرکت (L,L) بازی شود و در صورت تخطی هر کدام از بازیگران تعادل (H,H) بازی می‌شود.

مطلوبیت انتظاری در صورت عدم تخطی $\geq$ مطلوبیت انتظاری در صورت تخطی از تعادل

ایران: $52 + \frac{32\delta}{1-\delta} \leq \frac{46}{1-\delta} \longrightarrow \delta \geq 3/10$

عراق: $44 + \frac{24\delta}{1-\delta} \leq \frac{42}{1-\delta} \longrightarrow \delta \geq 1/10$

$\Rightarrow \delta \geq \frac{3}{10}$

فصل ۴، تمرین ۱۲: فاطمه اصغری

تعادل‌های نش محض در جدول با رنگ قرمز مشخص شده اند. این بازی ۲ تعادل نش محض (U , R) و (D , L) دارد.

برای بدست آوردن تعادل نش ترکیبی اگر فرض کنیم بازیگر ۱ با احتمال p استراتژی U و با احتمال p-۱ استراتژی D ، و بازیگر

۲ با احتمال q استراتژی L و با احتمال q-۱ استراتژی R را بازی می‌کنند، آن‌گاه به سادگی می‌توان دید که این بازی یک تعادل نش ترکیبی به صورت و ۱ تعادل ترکیبی $\left(p=\frac{۱}{۳}\,,\,q=\frac{۱}{۳}\right)$ دارد.

(بازیگر ۲)

		L	R
(بازیگر ۱)	U	۴ و ۴	۶ و ۱
	D	۱ و ۶	۰ و ۰

$$\begin{array}{l} U_۱(U)=۳q+۱\\ U_۱(D)=۶q\\ U_۲(L)=۳p+۱\\ U_۲(R)=۶p \end{array} \rightarrow \begin{cases} ۳q+۱\geq ۶q \;\Rightarrow\; ۱\geq ۳q \;\Rightarrow\; \frac{۱}{۳}\geq q\\ ۳p+۱\geq ۶p \;\Rightarrow\; ۱\geq ۳p \;\Rightarrow\; \frac{۱}{۳}\geq p \end{cases} \Rightarrow$$

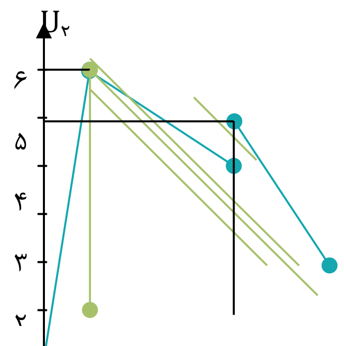
$$p=\begin{cases} ۱ & \text{if } q<\frac{۱}{۳}\\ ۰ & \text{if } q>\frac{۱}{۳}\\ p & \text{if } q=\frac{۱}{۳} \end{cases} \;\text{و}\; q=\begin{cases} ۱ & \text{if } p<\frac{۱}{۳}\\ ۰ & \text{if } p>\frac{۱}{۳}\\ q & \text{if } p=\frac{۱}{۳} \end{cases} \rightarrow \textit{mixed Nash equilibrium}\left(p=\frac{۱}{۳}\,,\,q=\frac{۱}{۳}\right)$$

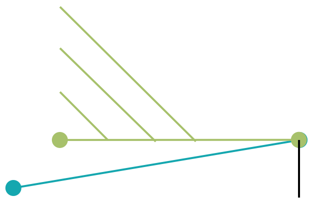
ب)

$$\min_q \max\left(U_۱(U)=۳q+۱ \;\text{و}\; U_۱(D)=۶q\right) \;\text{و}\; q\in[۰,۱]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q=۰ \;\longrightarrow\; ۱\\ q<\frac{۱}{۳} \;\longrightarrow\; ۳q+۱>۱\\ q>\frac{۱}{۳} \;\longrightarrow\; ۶q>۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V_1}=۱\\ m_۱^۱=U\\ m_۲^۱=R \end{cases} \xrightarrow{\text{بازی متقارن}} \begin{cases} \underline{V_2}=۱\\ m_۲^۲=L\\ m_۱^۲=D \end{cases}$$

ج) پیامدهای بازیگران در تعادل به صورت (۴ و ۴) ، (۱ و ۶) ، (۶ و ۱) و (۰و۰) است و کمترین بیشینه مطلوبیت برابر با (۱ و ۱) است. فضای مطلوبیت فضای تشکیل شده توسط این چهار نقطه است و فضای قابل الزام (شخصاً معقول) فضای هاشور زده است.





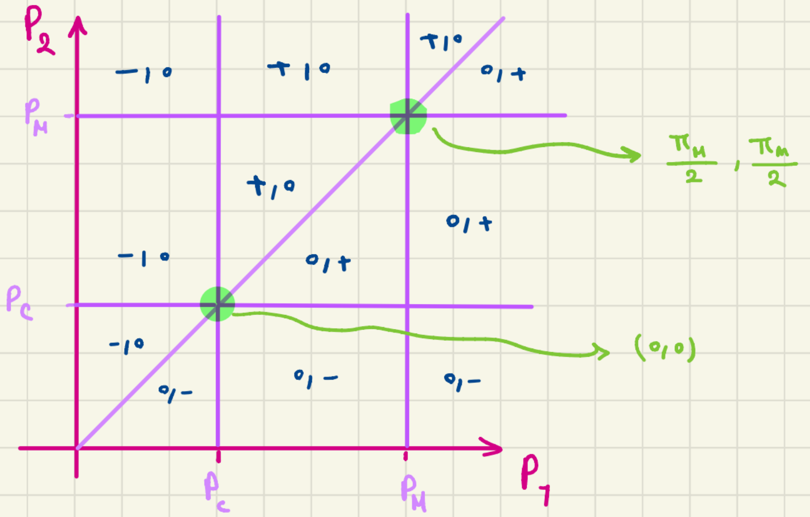
د) برای بدست آوردن δ برای این که برنامه گفته شده یک تعادل نش باشد باید جریمه مربوط به انحراف از آن برابر با کمترین بیشینه مطلوبیت باشد. بنابراین:

$$(1-\delta)\left(6+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t}\right) \leq (1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty}4\times\delta^{t}\right) \Rightarrow \ \Rightarrow \ \delta \in \left[\frac{2}{5},1\right]$$

فصل ۴، تمرین ۱۳: مرضیه علی‌اکبرپور

سوال 13)

الف)



$$\frac{\pi_M}{2(1-\delta)} \geq \pi_M - \varepsilon + (\pi_M - \varepsilon)\delta$$

$\lim_{\varepsilon \to 0}$

$$\frac{\pi_M}{2(1-\delta)} > (1+\delta)\pi_M \Rightarrow \delta^2 > 1/2$$

$$\delta > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$$

ب)

$$\frac{\pi_M}{1-\delta} \geq 2(\pi_M - \varepsilon) + 0$$

$$\delta > 1/2$$

* در یک رحله در دو بازار تخطی رخ دهد.

$$\frac{\pi_M}{1-\delta} \geq \frac{\pi_M}{2} + (\pi_M - \varepsilon) + 2(\pi_M - \varepsilon)\delta$$

$$2 > 3(1-\delta) + 4\delta$$

$$0 < 4\delta^2 - \delta - 1$$

$$\Rightarrow \quad \delta > \frac{1+\sqrt{17}}{8} \approx 0.64$$

* در مرحله اول تخطی در بازار دوم رخ دهد و در مرحله دوم تخطی در در بازار رخ دهد.

⇐ $\delta > 0.64$ تبانی رخ می‌دهد.

فصل۴، تمرین ۱۴: محمدصدرا حیدری

قسمت الف) فرض می‌کنیم تا این لحظه سرمایه‌گذاری‌ای انجام نشده است داریم: $0.5K < v < K \Rightarrow v = \beta K \ \ \beta \in [0.5, 1]$

حرکت بازیگر را به صورت نسبتی از سرمایه‌گذاری لازم نشان می‌دهیم. به صورتی که $k_i = a_i K, a_i \in [0, 1]$.

بنابراین مطلوبیت حاصل از حرکات هم‌زمان a_1 و a_2 برابراست با:

$$U_i(a_i, a_{-i}) = \begin{cases} -a_i K, & a_i + a_{-i} < 1 \\ (\beta - a_i)K, & a_i + a_{-i} \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین بیشینه مطلوبیت بازیگر i در واکنش به حرکت بازیگر دیگر برابراست با:

$$BR_i(a_{-i}) = \begin{cases} 1 - a_{-i}, & 1 - a_{-i} \leq \beta \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

درنتیجه به‌ازای هر نقطه روی خط $a_1 = 1 - a_2$ به صورتی که $a_1, a_2 \in [1-\beta, \beta]$ یک تعادل محض داریم.

قسمت ب)

در حالتی که بازیگر tام کل هزینه را پرداخت کرده و پروژه را تمام کند، مطلوبیتی برابر $U_t = v - R$ کسب می‌کند. حال اگر فرض

کنیم بازیگر k_t پرداخت کرده و در T^* پروژه تمام شود، مطلوبیت‌ش برابر با $U_t = -k_t + v\delta^{T^*-t}$ خواهد شد و اگر پروژه به اتمام نرسد، مطلوبیتی برابر با $U_t = -k_t$ به‌دست می‌آورد.

در حالت اتمام پروژه داریم:

$$v - R \geq -k_t + v\delta^{T^*-t} \Rightarrow \left(1 - \delta^{T^*-t}\right)v \geq R - k_t$$

بنابراین با فرض بیشترین مطلوبیت ممکن بازیگر با $k_t = 0$ داریم: $\left(1 - \delta^{T^*-t}\right)v \geq R$

در حالتی که پروژه به اتمام نرسد نیز داریم:

$$v - R \geq -k_t \Rightarrow v - R \geq 0 \Rightarrow v \geq R$$

قسمت ج)

این بازی عملا بازی دومرحله‌ای است که در مرحله اول بازیگر اول تصمیم می‌گیرد چه میزان از سرمایه‌گذاری را به عهده بگیرد و در مرحه دوم بازیگر تصمیم می‌گیرد سرمایه‌گذاری را تکمیل کند یا نه. زیربازی بازیگر دوم را در نظر بگیرید. با فرض این که مقدار R از سرمایه گذاری باقی‌مانده، اگر $R \leq v$ باشد، بازیگر ۲ تمام مقدار باقی‌مانده را پرداخت کرده و سود حاصل از اتمام پروژه را به‌دست می‌آورد. در غیراینصورت تصمیم می‌گیرد پولی سرمایه‌گذاری نکند.

بنابراین بازیگر ۱ که از این موضوع آگاه است کافی‌است $K - v$ سرمایه‌گذاری کرده و مطوبیت $2v - K > 0$ کسب کند.

فصل ۴، تمرین ۱۵: مرضیه علی‌اکبرپور

سوال 15)

الف)

«بازیگر ۲»

«بازیگر ۱»	x	Y	Z
A	(۱۰, ۰)	(۰, ۱۰)	(۰, ۱۰)
B	(۹, ۱)	(۱, ۹)	(۱, ۹)
C	(۲, ۸)	(۸, ۲)	(۱, ۹)
D	(۲, ۸)	(۲, ۸)	(۷, ۳)
E	(۴, ۶)	(۵, ۵)	(۶, ۴)

«جدول ۴. ۱۸»

بازی تعادل محض ندارد.

تعادل ترکیبی بازی :

$$\sigma_1(D) = \sigma_1(A) = 0 \ , \ \sigma_1(B) = \frac{13}{77} \ , \ \sigma_1(C) = \frac{8}{77}$$

$$\sigma_2(X) = 5/11 \ , \ \sigma_2(y) = 5/11$$

$$E(U_1) = \frac{51}{11} \sim 4.6$$

$$E(U_2) = \frac{59}{11} \sim 5.3$$

ب)

$$\sigma_1'(D) = \sigma_1'(E) = 1/2 \longrightarrow E(U_2) = 6.75$$

$$\sigma_2'(X) = \sigma_2'(y) = 1/2 \longrightarrow E(U_1) = 5$$

بین وضعیت ها تفاوت است.

$$\frac{6.75}{1-\delta} \geq 7 + \frac{5.3\,\delta}{1-\delta} \quad ☑$$

الف)

1,1	-1,2	0,0
2,-1	0,0	0,0
0,0	0,0	-1,-1

$$\frac{1}{1-\delta} \geq 2+0 \Rightarrow \delta \geq 1/2$$

ب)

1,1	-1,2	-2,-2
2,-1	0,0	-2,-2
-2,-2	-2,-2	-3,-3

$$\frac{1}{1-\delta} \geq 2+0 \Rightarrow \delta \geq 1/2$$

$1 < x$:

1,1	-1,2	=,−
2,-1	0,0	=,−
−,=	−,=	−,−

✗

$x = 1$:

1,1	-1,2	0,0
2,-1	0,0	0,0
0,0	0,0	-1,-1

✗

$0 \leq x < 1$

1,1	-1,2	+,+
2,-1	0,0	+,+
+,+	+,+	−,−

$$\frac{1}{1-\delta} \geq x$$

$$\boxed{\frac{3}{2} \geq x \geq 0}$$

فصل ۴، تمرین ۱۶: ملیکا عبدی

الف) با توجه به جدول ۶ تعادل نش محض داریم:

	A	B	Z
A	(۱,۱)	(۰,-۱)	(-۱,۱)
B	(-۱,۰)	(۰,۰)	(-۱,۰)
C	(۱,-۱)	(۰,-۱)	(-۲,-۲)

برای تعادل‌های ترکیبی فرض می‌کنیم بازیگر اول همه حرکاتش را ترکیب کرده:

$$\sigma_1(A) = p, \sigma_1(B) = q$$

فرض کنیم بازیگر2 بین A و B ترکیب کند:

$$p - (1 - p - q) = -p - (1 - p - q) \to p = 0$$

$$\sigma_2(A) = m \to -m + (1 - m) = 0 \to m = \frac{1}{2} \to (\{0, q, 1 - q\}, \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\})$$

بازیگر۲ بین A,C ترکیب کند:

$$p - (1 - p - q) = p - 2(1 - p - q) \to p + q = 1$$

$$\sigma_2(A) = m \to m - (1 - m) = -1 \to m = 0 \to (\{p, 1 - p, 0\}, \{0,0,1\})$$

بازیگر۲ بین B,C ترکیب کند:

$$-p - (1 - p - q) = p - 2(1 - p - q) \to p = \frac{1}{5}$$

$$\sigma_2(B) = m \to -(1 - m) = -2(1 - m) \to m = 1 \to \left(\left\{\frac{1}{5}, q, \frac{4}{5} - q\right\}, \{0,1,0\}\right)$$

بازیگر۲ بین هر سه ترکیب کند:

$$p - (1 - p - q) = -p - (1 - p - q) = p - 2(1 - p - q) \to \text{تناقض}$$

ب) با توجه به این که پیامد بین کمترین بیشینه و بیشترین کمینه قرار دارد به ازای δهای به قدر کافی بزرگ، حتما تعادل همبستهٔ مورد نظر وجود دارد.

برای رسیدن به این تعادل بازی را در نظر می‌گیریم که در آن در مراحلی که به پیمانهٔ k ، m هستند تعادل نش محض با پیامد (-2,-2) بازی می‌شود و در سایر مراحل تعادل نش محض با پیامد (0,0) بازی می‌شود. اگر هر کدام از بازیگران از این دستورالعمل منحرف شود، بازیگر دیگر از آن پس حرکت C/Z را بازی می‌کند و مطلوبیتی بین ۰و ۱ به دست می‌آورد در حالی که بیشترین مطلوبیتی که بازیگر خطاکار در هر مرحله می‌تواند به دست آورد ۱- خواهد بود. کافی است k ,m را به گونه‌ای بیابیم که مطلوبیت 1/4-را به دست دهد:

$$-\frac{2\delta^m}{1 - \delta^k} = -\frac{1}{4} \to 1 - \delta^k = 8\delta^m \qquad m < k$$

چون هدف ما فقط پیدا کردن یک راه حل است و نیازی به پیدا کردن همهٔ حل‌های عبارت بالا نداریم، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که $m = k - 1$:

$$1 - \delta^k = 8\delta^{k-1}$$

دوباره حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که k=2:

$$\delta = \frac{8 \pm \sqrt{64+4}}{-2} \rightarrow \delta = \sqrt{17} - 4$$

حالا باید نشان دهیم پایبند ماندن به قاعدهٔ بازی برای هر بازیگر حرکت بهینه است.

ج) کافی است راهبردی را در نظر بگیریم که در آن در مرحلهٔ صفرم هر دو بازیگر حرکت Z/C را بازی می‌کنند سپس در تمام مراحل بعدی هر دو A را بازی می‌کنند. در مراحل بزرگتر از ۰ انگیزهٔ انحراف وجود ندارد و تنها انگیزهٔ انحراف برای بازیگران در مرحله صفرم است. در صورت انحراف در مرحلهٔ صفرم بازیگر رقیب در تمام مراحل بعدی برای تنبیه بازیگر خطاکار Z/C بازی خواهد کرد. در این حالت مطلوبیت بازیگر رقیب (با فرض بازگشت به راهبرد اصلی بعد از انحراف) در هر مرحله تغییر نمی‌کند و ۱ باقی می‌ماند ولی مطلوبیت بازیگر خطاکار از ۱ به -۱ کاهش می‌یابد.

طبق این راهبرد پیامد برابر است با: $u_1(S) = u_2(S) = -2 + \frac{\delta}{1-\delta} = -2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -1$

د) راهبرد پیشنهادی مشابه بخش قبل است با این تفاوت که حرکت‌های مرحله ۲ به بعد دارای دوره تناوب kتایی هستند و A تنها در مراحلی که مضرب k هستند بازی خواهد شد و در سایر مراحل اگر مرحلهٔ صفرم نباشند B بازی خواهد شد. در مرحلهٔ صفرم نیز مشابه بخش قبل هر بازیگران اول/دوم حرکت C/Z را بازی خواهد کرد. در هر مرحله اگر بازیگری منحرف شود، بازیگر دیگر برای همیشه C/Z را بازی خواهد کرد.

طبق این راهبرد پیامد برابر است با: $u_1(S) = u_2(S) = -2 + \frac{\delta^k}{1-\delta^k} = -2 + \frac{\left(2^{-\frac{1}{k}}\right)^k}{1-\left(2^{-\frac{1}{k}}\right)^k} = -1$

فصل ۴، تمرین ۱۷: ملیکا عبدی

الف) نشان می‌دهیم هیچ‌کدام انگیزهٔ انحراف ندارند:

- بازیگر۱ که پیشنهاد دهنده است به دو صورت می‌تواند منحرف شود:
  - مقدار بیشتر از x2 پیشنهاد دهد: در این حالت سود حاصل برای این بازیگر کمتر از 1-x2 (مقدار سود مورد انتظار در صورتی که x2 را پیشنهاد دهد) خواهد بود پس این حرکت مغلوب است.
  - مقدار کمتر از x2 پیشنهاد دهد: در این صورت بازیگر۲ یا به دنبال فرصت خارجی‌اش می‌رود که در این صورت سود بازیگر۱ x1<1-x2 خواهد بود. یا این که بازیگر۲ قبول نمی‌کند و در نوبت بعد مقدار x1 را پیشنهاد می‌دهد.
- بازیگر۲ به دو صورت می‌تواند منحرف شود:
  - نپذیرد و دنبال فرصت خارجی‌اش برود: در این صورت نیز مطلوبیت x2 کسب خواهد کرد که تفاوتی با مطلوبیت در این حالت ندارد پس انگیزهٔ این انحراف را نخواهد داشت.

- نپذیرد و نوبت بعدی پیشنهاد دهد: در این حالت قیمت پیشنهادی‌اش برای بازیگر اول x1 خواهد بود چون مقادیر بزرگتر و کوچکتر از x1 طبق استدلال بخش قبل برای بازیگر پیشنهاد دهنده مغلوب هستند. در این حالت اگر بازیگر ۱ بپذیرد، مطلوبیت بازیگر ۲ $\delta(1-x_1)$ خواهد شد که با توجه به این که x2<1-x1، به ازای δ های به قدر کافی بزرگ، مطلوبیت‌های بالاتری از x2 به دست می‌دهد. اما اگر δ به قدر کافی بزرگ باشد بازیگر اول نیز انگیزه نخواهد داشت که پیشنهاد x1 را از بازیگر دوم بپذیرد و پیشنهاد بازیگر دوم را رد خواهد کرد تا در مرحله بعد مطلوبیت بزرگتر $\delta(1-x_2)$ را به دست آورد و این چرخه آنقدر تکرار می‌شود تا ارزش زمان حال مطلوبیت انتظاری ناشی از نپذیرفتن از مطلوبیت این دوره کمتر شود.

ب) فرض کنید در آخرین مرحله بازی قرار داریم و بازیگر اول x* را به بازیگر دوم پیشنهاد می‌دهد. برای این که بازیگر ۲ قبول کند، باید:

- بازیگر ۱ در صورت نپذیرفتن بازیگر ۲ انگیزه خروج از بازی نداشته باشد: وقتی بازیگر ۲ پیشنهاد بازیگر ۱ را نمی‌پذیرد پس انتظار دارد ارزش زمان حاضر مطلوبیت دورهٔ بعدش بیشتر باشد یعنی حداقل مطلوبیتی که انتظار دارد در دورهٔ بعدی کسب کند $\frac{1-x^*}{\delta_2}$ است. این یعنی حداکثر مطلوبیت بازیگر ۱ در دورهٔ بعدی $1-\frac{1-x^*}{\delta_2}$ خواهد بود. از طرفی بازیگر ۱ می‌داند که اگر مطلوبیتش در دورهٔ بعدی از $\frac{x_1}{\delta_1}$ کمتر باشد برای او بهتر است در همین دوره از بازی خارج شود. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{x_1}{\delta_1}<1-\frac{1-x^*}{\delta_2}\rightarrow x^*>1-\delta_2(1-\frac{x_1}{\delta_1})$$

بازیگر ۲ انگیزه خروج از بازی نداشته باشد: مطلوبیت حاصل از خروج از بازی برای بازیگر ۲ x2 است. پس باید 1-x*>x2. پس تا زمانی که $x^*\in\left[1-\delta_2\left(1-\frac{x_1}{\delta_1}\right),1-x_2\right]$ بازیگران هیچ‌کدام انگیزهٔ خروج ندارند.

- بازیگر ۲ انگیزه نپذیرفتن نداشته باشد: اگر بازیگر ۲ نپذیرد، در این صورت باید انتظار داشته باشد در دوره‌های بعدی حداقل مطلوبیت $\frac{1-x^*}{\delta_2}$ به دست آورد. طبق بازهٔ به دست آمده در بالا داریم: $\frac{1-x^*}{\delta_2}\in[\frac{x_2}{\delta_2},1-\frac{x_1}{\delta_1}]$ یعنی حداکثر مطلوبیت بازیگر ۱ در دوره‌های بعدی در بازهٔ $[\frac{x_1}{\delta_1},1-\frac{x_2}{\delta_2}]$ خواهد بود. اما می‌دانیم طبق بخش الف بازیگر ۱ می‌تواند مطلوبیت بالاتری تا سقف 1-x2 کسب کند بنابراین بازیگر ۱ نیز نخواهد پذیرفت و دوباره به حالت اول بازی برمی‌گردیم با این تفاوت که تنزیل زمانی در مطلوبیت‌ها رخ داده است. پس بازیگر ۲ انگیزهٔ نپذیرفتن ندارد.

فصل ۴، تمرین ۱۸: مهرداد پورقاسم

با استفاده از قضیه‌ی اصل انحراف یک‌باره نشان می‌دهیم در زیربازی‌های مختلف بازیگران انگیزه‌ای برای تخطی ندارند.

زیربازی که با پیشنهاد سجاد آغاز می‌شود اگر سجاد استراتژی خودش را دنبال کند، تمام کیک را به دست می‌آورد و انگیزه‌ای برای انحراف ندارد.

زیربازی که با پاسخ جمشید آغاز می‌شود اگر جمشید پیشنهاد سجاد را قبول کند، سهمی از کیک به دست نمی‌آورد؛ اما اگر او پیشنهاد سجاد را رد کند، C_s- ۱ را پیشنهاد می‌دهد که برای جمشید پیامد C_s-C_j را به همراه خواهد داشت که چون از صفر کمتر است، جمشید انگیزه‌ای برای انحراف ندارد.

زیربازی که با پیشنهاد جمشید آغاز می‌شود اگر جمشید استراتژی خودش را دنبال کند و $C_s - ۱$ را پیشنهاد دهد، C_s را به دست می‌آورد؛ اما اگر او کمتر از این مقدار پیشنهاد دهد، سجاد پیشنهاد او را رد می‌کند و تمام کیک را برای خودش برمی‌دارد که برای جمشید پیامد $-C_j$ را به همراه خواهد داشت. درنتیجه، جمشید انگیزه‌ای برای انحراف ندارد.

زیربازی که با پاسخ سجاد آغاز می‌شود اگر سجاد پیشنهاد جمشید را قبول کند، $C_s - ۱$ را به دست می‌آورد. اگر پیشنهاد او را رد کند نیز، (۱و۰) را پیشنهاد می‌دهد که بازهم برای سجاد پیامد $C_s - ۱$ را به همراه خواهد داشت؛ بنابراین، جمشید انگیزه‌ای برای انحراف ندارد.

به‌طور خلاصه، در هر تعادل کامل زیربازی‌ها:

- سجاد همواره مقدار صفر را پیشنهاد می‌دهد و پیشنهادهای بیشتر از $C_s - ۱$ را قبول می‌کند.
- جمشید همواره $C_s - ۱$ را پیشنهاد می‌دهد و هر مقدار پیشنهاد از جانب سجاد را قبول می‌کند.