

Reaction Diffusion Equations and Pattern formation

M. Fotouhi
IPM-2010

ساده ترین مدل‌های رشد جمعیت

مدل لجستیک



$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

*Pierre François
Verhulst*

(1804-1849)

مدل رشد قطبی



$$\frac{dP}{dt} = aP$$

*Thomas Robert
Malthus*

(1766-1834)

مدك رقابتى



$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1x - c_1y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2x - c_2y)$$

مدك شكار و شكارچى



$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1x + c_1y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(a_2 - b_2x - c_2y)$$

مدلهای انتشاری

$u(x,t)$ چگالی جمعیت در نقطه x در زمان t

قانون Fick: جمعیت از نقاط با چگالی بالا به سمت نقاط با چگالی پایین حرکت می کند.

$$J(t,x) = -d(x)\nabla_x u(t,x) \quad \text{شار (flux):}$$

$$d(x) > 0 \quad \text{ضریب انتشار:}$$

$$\mathbf{t} \text{ مقدار جمعیت در ناحیه } \Omega \text{ در زمان} = \int_{\Omega} u(t, x) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} J(t, x) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} f(t, x, u) dx$$

$$\text{مقدار جمعیت در ناحیه } \Omega \text{ در زمان } t = \int_{\Omega} u(t, x) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} J(t, x) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} f(t, x, u) dx$$

نرخ تغییرات موضعی جمعیت

$$\mathbf{t} \text{ مقدار جمعیت در ناحیه } \Omega \text{ در زمان } = \int_{\Omega} u(t, x) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) dx = - \int_{\partial\Omega} J(t, x) \cdot \vec{n} ds + \int_{\Omega} f(t, x, u) dx$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x, t) dx + \int_{\Omega} f(t, x, u) dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(d(x) \nabla u(x, t)) + f(t, x, u)$$

مدل انتشاری لجستیک

$$\frac{dP}{dt} = d\Delta P + aP\left(1 - \frac{P}{N}\right)$$

مدل انتشاری رقابتی

$$\frac{du}{dt} = d_1\Delta u + u(a_1 - b_1u - c_1v)$$

$$\frac{dv}{dt} = d_2\Delta v + v(a_2 - b_2u - c_2v)$$

تفاوت عمده مدل‌های ODE و R-D

$$\begin{cases} U_t = F(U) \\ U(\circ) = U_\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_t = D\Delta U + F(U) \\ U(\circ, x) = U_\circ(x) \end{cases}$$

در مدل‌های R-D بقای موجودات تنها به مقدار اولیه جمعیت بستگی ندارد، بلکه علاوه بر پراکندگی جمعیت به شکل و اندازه محیط نیز وابسته است.

پایداری در مدل ODE $U_t = F(U)$

حالت‌های تعادل سیستم: $F(U_0) = 0$

تقریب خطی سیستم در نزدیکی حالت تعادل: $U_t = F'(U_0)(U - U_0)$

پایداری در مدل ODE $U_t = F(U)$

حالت‌های تعادل سیستم: $F(U_0) = 0$

تقریب خطی سیستم در نزدیکی حالت تعادل: $U_t = F'(U_0)(U - U_0)$

U_0 پایدار است اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه $F'(U_0)w = \lambda w$

منفی باشد. اگر $U(0) \approx U_0$ ، آنگاه

$$U(t) \approx \sum_{i=1}^n c_i \exp(\lambda_i t) w_i$$

پایداری در مدل ODE $U_t = F(U)$

حالت‌های تعادل سیستم: $F(U_0) = 0$

تقریب خطی سیستم در نزدیکی حالت تعادل: $U_t = F'(U_0)(U - U_0)$

U_0 پایدار است اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه $F'(U_0)w = \lambda w$

منفی باشد. اگر $U(0) \approx U_0$ ، آنگاه

$$U(t) \approx \sum_{i=1}^n c_i \exp(\lambda_i t) w_i$$

$$\lambda_1 = \max \lambda_i \Rightarrow U(t) \approx c_1 \exp(\lambda_1 t) w_1$$

پایداری در مدل R-D $U_t = D\Delta U + F(U)$

حالت‌های تعادل سیستم: $D\Delta v + F(v) = 0$

تقریب خطی سیستم در نزدیکی حالت تعادل:

$$U_t = D\Delta U + F'(v)U$$

پایداری در مدل R-D $U_t = D\Delta U + F(U)$

حالت‌های تعادل سیستم: $D\Delta v + F(v) = 0$

تقریب خطی سیستم در نزدیکی حالت تعادل:

$$U_t = D\Delta U + F'(v)U$$

جواب $v(x)$ پایدار است، اگر قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه

$$D\Delta U + F'(v)U = \lambda U$$

منفی باشد. (مقادیر ویژه، طیف گسسته و شمارا است)

مثال: مدل Fisher

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + au(1-u) & x \in (0, L), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

$v(x) = 0$ حالت تعادل است و تقریب خطی

$$u_t = du_{xx} + au, \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

مثال: مدل Fisher

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + au(1-u) & x \in (0, L), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

$v(x) = 0$ حالت تعادل است و تقریب خطی

$$u_t = du_{xx} + au, \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه:

$$\begin{cases} \phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \lambda_n = a - \frac{n^2\pi^2 d}{L} \end{cases}$$

مثال: مدل Fisher

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + au(1-u) & x \in (0, L), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \end{cases}$$

$v(x) = 0$ حالت تعادل است و تقریب خطی

$$u_t = du_{xx} + au, \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0$$

مقادیر ویژه و توابع ویژه:

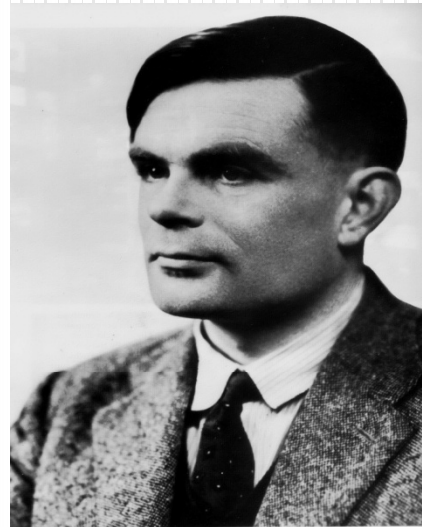
$$\begin{cases} \phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \lambda_n = a - \frac{n^2\pi^2 d}{L} \end{cases}$$

شرط پایداری: $L < \frac{\pi^2 d}{a}$

Turing Instability

$U_t = F(U)$ U حالت تعادل پایدار در مدل ODE.

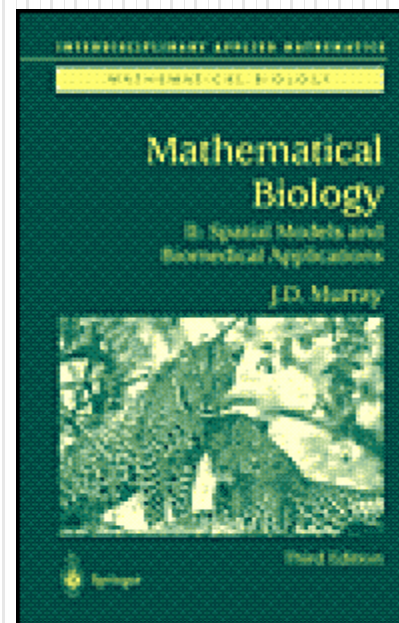
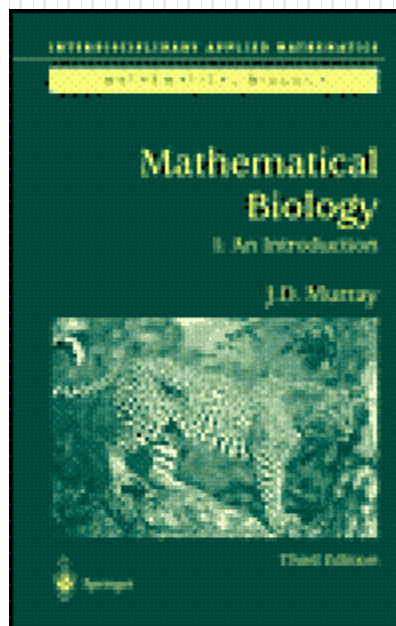
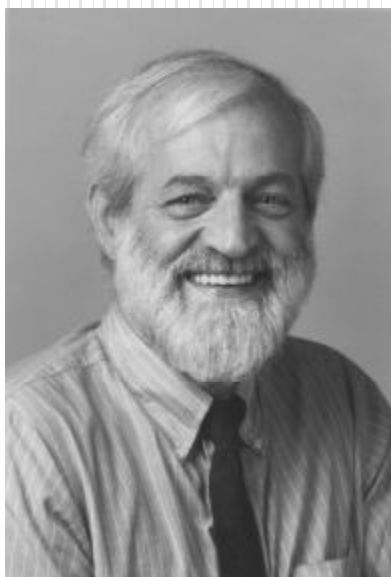
$U_t = D\Delta U + F(U)$ ولی در مدل R-D ناپایدار است



مثالی از ناپایداری Turing: چرا بدن حیوانات نقشهای متفاوتی میگیرند؟



جواب از Murray



Emeritus Professor

University of Washington, Seattle

Oxford University, Oxford

<http://www.amath.washington.edu/people/faculty/murray/>

Murray's theory

Murray suggests that a single mechanism could be responsible for generating all of the common patterns observed. This mechanism is based on a reaction-diffusion system of the *morphogen* prepatterns, and the subsequent differentiation of the cells to produce *melanin* simply reflects the spatial patterns of morphogen concentration.

Melanin: pigment that affects skin, eye, and hair color in humans and other mammals.

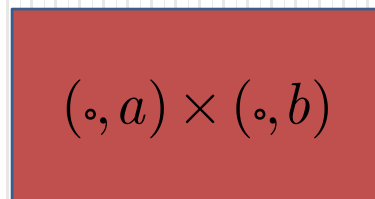
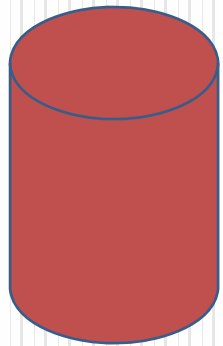
Morphogen: Any of various chemicals in embryonic tissue that influence the movement and organization of cells during morphogenesis by forming a concentration gradient.

مدل ساده شده

$$U_t = D_U \Delta U + \alpha - U - \rho R(U, V)$$

$$V_t = D_V \Delta V + \gamma(\beta - V) - \rho R(U, V)$$

$$R(U, V) = \frac{\delta UV}{e + \mu U + \varepsilon U^2}$$



ناحیه: مستطیل
شرایط مرزی: دم و سر (no flux)
بدن (تناوبی)

$$U_x \Big|_{x=0,a} = V_x \Big|_{x=0,a} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u + \lambda f(u, v) \\ v_t = d\Delta v + \lambda g(u, v) \\ u_x(t, 0, y) = u_x(t, a, y) = 0, \quad u(t, x, 0) = u(t, x, b), u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, b) \\ v_x(t, 0, y) = v_x(t, a, y) = 0, \quad v(t, x, 0) = v(t, x, b), v_y(t, x, 0) = v_y(t, x, b) \end{array} \right. \quad (x, y) \in (0, a) \times (0, b), t > 0$$

شرط پایداری حالت تعادل (u_0, v_0) ، در مدل بدون انتشار:

$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}, \quad \det J = f_u g_v - f_v g_u > 0, \quad \text{tr} J = f_u + g_v < 0$$

شرط ناپایداری حالت تعادل (u_0, v_0) ، در مدل همراه با انتشار:

$$D\Delta\Psi + \lambda J\Psi = \mu\Psi \quad \Psi(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_x(0, y) = \Psi_x(a, y) = 0$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi(x, b), \quad \Psi_y(x, 0) = \Psi_y(x, b)$$

لااقل یکی از مقادیر ویژه μ در شرط $\text{Re}\mu \geq 0$ صدق کند.

$$\Psi(x, y) = V_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

$$(\lambda J - k_{m,n}^p D)V_{m,n} = \mu V_{m,n} \quad k_{m,n}^p = \frac{n^p \pi^p}{a^p} + \frac{m^p \pi^p}{b^p}$$

$$\text{tr}(\lambda J - k_{m,n}^p D) = \lambda \text{tr}J - k_{m,n}^p (1 + d) < 0$$

$$\det(\lambda J - k_{m,n}^p D) = \lambda^p \det J - \lambda k_{m,n}^p (df_u + g_v) + dk_{m,n}^p < 0$$

$$h(w) = \lambda^p \det J - \lambda w (df_u + g_v) + dw^p$$

$$h(0) = \lambda^p \det J > 0, \quad h(\infty) = \infty$$

تنها برای تعداد متناهی $k_{m,n}^p$ ، خواهیم داشت $h(k_{m,n}^p) < 0$

مینیمم تابع $h(w)$ در نقطه $w_0 = \frac{\lambda(df_u + g_v)}{pd}$ به دست می آید.

$$h(w_0) = \lambda^p \left(\det J - \frac{(df_u + g_v)^p}{pd} \right) < 0$$

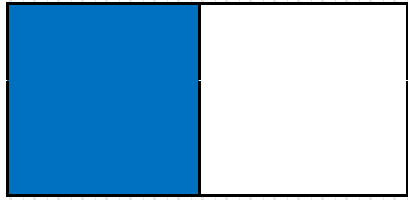
شرایط ناپایداری Turing

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda f(u, v) \\ v_t = d\Delta v + \lambda g(u, v) \end{cases}$$

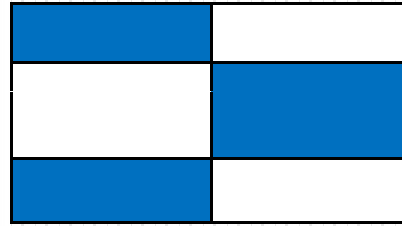
$$J = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}, \quad \text{tr}J = f_u + g_v < 0, \quad \det J = f_u g_v - f_v g_u > 0$$

$$df_u + g_v > 0, \quad (df_u + g_v)^2 - 4d \det J > 0$$

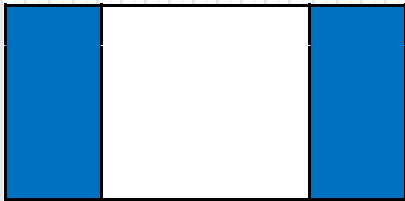
$$\begin{pmatrix} u(t, x, y) \\ v(t, x, y) \end{pmatrix} \approx \sum_{h(k_{m,n}^r) < 0} e^{\mu_{m,n} t} V_{m,n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$



$$n = 1, m = 0$$



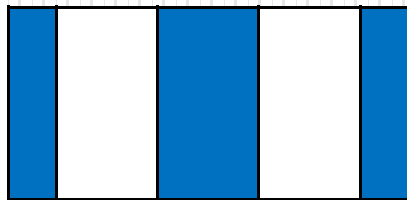
$$n = 1, m = 1$$



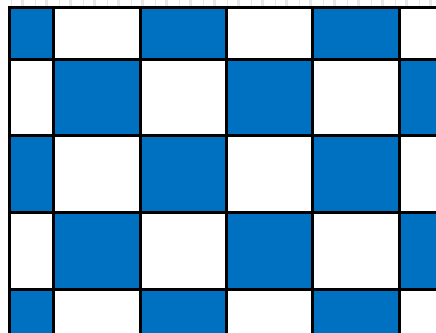
$$n = 2, m = 0$$



$$n = 2, m = 1$$



$$n = 3, m = 0$$



$$n = 3, m = 2$$

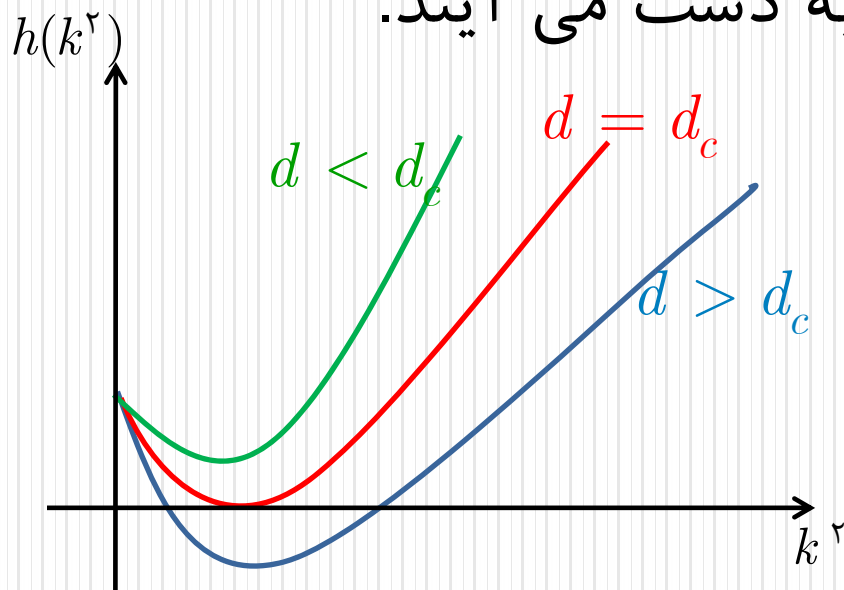
۱- نقشه‌های شکل گرفته متناسب توابع ویژه (مُد) ناپایدار هستند.

۲- مُدهای ناپایدار با پارامترهای (d, λ) مشخص می‌شوند که

$$d = \frac{D_V}{D_U}, \quad \lambda = \frac{1}{D_U}$$

۳- نقشه‌ها وقتی ظاهر می‌شوند که مقدار d بزرگ باشد. و این نقشه‌ها

متناظر دنباله $k_{m,n}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{4m^2 \pi^2}{b^2}$ به دست می‌آیند.



۴- وقتی b کوچک باشد، نقشه‌های راه راه محتمل تر هستند. وقتی b بزرگ باشد امکان نقشه‌های خال خالی می‌رود.

$$\frac{b}{a} = 2 : \text{مثال ۱}$$

$$k_{0,0} = 0, k_{0,1} = -\pi^2, k_{1,1} = -2\pi^2, k_{2,0} = k_{0,2} = -4\pi^2$$
$$k_{2,1} = k_{1,2} = -5\pi^2, k_{2,2} = -8\pi^2, k_{3,0} = k_{0,3} = -9\pi^2, \dots$$

$$\frac{b}{a} = 20 : \text{مثال ۲}$$

$$k_{0,0} = 0, k_{1,0} = -\pi^2, k_{2,0} = -4\pi^2, k_{3,0} = -9\pi^2$$
$$k_{4,0} = -16\pi^2, \dots, k_{10,0} = k_{0,10} = -100\pi^2, \dots$$

قضیه: نقش بدن مارها همیشه راه راه (یا حلقوی) است، و نمی تواند
خال خالی باشد.

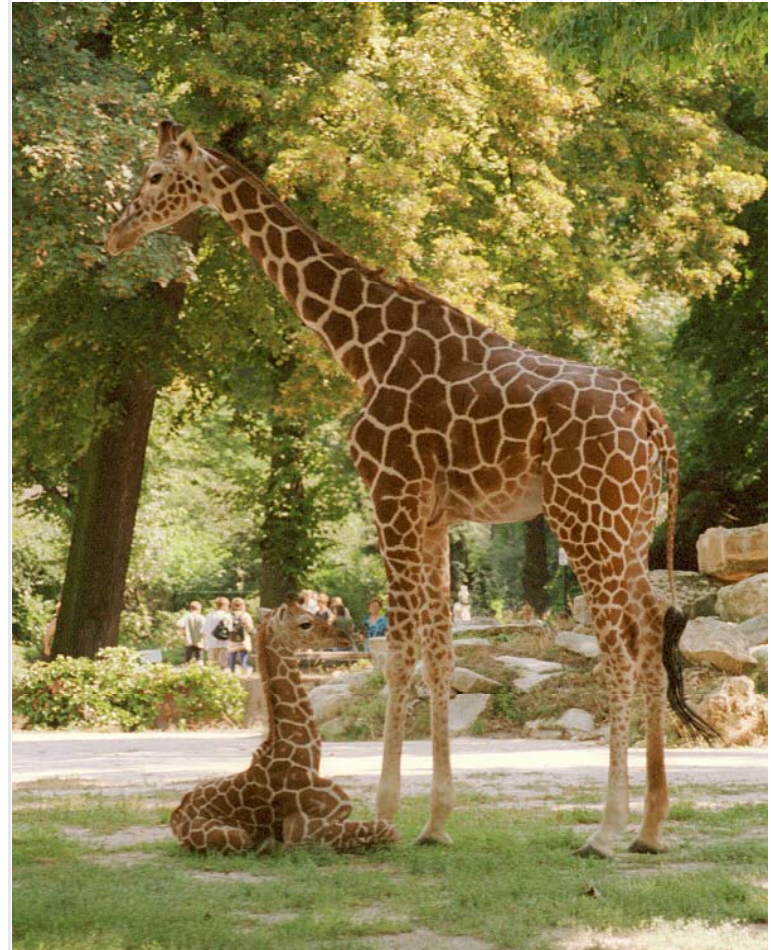
Snake pictures (stripe patterns)



قضیه: هیچ حیوانی با بدن راه راه و دم خال خالی وجود ندارد، اما برعکس حیواناتی وجود دارند با بدن خال خالی و دم راه راه.
(دم همیشه نازکتر از بدن است.)



Spotted body and striped tail



Natural Patterns of $\cos(kx)$



$\cos(x)$



Provided by Michael von Luttwitz



$\text{Cos}(2x)$



© Tony Northrup, www.northrup.org



Tian Tian & Mei Xiang
The National Zoo
Photo by Jessie Cohen/SNZP

$$\cos(2x)$$