1

Special Relativity

Fall 2020

Lecture Note 16

نسبیت خاص

پاییز ۱۳۹۹

درس‌نامه ۱۶

الکترودینامیک ارتباط تنگاتنگی با نسبیت خاص دارد. یکی از عجایب تاریخ فیزیک آن است که نظریه‌ای را که ماهیتاً نسبیتی بوده است را پیش از نسبیت خاص کشف کردیم. در ابتدای این درس در رابطه با تناقض در آزمایش‌های اتر و نقش مهم الکترودینامیک در کشف نسبیت بحث داشتیم. هم اکنون موقعیت مناسبی است که این نظریه را به صورت لورنتز هموردا - Lorentz Covariant بنویسیم. بدین معنا که قوانین و معادلات حرکت را بر اساس اسکالر لورنتس، چاربردارها و چارتانسورها بیان کنیم. معادلات ماکسول در واحدهای طبیعی $c=1$ به صورت زیر است.

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho & (1\text{-}a)\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & (1\text{-}b)\\
\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (1\text{-}c)\\
\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (1\text{-}d)
\end{cases}
$$

که ρ و $\vec{J}$ چگالی بار و جریان است که در معادله پیوستگی بار به صورت زیر صدق می‌کند.

$$
(2)\quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0
$$

کلید مهم نسبیتی بودن معادلات ماکسول در استفاده از پتانسیل‌های اسکالر و برداری EM است.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (3\text{-}a)$$

(3)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (3\text{-}b)$$

نکته مهم درباره این پتانسیل‌ها، وجود آزادی پیمانه‌ای است. به این معنا

(4)

$$\Phi \to \Phi - \dot{\Lambda}$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$$

که Λ تابعی از فضا-زمان است.

$$\Lambda = \Lambda(x, t)$$

این آزادی پیمانه‌ای بدین معنا است که میدان‌های $\vec{E}$ ، $\vec{B}$ تحت این تبدیلات تغییر نمی‌کنند.

(5) (a) $$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$ زیرا $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda = 0$

کرل گرادیان صفر است

(b) $$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi - \dot{\Lambda}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda)$$

$$= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{\nabla}\dot{\Lambda} - \partial_t \vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}$$

مشتق جزئی زمان و مکان جابجا می‌شوند !!

به تبدیلات رابطه (4) تبدیل پیمانه‌ای gauge transformation می‌گویند.

این آزادی پیمانه‌ای به ما این فرصت را می‌دهد که در یک پیمانه مشخص معادلات ماکسول را بنویسیم.

(6)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

این پیمانه خاص با نسبیت خاص سازگار است.

حال با استفاده از پیمانه لورنتس، معادلات ماکسول را بازنویسی می‌کنیم.

$$(7)\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \;\rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\left[-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=\rho$$

$$-\nabla^2\phi-\partial/\partial t\,\underbrace{[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}]}_{-\partial\phi/\partial t}=\rho \;\rightarrow\; \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=0$$

$$\rightarrow\quad \Box\phi=\rho$$

که عملگر box را به صورت روبرو تعریف کرده‌ایم $\Box\equiv\partial^2/\partial t^2-\nabla^2$. به طور مشابه برای معادله دیگر هم ماکسول داریم.

$$(8)\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}\,\underbrace{\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]}_{=0\ \text{پیمانه لورنتس}}+\left(\partial^2/\partial t^2-\nabla^2\right)\vec{A}=\vec{J}$$

$$\Box\vec{A}=\vec{J}$$

در نتیجه معادلات حاکم بر پتانسیل‌ها به صورت زیر است:

$$(9)\qquad \begin{cases}\Box\phi=\rho\\ \Box\vec{A}=\vec{J}\end{cases}$$

با رفتن به پیمانه لورنتس و بازنگری معادلات ماکسول با استفاده از چارپتانسیل، ترکیب می‌شوند

که دو تا چاربردار به صورت زیر تعریف کنیم

چاربردار جریان

(10) $$j^\mu = (\rho, \vec{J})$$

چاربردار پتانسیل

(11) $$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

در نتیجه معادلات (9) به صورت زیر خواهند بود.

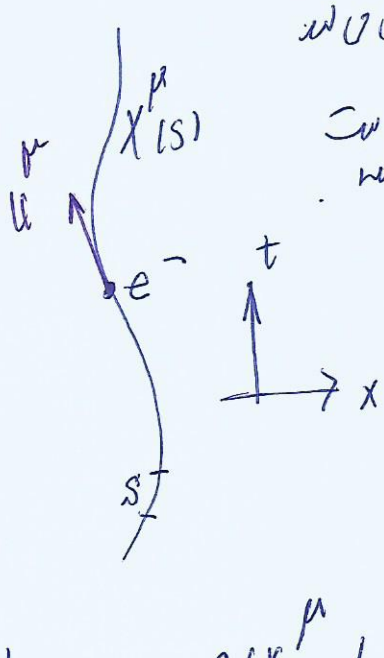
(12) $$\boxed{\Box A^\mu = j^\mu}$$

به نظر می‌رسد که نتایج کاملاً درست است و شکل هم‌وردای لورنتسی معادلات ماکسول را به دست آورده‌ایم.

البته باید توجه داشته باشید که دقیق‌تر آن خواهد بود که نشان دهیم A^μ و j^μ چاربردار است.

برای این هدف می‌خواهیم به صورت مستقل نشان دهیم که j^μ چاربردار است. مطابق شکل زیر

فرض کنید که یک الکترون با بار e جهان‌خط $X^\mu(s)$ را دنبال می‌کند



که $X^\mu(s)$ جهان‌خط الکترون و $s=\tau$ زمان ویژه است

بردار مماس جهان خط الکترون

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

حال چگالی بار را به صورت زیر می‌نویسیم.

(13) $$\rho(x^\mu) = e\,\delta^{3D}(\vec{x} - \vec{X}(t)) \qquad X^0 = x^0 = t$$ با فرض همزمانی

همچنین چگالی جریان برابر است با

$$\vec{j} = e \frac{d\vec{x}}{dt} \delta^{3D}(\vec{x} - X(t)) \tag{14}$$

حال ترم زمان را نیز اضافه می‌کنیم

$$\rho(x^\mu) = e \int dt\, \delta(X^0 - x^0) \delta^{3D}(\vec{x} - \vec{X}) \tag{15}$$

$$= e \int d\tau \frac{dt}{d\tau} \delta^{4D}(x^\mu - X^\mu)$$

$$\vec{j} = e \int dt \frac{d\vec{x}}{dt} \delta(X^0 - X^0) \delta^{3D}(\vec{x} - \vec{X}) = e \int d\tau \frac{d\vec{x}}{d\tau} \delta^{4D}(x^\mu - X^\mu) \tag{16}$$

حال می‌توانیم چهاربردار j^μ را به صورت زیر بنویسیم.

$$j^\mu = e \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^{4D}(x^\mu - X^\mu) = e \int d\tau\, u^\mu \delta^{4D}(x^\mu - X^\mu) \tag{17}$$

از آن جایی که $d\tau$ ، $\delta^{4D}(x^\mu - X^\mu)$ ، e ناوردای لورنتسی است ، u^μ چاربردار ، از این رو j^μ چاربردار است. حال به معادله ناهمگن ماکسول مجدد توجه بفرمایید.

$$\Box A^\mu = j^\mu \tag{18}$$

$$\underset{\text{ناوردای لورنتس}}{\Box}\quad\quad \underset{\text{چاربردار}}{j^\mu}$$

با توجه به این که j^μ چاربردار است و عملگر $\Box$ ناوردای لورنتسی ، از این رو A^μ نیز چاربردار است.

حال جالب است که نسبیت لورنتس ناوردایی زیر ، پایستگی بار را به دست می دهد.

(19) $$\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0$$

$$\partial\rho/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

اگر $\partial_\mu j^\mu = 0$ باشد، در هر دستگاه دلخواهی این نسبت صفر است.

(20) $$\partial_\mu j^\mu = 0 = \partial'_\mu j'^\mu$$

از سوی دیگر پیمانه لورنتس $\partial\phi/\partial t + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ را به شکل نسبیتی می توان نوشت:

(21) $$\partial_\mu A^\mu = A^\mu{}_{,\mu} = 0 \Rightarrow \partial_0 A^0 + \partial_i A^i = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

نماد مشتق

نکته مهم دیگر، توجه کنید $\partial_\mu = (\partial_0 , \partial_i) = (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$ که مشتق فضایی "+" اپراتور گرادیان است.

(22) $$\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i) = (\partial_0, \vec{\nabla}) \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu \equiv \Box = \partial_0^2 - \nabla^2$$

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})$$

حال با تعریف مشتق ∂_μ می توانیم تبدیل پیمانه ای را به صورت زیر بنویسیم.

(23) $$\begin{cases} A^\mu \to A^\mu - \eta^{\mu\nu}\partial_\nu \Lambda = A^\mu - \partial^\mu \Lambda(\vec{x},t) \\ A^0 \to A^0 - \partial^0 \Lambda = \phi - \partial/\partial t \, \Lambda \\ A^i \to A^i - (-\nabla \Lambda) = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \end{cases}$$

اکنون که چاربردار پتانسیل را تعریف کرده ایم. برای نشان دادن میدان های الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب هم وردای لورنتسی، تانسور مرتبه ۲، شدت میدان الکترومغناطیسی را که به آن ۲-فرم 2 form می گویند، به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \tag{24}$$

برای نمایش شکل ماتریسی این تانسور مولفه های زیر را محاسبه می کنیم.

$$a: \quad F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{\partial}{\partial t} A_1 - \partial_x \phi = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \phi_{,x} = +E_x \tag{25}$$

$$b: \quad F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -A^2_{\;,x} + A^1_{\;,y} = -B_z$$

توجه کنید که در روابط های فوق $(x=1, y=2, z=3)$ می باشد.

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

به طور مشابه تمام ترم ها را می توان محاسبه کرد. از این رو

ستون ν

مولفه 0i، میدان الکتریک

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ \hline -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right) \tag{26}$$

پادمتقارن

قسمت ij ماتریس مولفه های مغناطیسی

ماتریس پادمتقارن $F^{\mu\nu}$ - پادوردا را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\,\eta^{\nu\sigma}\,F_{\sigma\rho} \qquad (27)$$

معادله ماکسول را با توجه به مشتق میدان ها می توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu \qquad (28)$$

$$= \underbrace{\partial^\mu \partial_\nu A^\nu}_{\text{صفر - پیمانه لورنتس}} - \Box A^\mu = -j^\mu$$

در رابطه بالا به طور واضح می توان مشتقات جزئی را جابه جا کرد، از طرف دیگر از رابطه $\Box A^\mu = j^\mu$ نیز استفاده شده است. در نتیجه معادله ماکسول به صورت زیر به دست می آید.

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -j^\mu \qquad (29)$$

حال از مشتق رابطه (29) را حساب کنیم

$$(30) \qquad \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{پادمتقارن}}{}_{,\underbrace{\nu\mu}_{\substack{\text{متقارن} \\ \text{صفر}}}} = -j^\mu{}_{,\mu} = 0$$

در نتیجه رابطه پیوستگی $j^\mu{}_{,\mu} = 0$ است.

حال سؤال مطرح می‌شود که معادلات همگن ماکسول را چگونه به دست آوریم. رابطه چرخشی زیر

$$F_{\mu\nu,\rho} + F_{\nu\rho,\mu} + F_{\rho\mu,\nu} = 0 \qquad (31)$$

از سوی دیگر این معادله را با استفاده از دوگان $F_{\mu\nu}$ که به شکل زیر تعریف می‌شوند نیز به دست می‌آوریم.

$$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \qquad (32)$$

که $^*F^{\mu\nu}$ تانسور میدان دوگان، $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ تانسور رتبه ۴ - پادورا لوی چویتا است. که

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{اندیس تکراری} \\ +1 & 0123 \ \text{جابجایی زوج} \\ -1 & 0123 \ \text{جابجایی فرد اندیس} \end{cases} \qquad (33)$$

به طور مثال

$$\varepsilon^{0123} = +1 \qquad \varepsilon^{1203} = +1$$

$$\varepsilon^{1023} = -1 \qquad \varepsilon^{3213} = 0 \qquad (34)$$

از این رو دوگان $^*F^{\mu\nu}$ به صورت زیر خواهد بود.

(35)

$$^*F^{01} = \frac{1}{2}\varepsilon^{01\nu\rho}F_{\nu\rho} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon^{0123}F_{23}}_{+1\,(-B_x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon^{0132}F_{32}}_{(-1)(B_x)}$$

$$= -B_x$$

به طور مشابه $^*F^{02} = -B_y$ و $^*F^{03} = -B_z$ برای مولفه‌های فضا-زمانی

(36)

$$^*F^{12} = \frac{1}{2}\varepsilon^{12\nu\rho}F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon^{1203}F_{03} + \frac{1}{2}\varepsilon^{1230}F_{30}$$

(37)

$$\varepsilon^{1203} \underset{1}{=} \varepsilon^{1230} \underset{2}{=} \varepsilon^{0123} = +1\,(E_z) + \frac{1}{2}(-1)(-E_z) = E_z$$

جایگشت زوج

و به طور مشابه $^*F^{23}$ و $^*F^{13}$ را می‌توان محاسبه کرد. از این رو

(38)

$$\varepsilon^{1230} \underset{1}{=} \varepsilon^{1203} = -1$$

جایگشت فرد

(39)

$$^*F^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ \hline B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{array}\right)$$

که بردار سمت $0i$ میدان مغناطیسی

قسمت فضایی میدان الکتریکی

پایان ۱۱م