تمرین سری چهارم نسبیت خاص - دکتر شانت باغرام

صبا اعتضاد رضوی
s_etezadrazavi@yahoo.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

کوروش علامه
kuroshallame@gmail.com

Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre؛ elle peut seulement être plus commode.
(One geometry cannot be more true than another؛ it can only be more convenient.)
Henri Poincaré، La science et l'hypothèse

-جواب تمرین ها را به ایمیل TA.baghram.1@gmail.com ارسال کنید.
-مهلت ارسال تا شنبه ۱۵ آذر ماه، ساعت ۲۳:۵۹ است.
-در صورتی که میخواهید تمرین را با تاخیر تحویل داده و از ۷ روز مجاز تاخیری خود استفاده کنید، حتما در بالای صفحه ی اول تمرین، تعداد روز هایی که استفاده میکنید را واضح و خوانا بنویسید.

در این سری تمرین قصد داریم با ابزار (۴)-بردارها اندکی مفاهیم نظری تر نسبیت خاص را بررسی کنیم، همچنین اندکی به دینامیک نسبیتی خواهیم پرداخت. دقت کنید که سوالاتی که باید به آنها پاسخ دهید در جعبه های سیاه قرار دارند. در صورت وجود مشکل به دستیار های آموزشی درس ایمیل بزنید.

۱ گروه لورنتز-بخش اول

ابتدا برای مختصات از دید ناظر لخت دلخواه نوتاسیون خود رو یاد آور میشویم،

$$x^0 = ct, \quad (x^1, x^2, x^2) = \boldsymbol{x}. \tag{۱}$$

رایج است که اندیس های لاتین $i, j, k, \ldots$ برای مولفه های فضایی مختصات به کار روند. اگر بخواهیم به اندیس های کلی فضا-زمانی نگاه کنیم از اندیس های یونانی مثل $\mu, \nu, \rho, \ldots$ استفاده میکنیم.
با قرار داد و نوتاسیون گفته شده میتوان یک نقطه از جهان خط یک ذره را به صورت زیر نشان داد:

$$x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x})^T. \tag{۲}$$

حالا برای دو رویداد که در جهان خط یک فوتون قرار دارند از اصل ثابت بودن سرعت نور داریم:

$$(x_B^0 - x_A^0)^2 - (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)^2 = 0. \tag{۳}$$

با استفاده از تعریف یک ضرب داخلی روی فضای (۴)-بردارها یا بردار های لورنتزی، که میتوانیم آنرا به صورت یک تنسور رنک ۲ هموردا ببینیم و فرم ماتریسی اش در پایه مناسب با وارونش یکی است، داریم:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{۴}$$

حال عبارت شماره (۳) را به صورت ضرب داخلی یک بردار لورنتزی در خودش مینویسیم:

$$(x_B^\mu - x_A^\mu) g_{\mu\nu} (x_B^\nu - x_A^\nu) = 0. \tag{۵}$$

دقت کردیم که در بالا و از این پس همواره قرارداد جمع اینشتین را استفاده خواهیم کرد. همچنین با استفاده از ضرب داخلی ای که در اختیار داریم میتوانیم به طور یکتا برای هز بردار x^μ ، یک همبردار (بردار دوگان) تعریف کنیم:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\boldsymbol{x})^T. \tag{۶}$$

* * *

توضیحات بیشتر: تنسور متریکی که در بالا از ضرب داخلی فضا بدست آورده ایم، دارای خاصیت مثبت معین بودن که از ضرب داخلی های آشنا در جبر خطی انتظار داریم نیست. باید توجه کنیم که به جای خاصیت:

$$g(u,u) \geq 0 \quad \forall u \ \in V, \tag{۷}$$

این ضرب خاصیت ناواگنی را داراست:

$$if \ \ g(u,v) = 0 \ \ for \ \forall v \ \ then \ \ u = 0. \tag{۸}$$

خاصیت نا واگنی، در صورتی که ضرب مثبت معین باشد، با توجه به دو خاصیت دیگر ضرب (دوخطی بودن و متقارن بودن) نتیجه میشود. در نتیجه خاصیت ناواگنی ضعیف تر از مثبت معین بودن است و کار ما ناسازگار نیست.
نکته دیگری که لازم به ذکر است آن است که ما در بالا از x^μ هم به عنوان مختصات تعبیر کردیم و هم یک بردار. این کار ما در نسبیت خاص اشکالی ندارد چراکه فضازمان ما ساختار هندسی مشابه با $\mathbb{R}^4$ دارد که دارای ساختار طبیعی برداری است.

* * *

اصل ثابت بودن سرعت نور بیان میکند که سرعت نور در همه ی دستگاه ها و در همه ی جهات یکسان و برابر با c است. با نوتاسیون تعریف شده در بالا این اصل معادل است با:

$$(x^\mu_B - x^\mu_A) g_{\mu\nu} (x^\nu_B - x^\nu_A) = 0 = (x'^\mu_B - x'^\mu_A) g_{\mu\nu} (x'^\nu_B - x'^\nu_A) = 0, \tag{۹}$$

که در بالا مختصات پرایم دار و بی پرایم بیانگر مختصات فوتون در دو رویداد در جهان خطش از نظر دو ناظر مختلف است.
گر تبدیل های فیزیکی قرار است با نسبیت خاص سازگار باشند، باید طوری تعیین شوند که خاصیت بالا را ارضا کنند. همچنین انتظار داریم که هم خطی بین نقاط از نظر ناظر های مختلف حفظ شود. ریاضیدان ها به چنین تبدیل هایی، تبدیل های آفین میگویند، و ثابت میکنند که کلی ترین تبدیل آفین به صورت:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{۱۰}$$

است که در آن Λ^μ_ν یک ماتریس رو فضای برداری است و a^μ یک بردار ثابت است.

۱.۱ الف)

با اعمال تبدیل بالا و درخواست برقراری معادله (۹) و همچنین درخواست عدم جابه جایی زمانی بین رویداد ها نشان دهید که برای هر دو رویداد نورگونه:

$$\Lambda^\sigma_\mu g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau_\nu = \alpha g_{\mu\nu}. \tag{۱۱}$$

که در بالا α یک عدد مثبت ثابت است.

تبدیلی که در (۱۱) صدق کند، نوع خاصی از تبدیلی است که در فیزیکی نظری و هندسه آنرا با تبدیل همدیس یا $Conformal$ میشناسند. این تبدیلات در صورتی توصیف کننده جهان واقعی ما میبودند که همه ی ذرات بی جرم باشند.
برای تعمیم خاصیت بالا به خم های غیر نورگونه، باید توجه کرد که انتظار نداریم در قوانین فیزیک ناظر های مختلف فواصل نقاط فضا-زمان را تحت مقیاس های گوناگون ببینند. با این انگیزه و با توجه به مثبت بودن α ، تبدیلات لورنتز با به عنوان تبدیلاتی تعریف میکنیم که دارای خاصیت زیر اند:

$$A \ Lorentz \ transformation \ is \ a \ transformation \ that \ satisfies: \ \Lambda^\sigma_\mu g_{\sigma\tau} \Lambda^\tau_\nu = g_{\mu\nu}. \tag{۱۲}$$

به تبدیلی به فرم (۱۰) که ماتریس Λ^μ_ν در آن در (۱۲) صدق کند، یک تبدیل لونتز ناهمگن یا یک تبدیل پوآنکاره گوییم یعنی تبدیل پوانکاره ای که در آن $a^\mu = 0$ باشد یک تبدیل لورنتز است.
با توجه به تعریف (۱۲) میتوانیم ببینیم که تبدیلات پوآنکاره، تبدیلاتی هستند که برای هر دو رویدادی (نه لزومن نورگونه) همواره ضرب داخلی لورنتزی را از نظر فرم و مقدار ناوردا نگاه میدارند:

$$(x^0_B - x^0_A)^2 - (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)^2 = (x'^0_B - x'^0_A)^2 - (\boldsymbol{x}'_B - \boldsymbol{x}'_A)^2 \tag{۱۳}$$

۲.۱ ب)

نشان دهید که تبدیلات پوآنکاره یک گروه میسازند. همچنین نشان دهید مجموعه تبدیلات لورنتز به معنای تبدیلاتی که در (۱۲) صدق میکنند، یک زیر گروه از گروه پوآنکاره هستند.
سپس نشان دهید برای هر تبدیل لورنتز $(det(\mathbf{\Lambda}))^2 = 1$. این بدان معناست که تبدیلات لورنتز به دو زیرمجموعه با $det(\mathbf{\Lambda}) = 1$ یا $det(\mathbf{\Lambda}) = -1$ ، تقسیم میشوند. در ادامه نشان دهید برای هر تبدیل لورنتز، $(\Lambda^0_0)^2 \geq 1$. این نیز بیان میکند تبدیلات لورنتز به دو زیر مجموعه با $\Lambda^0_0 \geq 1$ یا $\Lambda^0_0 \leq -1$ تقسیم میشوند.
پس با استدلالی که کردید گروه لورنتز (L) به ۴ زیر مجموعه، $L^\uparrow_+$ ، $L^\uparrow_-$ ، $L^\downarrow_+$ و $L^\downarrow_-$ تقسیم میشود، که فلش ها برای علامت عنصر اول و + و − برای علامت دترمینان است.
نشان دهید زیر مجموعه $L^\uparrow_+$ با $det(\mathbf{\Lambda}) = 1$ و $\Lambda^0_0 \geq 1$ یک زیر گروه از گروه لورنتز است. به این زیر گروه، $proper\ orthochronous\ Lorentz\ subgroup$ گویند و این زیر گروه در نسبیت خاص مد نظر ما است.

در اینجا لازم است مفهوم گروه لی را مطرح کنیم. در فیزیک اکثر گروه هایی که با آنها کار میکنیم دارای پارامتر های پیوسته هستند، به طور دقیق تر میتوان آنها را به طور موضعی مانند یک زیرمجموعه از فضای اقلیدسی دید، مثلن فضای یک گروه ماتریسی ۱۶ درایه ای را میتوان با فضای ۱۶ تایی های حقیقی به طور موضعی هم ارز دانست. به جنین گروه های پیوسته ای گروه لی گویند.
برای ما کافی است که گروه لورنتز را به صورت گروهی از ماتریس ها ببینیم که درایه های آنها در پیوستاری از اعداد حقیقی قرار دارند. برای اینکه گروهی، گروه لی باشد از تعریف بالا واضح است برای آنکه شرط عضو خنثی برایش برقرار باشد، باید بتوان از هر عضو آن به طور پیوسته به عضو خنثی رسید.

۳.۱ ج)

با استدلال (نه لزومن دقیق) با استفاده از مفهومی که در بالا گفتیم، استدلال کنید که چرا $L^\uparrow_+$ زیر گروه لی برای گروه لورنتز است. و همچنین استدلال کنید که چرا ۳ بخش دیگر گروه لورنتز نمیتوانند زیر گروه لی باشند.

حال به یافتن فرم اعضای گروه لورنتز میپردازیم. با اینکه چندین بار روی این مساله بحث کرده ایم، این بار رویکردی نظری و کلی خواهیم داشت.
از تبدیلات ویژه لورنتز یا خیز ها شروع میکنیم.

۴.۱ د)

فرض کنید یک ناظر O ذره ای را در حالت سکون میبیند و ناظر دیگر O' آنرا با سرعت v میبیند. برای جابه جایی های کوچک در جهان خط رابطه $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$ را در نظر بگیرید. همچنین تعریف گروه لورنتز را به یاد آورید. نشان دهید برای یک خیز کلی:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \Lambda^i_0 = \beta^i\gamma. \tag{۱۴}$$

همانطور که پیشتر گفتیم اندیس های لاتین برای مختصات فضایی هستند. پس با محاسبه بالا تبدیل خیز کلی به صورت زیر است:

$$L(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\frac{v^k}{c} \\ \gamma\frac{v^i}{c} & T^{ik} \end{pmatrix}. \tag{۱۵}$$

حال برای عناصر T^{ik} پیشنهاد میکنیم:

$$T^{ik} = \delta^{ik} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{v^i v^k}{c^2}. \tag{۱۶}$$

نشان دهید با این پیشنهاد تبدیل $L(\boldsymbol{v})$ در بالا واقعن یک تبدیل از گروه $L^\uparrow_+$ است.

در محاسبه بخش (د) احتمالن چند سوال برایتان مطرح است، اول اینکه اصلن تعریف خیز چیست؟ چرا که ما صرفن یک صورتبندی برای دو ناظر متصور شدیم و به تبدیل بین آنها خیز گفتیم.
دوم آنکه در محاسبه از جابه جایی های کوچک استفاده کردیم که شاید اندکی نادقیق بنظر برسد. و در آخر ما صرفن یک فرم برای T^{ik} پیشنهاد کردیم. این کار به ما هیچ چیزی از کلیت و یکتایی فرم بدست آمده در بالا نمیگوید.
برای پاسخ به تمام سوالات بالا کافی است که تبدیل $L(\boldsymbol{v})$ که در بالا نشان دادید لورنتز است را صرفن به عنوان یک فرم تبدیل لورنتز بپذیرید و صبر پیشه کنید تا قضیه زیبایی را در ادامه اثبات کنیم.

پیش از آن یک مشاهده کوچک میکنیم. به جز فرمی که در بالا برای گروهی از تبدیلات لورنتز بدست آوردیم فرم دیگری نیز به سادگی بدست می آید.

۵.۱ ه)
توجیه کنید که تبدیلاتی به فرم

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} \in SO(3), \tag{۱۷}$$

در $L_+^\uparrow$ قرار دارند.(به یاد می آوریم که اعضای گروه $SO(3)$ ماتریس هایی حقیقی ۳ در ۳ با خواص $R^T R = I$ و $det(R) = 1$ هستند)

مشاهده بالا بیان میکند که گروه دوران های سه بعدی زیرگروه گروه لورنتز است. حال به مرحله ای رسیدیم که قضیه اساسی تجزیه تبدیلات لورنتز را بیان کنیم.

قضیه تجزیه: هر تبدیل $\boldsymbol{\Lambda} \in L_+^\uparrow$ را میتوان به طور یکتا به صورت ضرب یک تبدیل به فرم (۱۴) و یک دوران نوشت. به طور دقیق تر:

$$\forall \boldsymbol{\Lambda} \in L_+^\uparrow : \boldsymbol{\Lambda} = L(\boldsymbol{v})R \ with \ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} \in SO(3). \tag{۱۸}$$

پارامتر های این تبدیل به صورت زیر مشخص میشوند:

$$\frac{v^i}{c} = \frac{\Lambda_0^i}{\Lambda_0^0}, \quad R^{ik} = \Lambda_k^i - \frac{1}{1+\Lambda_0^0}\Lambda_0^i \Lambda_k^0 \tag{۱۹}$$

حال در چند قدم قضیه ی بالا را اثبات میکنیم.

۶.۱ و)
ابتدا نشان دهید که سرعت تعریف شده در رابطه ی (۱۸) واقعن یک سرعت است، به عبارت دقیقتر نشان دهید:

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} \leq 1. \tag{۲۰}$$

این بیان میکند که میتوان یک تبدیل $L(\boldsymbol{v})$ خوش تعریف به صورت زیر ساخت:

$$L_0^0(\boldsymbol{v}) = \Lambda_0^0, \ \ L_0^i(\boldsymbol{v}) = L_i^0(\boldsymbol{v}) = \Lambda_0^i, \ \ L_k^i(\boldsymbol{v}) = \delta^{ik} + \frac{1}{1+\Lambda_0^0}\Lambda_0^i \Lambda_0^k. \tag{۲۱}$$

در ادامه تعریف کنید $R = L^{-1}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{\Lambda} = L(-\boldsymbol{v})\boldsymbol{\Lambda}$ و نشان دهید این موجود یک دوران است.
در آخر نشان دهید این تجزیه یکتاست. یعنی فرض کنید:

$$\boldsymbol{\Lambda} = L(\boldsymbol{v})R = L(\boldsymbol{v}')R', \tag{۲۲}$$

سپس نشان دهید که $R = R'$ و $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$.

استدلال بالا قضیه را ثابت میکند. حال اندکی روی سوالاتی که برایمان پیش آمده بود بحث کنیم.
در مورد سوال اولمان در مورد تعریف خیز باید بگوییم که در صورت قضیه از به کار بردن لفظ خیز حذر کردیم. اکنون تعریف میکنیم خیز تبدیلی است که به فرم $L(\boldsymbol{v})$. یعنی تبدیل لورنتزی که بخش دورانی آن بدیهی است. در مورد در بدست آوردن فرم $L(\boldsymbol{v})$ در بخشهای قبل، باید بگوییم که ما میتوانیم بدون هیچ توجیهی یکباره این فرم را پیشنهاد کنیم و قضیه بالا تمام شبهات را رفع میکند. به اصطلاح بیان میکند موجود پیشنهادی ما در کنار دوران ها به طور کامل گروه تبدیلات فیزیکی لورنتز را توصیف میکند.
با قضیه بالا بخش اول تحلیل گروه لورنتز را پایان میدهیم. در تمرین سری بعد در مورد ساختار مولد ها و جبر لورنتز بحث خواهیم کرد و به طبقه بندی ذرات بنیادی میرسیم.

۲ جبر خطی لورنتزی

میدانیم که با ضرب داخلی لورنتزی بردار های v به سه دسته زمانگونه($v^2 > 0$)، نورگونه($v^2 = 0$)و فضاگونه($v^2 < 0$)تقسیم میشوند. شرط تعامد برای دو بردار لورنتزی به صورت زیر است:

$$v^0u^0 = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}, \tag{۲۳}$$

که در آن نماد های پررنگ، بخش فضایی بردار را نشان میدهند.

۱.۲ الف)

موارد زیر را ثابت کنید:
۱) یک بردار زمانگونه، تنها میتواند بر یک بردار فضاگونه عمود باشد.
۲) یک بردار نورگونه میتواند بر یک بردار نورگونه یا فضاگونه عمود باشد.
۳) بردار های فضاگونه میتوانند بر هم عمود باشند.

استدلال بالا نشان میدهد که دو بردار لورنتزی میتوانند عمود باشند اگر حداقل یکی از آنها فضاگونه باشد یا هردوی آنها نورگونه باشند.

۲.۲ ب)

اگر v و w دو بردار لورنتزی نورگونه باشند نشان دهنید:
۱) $|v^\mu w_\mu| \geq |v||w|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر دو بردار هم خط باشند.
۲) اگر $v^\mu w_\mu > 0$ (دو بردار در یک مخروط نوری باشند) آنگاه، $|v + w| \leq |v| + |w|$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر دو بردار هم خط باشند.

دو حکم بالا نامساوی شوارتز و نامساوی مثلثی در جبر خطی لورنتزی هستند. نکته جالب آنها برعکس بودن نامساوی است. میتوانید به این فکر کنید که با نامساوی های بالا کمترین فاصله بین دو نقطه خط راست نیست و عبور از مسیر شکسته با متریک لورنتزی طول مسیر کمتری به دست میدهد!

۳ برخورد ذرات

برای خلق پاد پروتون در شتابدهنده ها یک ایده آن است که یک پروتون پر انرژی را به یک پروتون ساکن برخورد دهیم که با توجه به واکنش $p + p \to p + p + p + \bar{p}$ علاوه بر ذرات اولیه یک زوج پروتون و پاد پروتون خلق شود.

۱.۳ الف)

حداقل انرژی لازم برای این فرایند چقدر است (حداقل انرژی پروتون فرودی)؟

برای حل سوالات برخورد معمولن اگر محاسبات در دستگاه آزمایشگاه دشوار باشد میتوان با جابه جایی به دستگاه مرکز جرم(تکانه کل فضایی صفر) و استفاده از ناوردایی لورنتز مساله را ساده کرد. اما آیا همواره چنین دستگاهی وجود دارد؟

۲.۳ ب)

نشان دهید که اگر تعداد زیادی ذره با جرم های m_1 ، m_2 ، m_3 و... ، و سرعت های v_1 ، v_2 ، v_3 و... وجود داشته باشند. همواره اگر حداقل یکی از جرم ها ناصفر باشد دستگاهی با تکانه فضایی کل صفر وحود دارد.

محاسبه بالا یک نتیجه جالب دارد و بیان میکند که برای فوتون تک یا تعدادی فوتون دستگاه مرکز جرم وجود ندارد.

۴ تقدیم توماس

همانطور که در سوال اول دیدید به صورت کلی یک تبدیل لورنتز از یک بخش خیز ($boost$) خالص و دوران خالص تشکیل شده است. حالتی را در نظر بگیرید که دستگاه S' با سرعت v در جهت x نسبت به دستگاه آزمایشگاه S در حال حرکت است. همچنین دستگاه S'' با سرعت v' در جهت y' نسبت به دستگاه S' در حال حرکت است. (فرض کنید $v >> v'$ و محاسبات را تا مرتبه اول از v' نگه دارید)

الف) با تشکیل L ، ماتریس تبدیل لورنتز از S به S' و L' ، ماتریس تبدیل لورنتز از S' به S''، تبدیل لورنتز از دستگاه S به S'' را بیابید (L''). آیا تبدیل به دست آمده می تواند یک خیز خالص باشد؟
ب) با استفاده از اطلاعاتی که از سوال ۱ به دست آوردید سرعت بخش خیز تبدیل لورنتز L'' را به دست آورید و خیز مربوط به آن را تشکیل دهید (L_b).
ج) تبدیل کلی L'' را می توان به صورت

$$L'' = L_b R \tag{۲۴}$$

نوشت. با حل معادله بالا دوران R را به دست آورید و بگویید زاویه چرخیدن S'' نسبت به S چقدر است؟

همانطور که دیدید نتیجه دو خیز لزوما یک خیز خالص نیست و دستگاه به دست آمده مقداری هم می چرخد!

*امتیازی
حال ذره ای را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت v روی دایره ای در حال حرکت است. در هر لحظه دستگاه لخت لحظه ای ذره را در نظر می گیریم. مثلا اگر در یک لحظه دستگاه S' نسبت به دستگاه آزمایشگاه سرعت v داشته باشد، لحظه بعدی دستگاه S'' دستگاه لخت لحظه ایست که سرعتش نسبت به دستگاه قبلی $\Delta v = a\Delta t$ است. از نتیجه بخش قبل استفاده کنید و نشان دهید پس از یک دور محیط دایره را پیمودن، دستگاه متصل به ذره به اندازه $\frac{\pi v^2}{c^2}$ می چرخد. (فرض کنید $v << c$ و جملات را تا اولین مرتبه غیر صفر نگه دارید.)