پاسخ تمرین اول :

الف) در ابتدای امر، A و B کنار هم می‌آیند و B ساعت خود را با A هم‌زمان می‌کند. سپس A در مکان خود می‌ماند و B به کنار ستاره می‌رود و منتظر انفجار می‌ماند. پس از انفجار به پیش A بازمی‌گردد و زمانی که در لحظه انفجار دیده را به A می‌گوید.

ساعت‌ها یک عدد به عنوان زمان نشان می‌دهند. پس همزمان برابری این عدد است از آنجایی که در ریاضیات تساوی یک رابطه هم ارزی است، ساعت های هم زمان مجموعه ساعت‌ها را به کلاس‌های هم ارزی افراز می‌کنند.

ب) اگر علامت آنی وجود داشت، ساختن چنین ساعت‌هایی آسان بود. یک ساعت در یک جای دلخواه مانند ایستگاه (ساعت مرجع)، و هر کس زمان را چنین می‌سنجید که به آن ساعت یک علامت آنی می‌فرستاد و زمان را می‌پرسید و ساعت با یک علامت آنی به او پاسخ می‌داد. علامت ای که آناً منتشر می‌شود علامتی است که اگر A چنین علامتی به B بفرستد و B با همان علامت پاسخ دهد، ساعت A هنگام دریافت علامت همان زمان را نشان دهد که هنگام ارسال نشان می‌داده است.

در فیزیک پیشا نسبیتی وجود چنین علامت‌هایی متناقض با قوانین طبیعت نیست و آثار آن در قوانین فیزیک هم وجود دارند. پس به طور تئوریک تا همین جا پاسخ ما کافی است. ولی تجربه روزمره ما می‌گوید ساعت‌هایمان هم‌زمان است و ما دانیم نظریه درست طبیعت نسبیت خاص است که در آن ارسال علامت آنی ممکن نیست. پس چطور ساعت‌های روزانه ما هم‌زمان اند؟! بدین دلیل است که سرعت نور در مقیاس فواصل روزمره ما بسیار زیاد است و با نگاه به ساعت‌های هم (فرستادن سیگنال نوری) ساعت‌های خود را هم‌زمان می‌کنیم.

ج) بنابر قانون ۵ دیدیم که همزمان بودن هم ارزی است. پس اگر تمام ساعت‌ها را با یک ساعت مرجع هم‌زمان کنیم، کل مجموعه ساعت‌ها هم‌زمان خواهد شد. بدین ترتیب بنابر تعریف همزمان مطلق داریم و قانون ۵' نتیجه می‌شود.

د)

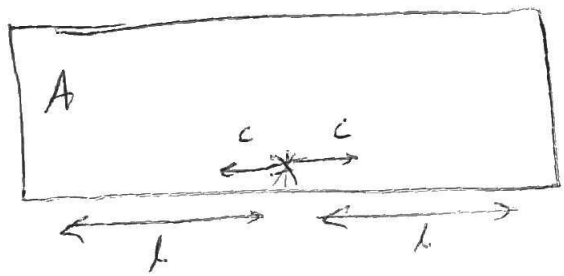
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a\Delta t + b\Delta x + c\Delta y + d\Delta z = \Delta t'$$

برای هر $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$: $\Delta t' = \Delta t$ پس داریم:

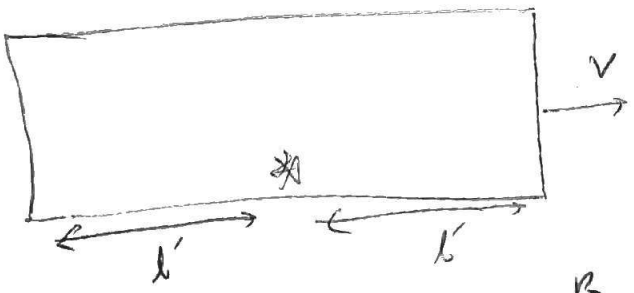
$$\boxed{a=1,\ b=c=d=0}$$

ه)



$$\Delta t_1 = \frac{l}{c} \Longrightarrow \boxed{\Delta t_A = 0}$$
$$\Delta t_2 = \frac{l}{c}$$

و)

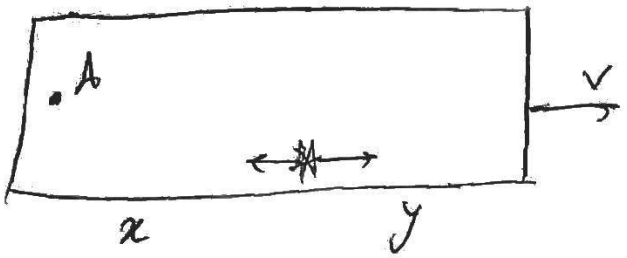


$$\Delta t_1 = \frac{l'}{c+v} \Longrightarrow \Delta t_B = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{2l'v}{c^2 - v^2}$$
$$\Delta t_2 = \frac{l'}{c-v}$$

. B

ز)

$$\lim_{v \to \infty} \Delta t_B = 0 = \Delta t_A$$



B.

با $\xrightarrow{\text{با}}$ $\frac{x}{y} = \frac{c+v}{c-v}$, $x+y=L \Rightarrow x = \frac{L(c+v)}{2c}$, $y = \frac{L(c-v)}{2c}$

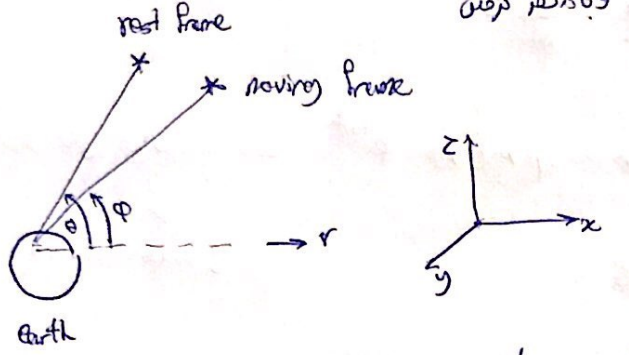
$$\left.\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{x}{c} = \frac{L(c+v)}{2c^2} \\ \Delta t_2 &= \frac{y}{c} = \frac{L(c-v)}{2c^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta t = \frac{Lv}{c^2}$$

ساعت جلویی $\frac{Lv}{c^2}$ از ساعت عقبی عقب می افتد.

آزمون نیمسال اول - سوال دوم :

در بخش اول می خواهیم از دید کلاسیک دباره نظر کرتس
نور تصحیح شده این پدیده را توجیه کنیم.

الف)



x بردار موقعیت ها

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}, \quad v_y = c\sin\theta$$
$$v_x = c\cos\theta$$

حال زمین در حال حرکت در راستای x است

(تبدیل گالیله ای سرعت)

$$\Rightarrow v'_y = v_y$$
$$v'_x = v_x + c$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta + v} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + v/c}$$

اگر $\theta \sim \pi/2$ $\xrightarrow{\text{تقریب زدن}}$ $\tan\varphi \sim v/c \rightarrow \tan(\pi/2 - \varphi) \sim \tan(\theta - \varphi) \sim v/c$

For $v \ll c \Rightarrow \theta - \varphi = \Delta\varphi \sim v/c$

(تحت تبدیل خطی)

ب) حالا می خواهیم استدلال کنیم که تابع کاوردا است ؟ برای این دو نوع استدلال را بیان می کنیم.

① تابع موج متناسب با تعداد قله های موجی است که در مقابل ناظر می گذرد ، تعداد قله های موج عبوری در مقابل ناظر ثابت است (فرض شده)
ناظر ثابت فاصله ثابتی از چشمه دارد (فرض شده) با بودن هر قله ی موج این فکر پیش میاد که ناظر در زمان های یکسان قله های یکسانی را می بیند
یک واقعیت فیزیکی است در نتیجه انتظار داریم که تابع موج تحت تبدیل کاوردا ثابت یا ضرب در یک عدد ثابت مختلط مشابه باشد.

② اثبات دوم اثبات دقیق تری است ؟ می خواهیم ثابت کنیم که هر تبدیل به صفحات خطی یک دلخواه تابع موج
تکین و صفحات خطی را ناوردا نگه می دارد.

ابتدا با معادله ی موج تکین و صفحات خطی که از جواب معادلات ماکسول بدست می آید شروع می کنیم :

Scanned with CamScanner

معادلات ماکسول
$$\begin{cases} \nabla \cdot B = 0 & \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot D = 0 & \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

بخش نمایی جواب را به صورت e^{iwt} در نظر می‌گیریم و حد جواب نهایی را به صورت برم تعی خواهیم

داشت قتیجه می‌دهد که:

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot B = 0 \quad , \quad \nabla \times E - iw B = 0$$
$$\nabla \cdot D = 0 \qquad \nabla \times H + iw D = 0$$

با در نظر گرفتن یک محیط همسانگرد خطی برای محیط انتشار، موج الکترومغناطیسی مان خواهیم داشت که $D = \epsilon_0 E$ و $H = \mu_0 B$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \times E - iwB = 0 \\ \nabla \times B + iw\mu_0 \epsilon_0 E = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\nabla^2 + \frac{w^2}{c^2}\right) \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{که} \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

که جواب‌های این معادله در دستگاه S عبارت هستند از:

$$E = \vec{E}_0 \exp(i\vec{K}_0 \cdot \vec{r} - iwt)$$
$$B = \vec{B}_0 \exp(i\vec{K} \cdot \vec{r} - iwt)$$

در حالت کلی موج الکترومغناطیسی مورد نظر ما با عبارات بالا برای E و B منتشر می‌شود. حال می‌خواهیم ببینیم که موج الکترومغناطیسی که جواب معادلات ماکسول در دستگاه S است در دستگاه S' به چه شکل خواهد بود. دقت کنید که به دنبال جواب‌های معادلات موج در دستگاه S' هستیم که یکی از جواب‌های آن موج الکترومغناطیسی خواهیم بود. (در حالت تبدیل مختصات گالیله‌ای به این معنا که یک نوع الکترومغناطیسی میدان مجرد با میدان‌های $\vec{E}$ و $\vec{B}$ و بردار موج $\vec{K}$ داریم و می‌خواهیم ببینیم که ناظر S' این نوع الکترومغناطیسی را با چه میدان‌ها و بردار موجی خواهد دید.)

پس دستگاه S' با توجه به اینکه منبع جواب‌های معادلات موج الکترومغناطیسی در دستگاه S، میدان‌های E و B در دستگاه S' چگونه هستند.

Scanned with CamScanner

فرض کنید آیک تبدیل خطی است که بین دو دستگاه S و S' وجود دارد. T کاملا دلخواه است.

$$\varphi = i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t \qquad \varphi' = i\vec{k}'\cdot\vec{r}' - i\omega' t$$

$$E' = T(E) = T(\vec{E}_0 \exp(i\varphi)) = \vec{E}_0' \exp(i\varphi')$$

حال یک تبدیل خطی مجدد بین این‌ها چون بین کنید دقت خواهیم داشت که:

$$= T(\vec{E}_0)\exp(i\varphi) = \vec{E}_0' \exp(i\varphi')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(\vec{E}_0) = \vec{E}_0' \Rightarrow T\vec{E}_0 = \vec{E}_0' \\ \varphi = \varphi' \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = \vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega t \end{cases}$$

که آن پیش فاکتورهای تبدیل خطی ما باقی باشد.

پس ثابت کردیم که تحت هر تبدیل خطی موج الکترومغناطیسی ما تغییر داشتن دستخوش تغییر می‌شود

و فاز آن ثابت باقی خواهد ماند.

ج) حال می‌خواهیم با استفاده از کارهای که در قسمت قبل دیدیم و تبدیلات گالیله تبدیل بردار موج را بیابیم.

تبدیل گالیله $\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$

$$\varphi = \varphi' \Rightarrow k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = k_x' x' + k_y' y' + k_z' z' - \omega' t'$$

$$\Rightarrow k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = k_x' x - k_x' vt + k_y' y + k_z' z - \omega' t$$

$$\Rightarrow (k_x - k_x')x + (k_y - k_y')y + (k_z - k_z')z + (k_x' v + \omega' - \omega)t = 0$$

حال این معادله باید $\forall t, z, y, x$ صحیح باشد پس ضرایب باید تک به تک صفر باشند و خواهیم داشت که:

$$\begin{aligned} k_x &= k_x' \\ k_y &= k_y' \\ k_z &= k_z' \\ \omega &= \omega' + k_x' v \end{aligned} \Rightarrow \vec{k} = \vec{k}' \Rightarrow$$

پس بردار موج تحت تبدیلات گالیله تغییر نمی‌کند در نتیجه امواجی از این شکله توجیه نمی‌شود.

Scanned with CamScanner

د) بزن ترجیب ایرامی یک تبدیل جزء محسوب در نظر می‌گیریم.

همواره می‌توانیم دستگاه مختصات را به گونه‌ای بچرخانیم که standard configuration حاصل شود

دقیق د تبدیلات t تنها یک مؤلفه‌ی مکان تاهوشود. همزمان با این تبدیلات زمان را نیز

سؤال میپرسد فرض می‌کنیم که تبدیل زمان یک هتجیع راست باشد. می‌خواهیم این هتجیع را به گونه‌ای

بدست آوریم که ایرامی ترجیب شود یعنی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} t' = t + ax \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi' \longrightarrow$$

دوباره از فاوردایی استفاده می‌کنیم

$$k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = k'_x x' + k'_y y' + k'_z z' - \omega' t'$$

$$= k'_x (x - vt) + k'_y y + k'_z z - \omega' (t + ax)$$

$$\Rightarrow (k_x - k'_x \cdot v + \omega' a) x + (k_y - k'_y) y + (k_z - k'_z) z + (k'_x v + \omega' - \omega) t = 0$$

حال دوباره این عبارت به ازای هر x، y و t صحیح است یعنی باید داشته باشیم $\Rightarrow$

$$\begin{cases} k'_x = k_x + \omega' a \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases}$$

$$\omega' = \omega - k'_x v \rightarrow k'_x = \frac{k_x + a\omega}{1 + av}$$

حال به حاصل نگاه می‌کنیم که ستاره تقریباً" ساکن است یعنی بردار موج آن خواهد بود:

$$\vec{K} = (0, 0, K') \longrightarrow \vec{K'} = (-a\omega, 0, K') \quad (K' = \frac{\omega'}{c} = \omega/c)$$

$k_x = k_y = 0$

تحت تبدیل بالا

$\omega' = \omega$

بزن ترجیب ایرامی باید داشته باشیم $\Rightarrow \frac{k_x}{k_z} = v/c \rightarrow \frac{-a\omega}{k'} = -ac = v/c \rightarrow a = -v/c^2$

$$\boxed{t' = t - v/c^2 x}$$

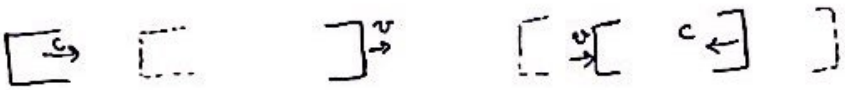
پس هتجیع زمان به تبدیلات بالا تبدیل مکمل وارد می‌شود:

صفحه بعد سؤال سوم

Scanned with CamScanner

الف) خیر قانون فیزیکی نداریم که تنها راه ممکن برای تابش زمینه کیهانی برقرار باشد و در باقی نقض شود. مثلاً اینکه دمای این تابش همه‌جا یکسان است جواب معادلات فیزیکی هستند که قوانین به ما می‌دهند و مشکلی ندارد که دما در دستگاه‌های مختلف متفاوت به دست آید. مثل آن که انرژی در دستگاه‌های مختلف متفاوت به دست آید طبیعی است و تنها چیزی که مهم است این است که قانون پایستگی انرژی برقرار باشد. ویژگی‌های خاص یک جواب در یک چارچوب خاص قانون فیزیکی نیستند و به خاطر همین تفاوت‌هاست که ما برای حل سؤال به دستگاه خاص آن سؤال که ساده‌تر است مراجعه می‌کنیم.

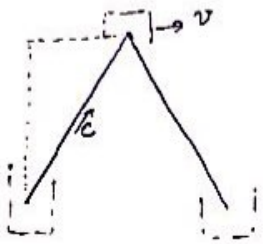
ب)



$$ct_1 = L + vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{c-v} \qquad ct_2 = L - vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{L}{c+v}$$

$$T_1 = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{2L/c}{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

ج)



سرعت در راستای سقف $u = \sqrt{c^2 - v^2}$

رفت و برگشت $T_2 = \frac{2L}{u}$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

د)

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2L}{c}\left(\frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2} - \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\right) = \frac{2L}{c}\left(\left(1+(\frac{v}{c})^2\right) - \left(1+\frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2\right)\right) + O((\frac{v}{c})^4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T \simeq \frac{Lv^2}{c^3}}$$

صفر بودن اختلاف فاز در واقع صفر بودن v را نتیجه می‌دهد که سرعت نسبی ما نسبت به اتر است.

Scanned with CamScanner