تمرین سری اول نسبیت خاص - دکتر شانت باغرام

صبا اعتضاد رضوی
s_etezadrazavi@yahoo.com

زهرا کبیری
kabiri.zahra98@gmail.com

کوروش علامه
kuroshallame@gmail.com

"Alice sighed wearily. 'I think you might do something better with the time،' she said، 'than waste it in asking riddles that have no answers.'
'If you knew Time as well as I do،' said the Hatter، 'you wouldn't talk about wasting it. It's him.'
'I don't know what you mean،' said Alice.
'Of course you don't!' the Hatter said، tossing his head contemptuously. 'I dare say you never even spoke to Time!'
'Perhaps not،' Alice cautiously replied: 'but I know I have to beat time when I learn music.'
'Ah! that accounts for it،' said the Hatter. 'He won't stand beating. Now، if you only kept on good terms with him، he'd do almost anything you liked with the clock. For instance، suppose it were nine o'clock in the morning، just time to begin lessons: you'd only have to whisper a hint to Time، and round goes the clock in a twinkling! Half-past one، time for dinner!" From Alice in Wonderland، by Lewis Carroll

-جواب تمرین ها را به ایمیل TA.baghram.1@gmail.com ارسال کنید.
-مهلت ارسال تا شنبه ۲۶ مهر ماه، ساعت ۲۳:۵۹ است.
-در صورتی که میخواهید تمرین را با تاخیر تحویل داده و از ۷ روز مجاز تاخیری خود استفاده کنید، حتما در بالای صفحه ی اول تمرین تعداد روز هایی که استفاده میکنید را واضح و خوانا بنویسید.

موضوع این سری تمرین اصول موضوعه ی نسبیت خاص و آزمایش ها است. در صورت وجود مشکل به دستیار های آموزشی درس ایمیل بزنید.

۱ همزمانی

در این بخش قصد داریم مفهوم همزمانی در فیزیک نیوتنی و نسبیت خاص را بررسی کنیم.

۱.۱ همزمانی مطلق

ابتدا به فرمول بندی نیوتن میپردازیم. وجود زمان جهانی (مطلق) از پیشفرض های قوانین نیوتن است و به عبارتی میتوان آنرا قانون صفرم نیوتن دانست. زمان مطلق به طور ساده یعنی کمیتی از جنس زمان، که با وسیله ای مثل ساعت سنجیده می شود، برای ناظر های مختلف مقداری یکسان بدست دهد.
حال سعی میکنیم این فرض را به صورتی واضحتر برای خود بیان کنیم. فرض کنیم ۲ ناظر یکی در نزدیکی یک ستاره و دیگری در دوردست آن قرار دارند. ناظر نزدیک را B و ناظر دور را A مینامیم. فرض کنید ستاره منفجر شود. از خود میپرسیم زمان انفجار این ستاره را A چگونه تعیین میکند؟ یک راه آن است که زمانی که نور از ستاره به او رسید ساعت خود را بخواند، اما این راه زمان رسیدن نور به چشم او است و نه انفجار ستاره.
در اینجا دو ساعت همزمان را به عنوان ساعت هایی که هرگاه کنار هم هستند زمان یکسان را نشان میدهند، تعریف میکنیم.
حال قانون زیر را وضع میکنیم:

قانون O : نوعی ساعت وجود دارد که هردوتایی از آنرا میتوان همزمان کرد. به عبارتی ساعت هایی هستند که اگر یکبار در کنار هم همزمان شوند همواره همزمان میمانند و حرکت دادن آنها عدد نشان داده شده را مختل نمیکند.

الف) حال با استفاده از قانون بالا نشان دهید که A میتواند زمان انفجار را با یک پروتکل تعیین کند، این بدان معناست که بگوید در لحظه وقوع انفجار ساعت او چه عددی نشان میداده است. نگران نمره برای استدلال خود نباشید و هر راه منطقی ای که به ذهنتان می آید بنویسید. همچنین نشان دهید قانون بالا ساعتهای همزمان را به کلاس هم ارزی افراز میکند.

قانون بالا با توجه به تصورات ما بسیار منطقی بنظر میرسد و میتواند مفید باشد که منطقی بودن آنرا بنابر مشاهدات روزمزه خود توجیه کنیم. بنظر میرسد که ساعت های ما از چنین قانونی پیروی میکنند. میتوانیم برای درک بهتر به سوال زیر پاسخ دهیم.

ب) چگونه میتوان چنین ساعت هایی ساخت، یا به عبارتی چرا در تجربه روزمره چنین ساعتهایی داریم و چگونه ساعت هارا همزمان میکنیم؟

حال که به اندازه کافی بحث کرده ایم به نتیجه اصلی این بخش میرسیم:

ج) پیشتر گفتیم که قانون O ، ساعتهای همزمان را به کلاس های گوناگون تقسیم میکند. با استفاده از این هم ارزی نشان دهید که میتوان رویداد هارا مستقل از ساعتهایی دانست که آنها را میسنجند. به عبارتی قانون قبل را میتوان به صورت زیر نوشت:
قانون O' : فاصله زمانی بین دو رویداد مطلق است و به ساعت هایی که آنها را میسنجند بستگی ندارد.

قانون بالا همان چیزی است که از آن به عنوان مفهوم همزمانی مطلق در دنیای نیوتنی یاد میکنیم.
این قانون برای ما توجیه میکند که چرا همواره فضا-زمان نیوتنی را با $\mathbb{R} \times E^3$ مدل می کنیم. که $\mathbb{R}$ محور حقیقی است که یک مدل برای زمان نیوتنی است و E^3 ، فضای ۳ بعدی اقلیدسی است که مختصات های مختلف روی آن مشخص میکنیم.
حال فرض کنید میخواهیم قانون بالا را پیش از هر دانش دیگری در مورد فیزیک نیوتنی برای مقید کردن تبدیلات مجاز برای فیزیکمان (تبدیلات گالیلئو) به کار بندیم.

د) هر ناظر نیوتنی با ساعتش و مختصاتی که به فضای اطراف خود اختصاص داده است با فرض آنکه زمان مبدا و مکان خود را صفر قرارداد کند هر رویداد را با یک بردار $(t, x, y, z)^T$ توصیف خواهد کرد. به تبع هر ناظر دیگر مختصاتی دیگر مانند $(t', x', y', z')^T$ را برای همان رویداد گزارش خواهد کرد. با توجه به قانون O' بیان کنید که تبدیل زمان های بین دو رویداد چگونه خواهد بود. یعنی در تبدیل زیر:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad (۱)$$

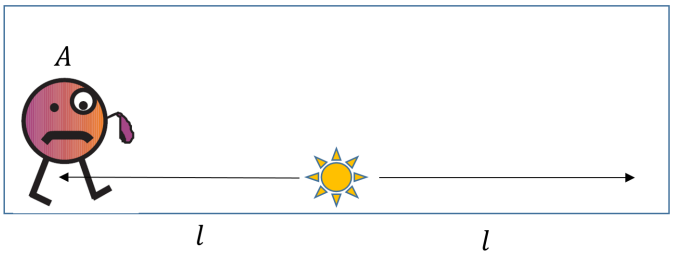
پارامتر های a, b, c, d را بدست آورید.

۲.۱ همزمانی نسبی

برای بیان مفهوم همزمانی نسبی، نیاز داریم تا فرضی دیگر جایگزین قانون بخش قبل شود. واضح است که اصل ثابت بودن سرعت نور باید مورد توجه قرار گیرد چراکه اصل دیگر نسبیت مبتنی بر یکسان بودن فیزیک در چارچوب های لخت در صورتی که از بحث های روی تعریف چارچوب لخت بگذریم در فیزیک قبل از نسبیت هم برقرار است. اصل ثابت بودن سرعت نور را به خاطر می آوریم:

اصل ثابت بودن سرعت نور : در خلأ، نور نسبت به تمام دستگاه های لخت و در تمام جهات، با سرعت ثابت و متناهی c انتشار میابد. این سرعت یک ثابت طبیعت است.

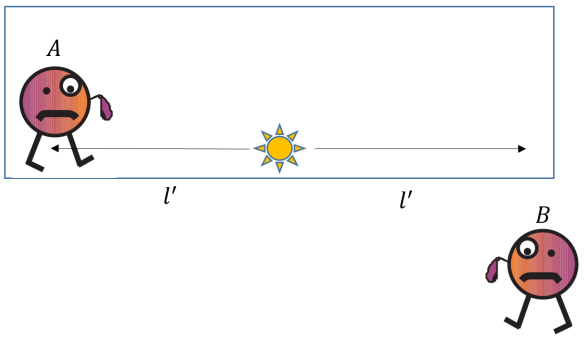
زین پس این اصل جایگزین قوانین بخش قبل میشود.
یک فرد A را در نظر بگیرید. که درون واگن یک قطار ایستاده است. یک منبع نور در وسط طولی که وی برای قطار اندازه میگیرد قرار دارد. این فرد فاصله این منبع از دو سر قطار را l اندازه گرفته است.(شکل ۱)



شکل ۱ : فرد A

ه) فاصله زمانی بین دو رویداد ساطع شدن نور و رسیدن آن به راست و همچنین به چپ را برای فرد A حساب کنید.

حال فرد B را متصور شوید. این فرد در خارج واگن ایستاده است و واگن را میبیند که با سرعت v در راستای افقی و به سمت راست حرکت میکند.(شکل ۲)



شکل ۲ : فرد B

و) برای فرد B فاصله های زمانی مذکور در بخش (ه) را محاسبه کنید.

اگر در محاسبات خود دچار اشتباه نشده باشید(و به احتمال زیاد حتا با اشتباه)، باید متوجه شده باشید که همزمانی رسیدن نور به دو سر واگن برای هر دو فرد بالا برقرار نیست. این بیان میکند که با فرض برقراری اصل ثبوت و متناهی بودن سرعت نور، قانون O' دیگر نمیتواند برقرار باشد.

ز) اگر در اصل ثابت بودن سرعت نور شرط متناهی بودن برداشته شود، نشان دهید که همزمانی مطلق میتواند برقرار یاشد یعنی نشان دهید که میتوانید قانون O' را نتیجه بگیرید.

با توجه به حرف بالا لفظ همزمانی دو رویداد بی معنی است، مگر آنکه بیان شود که زمان را نسبت به کدام ناظر میسنجیم. به این گزاره نسبیت همزمانی گویند.

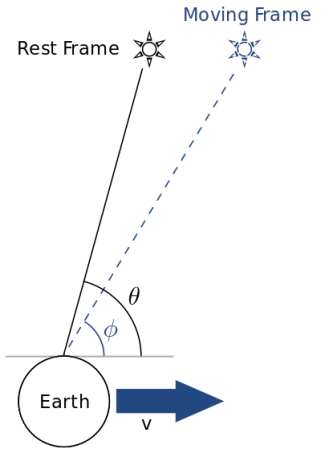
یک نتیجه جالب دیگر که میتوان از ناهمزمانی بالا بدست آورد، پدیده ی "جلو افتادن ساعت عقبی" یا "عقب افتادن ساعت جلویی" است.

ح) با توجه به نتیجه ی بخش (و)، فواصل منبع نور از دو سر واگن را طوری تغییر دهید که فرد B ، دو رویداد رسیدن نور به دو سر واگن را همزمان ببیند. با توجه به تصحیح فواصل. اختلاف زمان این دو رویداد را برای فرد A محاسبه کنید.

پس از مطالعه سایر تاثیرات نسبیتی، خواهیم دید که عقب افتادن ساعت جلویی و اتساع زمان و انقباض طول تمام چیزی است که عملن در نسبیت اتفاق می افتد. به عبارتی خواهیم دید که با لحاظ کردن این ۳ تاثیر میتوان تبدیلاتی که برای فیزیک مد نظر ما معقول هستند را بدست آورد.

۲ ابیراهی

در این سوال میخواهیم به یکی از اولین و مهمترین آزمایش هایی که به پیدایش نسبیت خاص انجامید بپردازیم. پدیده ابیراهی حرکت ظاهری اجرام سماوی در آسمان به علت حرکت و سرعت رصدگر است. این پدیده باعث میشود که اجرام سماوی دوردست برای اجرام ناظر در حال حرکت در مکان دیگری به نسبت ناظر ثابت دیده شوند.
در سال ۱۷۲۷ James Bradly ، ضمن مشاهده این پدیده، توضیحی کلاسیک برای آن بر مبنای ذره ای بودن نور ارائه کرد. از کار های وی به عنوان یکی از اولین اندازه گیری های سرعت محدود نور یاد میشود.



شکل ۳

۱.۲ الف)

با فرض داشتن تئوری نور ذره ای، فرض کنید رصدگری ستاره ای را در زاویه ی سمتی ϕ خود میبیند. حال اگر همین ناظر در دستگاه خورشید که زمین نسبت به آن با سرعت v در حال حرکت است بنشیند، ستاره را در زاویه ی سمتی θ خود میبیند. مقدار $\theta - \phi$ را برحسب سرعت زمین نسبت به خورشید v و سرعت ذرات نور c بدست آورید. فرض کنید که $v << c$ است.
(جواب : $tan(\theta - \phi) \approx \theta - \phi \approx \frac{v}{c}$)
در سال ۱۸۶۵ و با کار های ماکسول در مورد امواج الکترومغناطیسی باور عمومی به ذره ای بودن نور از بین رفت و تئوری نور موجی دارای اقبال گشت. همانطور که میدانید امواج الکترومغناطیسی در یک معادله ی موج تخت به شکل زیر صدق میکنند:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (۲)$$

که جوابی نوسانی به شکل

$$f = f_0 cos(wt - \vec{k}.\vec{x}) \qquad (۳)$$

میپذیرد. فاز موج را به صورت $\Phi = wt - \vec{k}.\vec{x}$ تعریف میکنیم.

۲.۲ ب)

استدلال کنید که فاز موج تخت باید تحت هر تبدیل خطی مختصات ناوردا باقی بماند. راهنمایی: به تناسب فاز با تعداد قله های موج عبوری بر واحد زمان از یک سطح فکر کنید. یا معادله موج را تحت یک تبدیل مختصات خطی دلخواه تبدیل کرده و جواب های آن را ببینید.

۳.۲ ج)

حال پرتو های نور ستاره ای در دستگاه خورشید S دارای فاز Φ و بردار موج $\vec{k}$ و فرکانس زاویه ای w است. از ناوردایی فاز تحت تبدیل مختصات که در قسمت قبل استدلال کردید استفاده کرده و بردار موج $\vec{k'}$ و فرکانس زاویه ای w' پرتو نور را در دستگاه زمین S' ، که با سرعت v نسبت به S در حال حرکت است را تحت تبدیلات گالیله بدست آورید. نتیجه ی خود را با نتیجه ی آزمایش ابیراهی مقایسه کرده و بحث کنید.

دیدیم که جواب معادله ی موج تحت الکترومغناطیسی که از معادلات ماکسول بدست می آید تحت تبدیلات گالیله با مشاهدات ابیراهی تناقض دارد. در سال ۱۸۹۲ لورنتز تلاش برای حل این مسئله کرد. وی با اضافه کردن جمله جدیدی به تبدیل زمانی تبدیلات گالیله موفق به توضیح پدیده ی ابیراهی گشت.

۴.۲ د)

با روشی مشابه روش لورنتز با وارد کردن تنها یک تصحیح به جمله زمانی تبدیل گالیله نتیجه ی آزمایش ابیراهی را تولید کنید.

این اولین قدم لورنتز به سمت نوشتن تبدیلات معروفش بود. دقت کنید که در تمام مراحل بالا و برای تولید ابیراهی مرتبه اول با فرض $v << c$ ما هم همچون لورنتز تنها موفق به بدست آوردن مرتبه اول تبدیلات خواهیم شد و جمله ی γ با داشتن جملات و اثرات مرتبه ی دوم $\frac{v}{c}$ وارد تبدیلات خواهد شد.

۳ چارچوب لخت مطلق

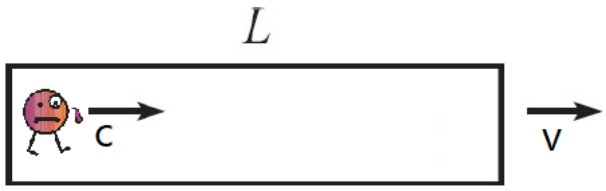
در سال ۱۹۶۵ دو پژوهشگر به نام پنزیاس و ویلسون که مشغول انجام آزمایش در زمینه نجوم رادیویی بودند متوجه شدند که یک تابش میکروموج متناظر با دمای حدودا ۳ کلوین به طور یکنواخت و همگن از همه جهات دریافت می‌شود.(بعدا مشخص شد مقدار دقیق آن ۲.۷ کلوین است) اول فکر کردند که یک نویز است که روی سیگنال اصلی سوار شده است. ولی بعدا معلوم شد که چون نویز نمی‌تواند از همه جهات و با شدت و طیف یکسان دریافت شود، نویز نامیدن آن توجیه مناسبی نبوده است. با توجه به پیش‌بینی برخی مدل‌های کیهانشناسی نتیجه گرفتند این تابش همان تابش زمینه کیهانی است که به صورت باقی‌مانده‌ای از دوران پسامهبانگ قابل مشاهده است. جایزه نوبل ۱۹۷۸ نیز به پنزیاس و ویلسون اهدا شد. (اگر این دو نفر مانند خیلی افراد دیگر از وجود نویز در کار اصلی‌شان ناراحت می‌شدند و دستی آن را صفر می‌کردند هیچ‌وقت به نوبل می‌رسیدند؟)

حال این سوال پیش می‌آید که اگر یک تابش همگن و همسانگرد همه عالم را پر کرده آیا چارچوب مربوط به آن می‌تواند به عنوان چارچوب لخت مطلق فرض شود؟ از آنجا که هر جای جهان که باشیم می‌توانیم بفهمیم نسبت به آن چه سرعتی داریم بدین طریق که اگر چهارچوبی نسبت به آن سرعت داشته باشد دمای آن را متفاوت از ۲.۷ کلوین اندازه می‌گیرد.

برای پاسخ به این سوال ابتدا مشخص می‌کنیم منظورمان از چهارچوب لخت مطلق چیست. نیوتون گفت چهارچوب لخت چهارچوبی است که در آن قوانین فیزیک برقرارند مثلا قانون نیروی نیوتون. پس وقتی در دستگاه شتابداری باشیم که نتوانیم منبع نیروی مجازی که حس می‌کنیم را به چیزی فیزیکی نسبت دهیم می‌فهمیم در چهارچوب نالختی قرار داریم. به طور مشابه چون در تمام چهارچوب‌های لخت قوانین فیزیک برقرارند هیچ دلیلی ندارد یکی از آن ها را نسبت به بقیه ترجیح دهیم. پس تنها چیزی که می‌تواند یک چهارچوب را نسبت به بقیه مرجح کند وجود یک ویژگی فیزیکی است که فقط در آن چهارچوب برقرار باشد و در باقی چهارچوب‌ها نقض شود. فیزیکی بودن به معنای یک خاصیت قابل سنجش است، چرا که همانطور که احتمالا پیشتر دیده اید یکی از ایراد های اساسی بر فرض چارجوب مرجح نیوتن غیر قابل تمییز بودن آن از نظر تجربی بوده است. پس سوال تبدیل می‌شود به اینکه

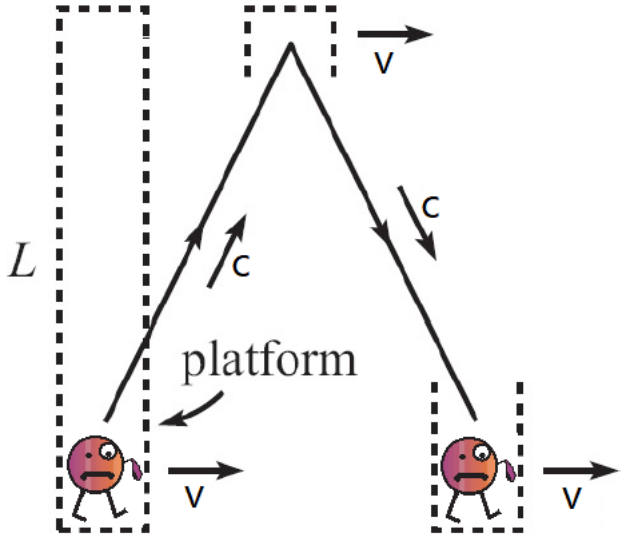
الف) آیا خاصیتی وجود دارد که مختص به وجود دارد که مختص به تابش زمینه کیهانی باشد و در باقی چهارچوب‌ها نقض شود؟ ممکن است یکی بگوید این چارچوب همان اتر است که به دنبالش بودیم و این خاصیت هم ثبوت سرعت نور و برقراری معادلات الکترومغناطیس به شکل متعارفشان است. برای پاسخ به آن بیایید ستاپ مایکلسون مورلی را بررسی کنیم. همانطور که می‌دانید نور به عنوان موج الکترومغناطیسی شناخته میشد که مردم فکر می‌کردند همانند هر موج دیگر به محیطی برای انتشار در آن نیاز دارد. آن محیط را اتر می‌نامیدند که سرعت نور در آن مساوی با $3 \times 10^8 m$ بود.

ب) حالا اگر شخصی در یک قطار که با سرعت v در حال حرکت است نوری در همان راستا شلیک کند تا به دیواره بخورد و باز گردد، مدت زمان T_1 که طول می‌کشد تا به او باز گردد چقدر است؟



شکل ۴ : در راستای حرکت

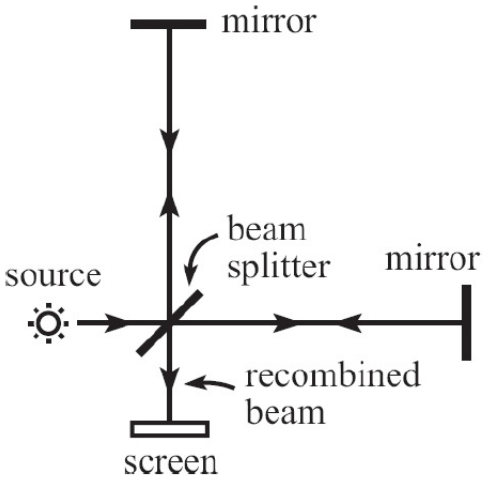
ج) اگر نور را به سمت سقف قطار شلیک کند مدت زمان T_2 که طول می‌کشد تا نور از سقف بازتابیده شده و به آن برگردد چقدر است؟



شکل ۵ : عمود بر راستای حرکت

می‌توان نشان داد از تمام جهت‌گیری‌های ممکن T_1 بیشترین زمان و T_2 کمترین زمان را دارد.

د) تفاضل T_1 و T_2 را با فرض $v/c << 1$ به دست آورید.
این تفاضل به صورت اختلاف فاز لکه روی پرده در ستاپ مایکلسون-مورلی (که در شکل ۶ نشان داده شده) خود را نشان می‌دهد که وقتی آن‌ها در آزمایشگاه آن را اندازه گرفتند دیدند صفر است. در لحظه اول نگرانی بزرگی نبود چون ممکن بود در آن لحظه از سال زمین نسبت به اتر ساکن باشد. اما وقتی همان آزمایش را چندین ماه بعد که از تغییر سرعت زمین مطمئن بودند انجام دادند به همان نتیجه صفر رسیدند که مشکل بزرگی محسوب میشد. در واقع این آزمایش می‌گفت اتری به هر شکل ، خواه ساخته شده از فوتون های شارش آزاد کرده از کیهان اولیه خواه ماده ای عجیب و ناشناخته، وجود ندارد!



شکل ۶ : ستاپ آزمایش مایکلسون-مورلی