

Special relativity

Problem Set 2



Problem 1

در کلاس درس با پارادکس دوقلوها آشنا شدید. حال می‌خواهیم آن را در نمودار فضا زمانی هم بررسی کنیم. فرض کنید شخص A در چارچوب ساکن زمین است و شخص B، زمین را با سرعت ثابت v به مقصد یک سیارک دور دست ترک می‌کند. بعد از رسیدن به سیارک بلافاصله با همان سرعت v به زمین برمی‌گردد.

الف نمودار فضا زمانی را در چارچوب زمین رسم کنید. (بدیهی است با کشیدن نمودار فضا زمانی از شما انتظار می‌رود که خطوط همزمانی، خطوط هم مکانی را رسم کنید؛ و با استفاده از آن نشان دهید که چرا شخص B زمان کمتری را حس می‌کند. زمان طی شده توسط این دو شخص را روی نمودار با یکدیگر مقایسه کنید)

حال فرض کنید که شخص B، زمین را با شتاب ویژه ثابت (proper acceleration) a ترک می‌کند و شتاب می‌گیرد تا به سرعت نهایی v برسد. بعد از رسیدن به سرعت دلخواه با زمان ویژه τ_c بدون شتاب حرکت می‌کند. بعد از آن دوباره با شتاب $-a$ سرعتش را کاهش می‌دهد تا متوقف شود (به سیارک می‌رسید). پس از آن شخص B همین مراحل را دوباره طی می‌کند تا به زمین برسد.

ب به صورت تحلیلی مدت زمان را برای یک دور کامل (رفت و برگشت) در چارچوب شخص A و در چارچوب شخص B بدست بیاورید و نشان دهید که همیشه برای مقادیر مثبت a ، اختلاف زمان‌ها، $(T_A - \tau_B)$ ، در دو چارچوب مثبت است.

ج این اختلاف زمان را با مقادیر زیر بدست آورید: (بر حسب سال گزارش کنید)

$$a = g \quad v = 0.8c \quad \tau_c = 1 \text{ year}$$

Problem 2

دو دستگاه مرجع S و S' را در تعریف استاندارد در نظر بگیرید. یک میله به طول L_0 در راستای محور x' قرار دارد و یک انتهای آن در مبدا است. طول این میله، L ، که در دستگاه S اندازه گیری می شود؛ چقدر است؟

فرض کنید خط ناظران ما در راستای محور x کشیده شده است و تمام ناظران همزمان هستند. در زمان $t = 0$ ، مبدهای هر دو دستگاه باهم منطبق است؛ به طوری که یک انتهای میله در مختصات $x = 0$ باشد؛ دقیقاً یکی از ناظران دستگاه S در مقابل انتهای دورتر میله، که در دستگاه S' و در مختصات $x' = L_0$ است؛ ایستاده است. این ناظر در دستگاه S ، در مختصات $x = L$ قرار دارد.

فرض کنیم در زمان $t' = t = 0$ یک بمب در مبدا منفجر می شود. نور ناشی از این انفجار با سرعت c حرکت می کند؛ و در زمان های $t = \frac{L}{c}$ و $t' = \frac{L_0}{c}$ به ناظران در مختصات $x = L$ و $x' = L_0$ می رسد. اما از معادله ی اتساع زمان می دانیم که رویدادهایی که با فاصله زمانی t' در دستگاه متحرک رخ می دهند؛ در دستگاه ساکن، در فاصله زمانی $t = \gamma t'$ اندازه گیری می شوند. پس فاصله های زمانی $\frac{L_0}{c}$ و $\frac{L}{c}$ به هم مرتبط هستند؛ پس باید داشته باشیم:

$$L = \gamma L_0 \quad (WRONG!)$$

بدیهی است با توجه به رابطه ای که برای انقباض طول داشتیم؛ می دانیم که رابطه ی بدست آمده اشتباه است! مشکل کجاست؟
(مجاز به استفاده از تبدیلات لورنتس نیستید)

Problem 3

دو دستگاه مختصات S و S' را در تعریف استاندارد در نظر بگیرید. مبدا S' با سرعت v در راستای محور x نسبت به S در حرکت است. مبدا دستگاه S'' با سرعت u نسبت به دستگاه S' در راستای محور y' در حرکت است. بقیه‌ی محورهای آن موازی محورهای نظیر دستگاه S' است.

الف ماتریس تبدیل مختصات فضا زمانی S و S'' را بدست آورید. (مختصات فضا زمانی S به صورت (ct, x, y, z) و مختصات فضا زمانی S'' به صورت (ct'', x'', y'', z'') است.)

ب دستگاه S و S'' چگونه از نظر فیزیکی به یکدیگر ربط دارند؟ ماتریس‌های مربوطه را بدست آورید.

ج از دید ناظر ساکن در S ، حرکت مبدا S'' در راستایی است که با محور x زاویه‌ی θ می‌سازد؛ و در مقابل از دید ناظر ساکن در S'' ، حرکت مبدا S در راستایی است که با محور x'' زاویه‌ی θ'' می‌سازد. $\tan\theta$ و $\tan\theta''$ را بدست آورید.

د فرض کنید یک دستگاه S' دارید که نسبت به دستگاه S دارای سرعت دلخواه $\vec{v}$ است. ماتریس تبدیلات لورنتس میان این دو دستگاه را بنویسید. (تبدیل مختصات فضا زمانی (t, x, y, z) و (t', x', y', z') را می‌خواهیم.)

راهنمایی: یک بردار مکان دلخواه را در دستگاه سکون در نظر بگیرید و آن را به صورت مولفه‌های موازی و عمود بر سرعت $\vec{v}$ تجزیه کنید.

Problem 4

از محتوای کلاس، چه بخشی برای شما مبهم و نامفهوم یا سخت بوده است؟ در صورت تمایل می‌توانید اگر نظر یا پاسخ پیشنهادی هم داشتید؛ بنویسید. اما صرفاً نوشتن یک سوال کفایت می‌کند.

(این بخش به دستیاران آموزشی کمک می‌کند تا بهتر متوجه شوند که کدام مباحث برای شما مبهم‌تر یا دشوارتر بوده؛ تا در صورت نیاز در کلاس‌های حل تمرین بیشتر به آن‌ها پرداخته شود. لطفاً سوالی را بنویسید که واقعاً برای‌تان ابهام داشته؛ نه فقط یک سوال ساده برای انجام تکلیف.)

The important thing is not to stop questioning.

Curiosity has its own reason for existing.

Albert Einstein