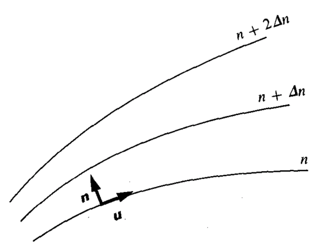
نسبیت عام   نیمسال ۲-۹۹

۱. $Tidal\ Forces\ and\ Geodesic\ Deviation\ in\ Schwarzschild$

الف) فرض کنید پتانسیل گرانشی نیوتنی $\phi(x)$ در فضا برقرار است. دو ذره آزمون با فاصله ی $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ از هم قرار دارند بطوریکه مقیاس طولی n در برابر مقیاس طولی تغییرات پتانسیل گرانشی ناچیز است. با فیزیک کلاسیک نشان دهید:

$$\frac{d^2 n_i}{dt^2} = -\partial_i \partial_j \phi(x) n^j$$

این معادله شتاب نسبی ذرات در حضور میدان گرانشی نیوتنی را بدست می دهد (نیروی کشندی).
ب) میخواهیم مسئله ی فوق را به زبان هندسی بررسی کنیم؛ یعنی ببینیم در یک خمینه، ژئودزی های مجاور چه شتابی نسبت به هم دارند.
در خمینه ی M، مجموعه ای از ژئودزی های مجاور را در نظر بگیرید که در کنار هم یک رویه ی دو بعدی را تشکیل دهند. به بیان دیگر، یک خانواده ی یک پارامتری از ژئودزی ها را در اختیار داریم.



این رویه ی دوبعدی را باید با دو پارامتر مختصات دهی کنیم. یکی از آن ها را همان زمان ویژه یا پارامتر آفین روی این ژئودزی ها میگیریم، یعنی τ. بردار مختصاتی نظیر آن، $\partial_\tau = u$، همان چاربردار سرعت ژئودزی هاست. پارامتر دیگر، که این ژئودزی ها را برچسب میزند، با n مشخص میشود. چاربردار مختصاتی نظیر آن را با $\mathbf{n} = \partial/\partial n$ نشان میدهیم. با کمک شرط بدون پیچش بودن نمادهای کریستوفل نشان دهید:

$$\nabla_u \mathbf{n} = \nabla_{\mathbf{n}} u$$

ج) با مشتق گیری ∇_u از معادله فوق و استفاده از رابطه جابجاگری مشتق های همورد، نشان دهید:

$$\frac{D^2 \mathbf{n}^\mu}{d\tau^2} \equiv \nabla_u \nabla_u \mathbf{n}^\mu = -R^\mu_{\ \nu\lambda\sigma} u^\nu \mathbf{n}^\lambda u^\sigma$$

این معادله ی $Geodesic\ Deviation$ (انحراف ژئودزیک) است که شتاب دور یا نزدیک شدن ژئودزی های مجاور را بدست می دهد.

د) با مقایسه ی نتایج قسمت های الف و ج، استدلال کنید که در حد غیرنسبیتی داریم:

$$R_{i0j0} = \partial_i \partial_j \phi$$

با استفاده از این رابطه و قانون پواسون برای پتانسیل گرانشی، بار دیگر نتیجه بگیرید که ثابت κ در معادله اینشتین $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ باید $8\pi G$ باشد.

ه) ناظری را روی سطح افق یک سیاهچاله شوارتزشیلد و در حال سقوط آزاد در نظر بگیرید. از مختصات درون رونده ی ادینگتون (v, r, θ, ϕ) استفاده کنید. با یادآوری شکل مخروط نوری روی افق، برای اینکه چاربردار سرعت ناظر در "وسط" این مخروط باشد، اختیار میکنیم: $u = (u^0, -u^0, 0, 0)$. اولا نشان دهید: $u^0 = \sqrt{2}/2$. سپس برای اینکه انحراف ژئودزیک راستای شعاعی را حساب کنیم، قرار دهید $\mathbf{n} = (0, n_r, 0, 0)$، و با قرار دادن در معادله انحراف ژئودزیک، نشان دهید:

$$\frac{D^2 \mathbf{n}_r}{d\tau^2} = \frac{c^6}{8(GM)^2} n_r$$

اگر از معادله قسمت الف استفاده میکردید، نتیجه چه فرقی میکرد؟

و) با فرض اینکه ابعاد ناظر از مرتبه متر است، قرار دهید $n_r = 1m$، و با جایگذاری عددی، شتاب کشندی وارد بر ناظر را برای یک سیاهچاله با جرم خورشید، به صورت عددی بی بعد ضرب در شتاب گرانشی زمین بدست آورید. نتیجه را با یک ابرسیاهچاله با جرم ۱ میلیون برابر جرم خورشید مقایسه کنید.

۲. انتقال فرمی-واکر و چرخش ژیروسکوپ در فضازمان $Kerr$

می خواهیم مفهوم چرخش یک ژیروسکوپ را در فضازمان خمیده بررسی کنیم. ناظری را در نظر بگیرید که ابزاری برای سنجش چرخش، مثل ژیروسکوپ یا آونگ فوکو در اختیار دارد و هنگام حرکت خود، مرکز جرم وسیله را با خودش حمل میکند اما اجازه میدهد که اجزای آن آزادانه بچرخند. فرض میکنیم که ابعاد ژیروسکوپ، در برابر شعاع انحنای فضازمان کوچک باشد؛ یعنی ژیروسکوپ را با چاربرداری در فضامماس وارد بر فضازمان در محل ناظر مدل میکنیم: $e(\tau) \in T_{x(\tau)}M$. میخواهیم قاعده ی انتقال e را در جهانخط ناظر بدست آوریم؛ یعنی بفهمیم $\nabla_u e$ باید چه باشد.

ناظر لخت در فضازمان تخت، هیچ چرخشی در ژیروسکوپ نمیبیند؛ یعنی میگوید: $\frac{de}{d\tau} = 0$. پس طبق اصل هم ارزی، ناظر در حال سقوط آزاد در فضازمان خمیده میبیند که $\nabla_u e = 0$ ؛ یعنی وی ژیروسکوپ را انتقال موازی میدهد.

الف) حال فرض کنید ناظر شتاب داشته باشد. کافی است که بفهمیم ناظری که در فضازمان مینکوفسکی شتاب ثابت دارد، رفتار ژیروسکوپ را در یک لحظه چطور میبیند، و بعد فرم همموردای آن را معرفی کنیم. تترادی که در درس برای این ناظر شتاب ثابت معرفی شد، با ایده ی ما از ژیروسکوپ هایی که چرخشی اضافه بر تاثیرات شتاب نداشته باشند منطبق است. این تتراد عبارت است از:

$$e_{\hat{0}}(\tau) = u(\tau), \;\; e_{\hat{1}}(\tau) = \frac{1}{\alpha}\mathfrak{a}(\tau), \;\; e_{\hat{2}} = \partial_y, \;\; e_{\hat{3}} = \partial_z$$

که $\alpha = \sqrt{\mathfrak{a}.\mathfrak{a}}$ و $\mathfrak{a} = \frac{du}{d\tau}$. نشان دهید برای هر ۴ عضو تتراد، قاعده انتقال زیر برقرار است: (اندیس a شماره اعضای تتراد است.)

$$\frac{de_{\hat{a}}}{d\tau} = -\left((e_{\hat{a}}.u)\, \mathfrak{a} - (e_{\hat{a}}.\mathfrak{a})\, u \right)$$

در نتیجه، باز طبق اصل هم ارزی، ناظر شتابدار در فضازمان خمیده، ژیروسکوپ را با قاعده ی زیر انتقال میدهد:

$$\nabla_u e_\mu = -\Omega^{FW}_{\mu\nu} e^\nu, \quad \Omega^{FW}_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_\mu u_\nu - \mathfrak{a}_\nu u_\mu$$

که به آن انتقال فرمی-واکر گفته میشود.

ب) **امتیازی**: به کمک انتقال فرمی-واکر، نشان دهید اسپین الکترون، با فرکانس $\omega(\gamma - 1)$ در صفحه ی مدار آن حرکت تقدیمی میکند $(Thomas\ Precession)$.

ج) اکنون فرض کنید که ناظر به جای آنکه تتراد خود را مانند ژیروسکوپ حمل کند، بخواهد که محورهای تتراد خود را دوران دهد؛ یعنی باید به آنها گشتاور وارد کند. مثلا ناظر شتاب ثابت در مینکوفسکی، به جای تتراد مذکور، از تتراد زیر استفاده کند:

$$e'_{\hat{0}}(\tau) = e_{\hat{0}}(\tau),\ \ e'_{\hat{1}}(\tau) = e_{\hat{1}}(\tau),\ \ e'_{\hat{2}} = \cos(\omega\tau)e_{\hat{2}} + \sin(\omega\tau)e_{\hat{3}},\ \ e'_{\hat{3}} = -\sin(\omega\tau)e_{\hat{2}} + \cos(\omega\tau)e_{\hat{3}}$$

میتوان برای این تتراد جدید، یک چاربردار دوران تعریف کرد:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega e_{\hat{1}}$$

(آن را طوری تعریف کردیم که در تتراد انتقال یافته با فرمی-واکر، یعنی (e_0, e_1, e_2, e_3) ، مولفه زمان گونه ی آن صفر باشد.) نشان دهید رابطه زیر به ازای $e = e'_{\hat{a}}$ برقرار است:

$$\nabla_u e_\mu = -\Omega_{\mu\nu} e^\nu,\quad \Omega_{\mu\nu} = \Omega^{FW}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} u^\rho \boldsymbol{\omega}^\sigma \qquad (*)$$

و با اصل هم ارزی و فرض لوکالیتی در مورد شتاب، نتیجه بگیرید همین حرف در فضازمان خمیده هم برقرار است. آیا جمله جدیدی که به $\Omega_{\mu\nu}$ اضافه کردیم را از مکانیک کلاسیک به خاطر می آورید؟

د) میخواهیم ببینیم ژیروسکوپ ها در فضازمان $Kerr$ چه رفتاری دارند. اول باید یک تتراد یکامتعامد مناسب در سرتاسر فضازمان پیدا کنیم. در وهله ی نخست $e_{\hat{0}} = \partial_t$ به عنوان عضو اول تتراد به ذهن میرسد. اما مشکل این است که اینها در $ergosphere$ زمان گونه نیستند. در واقع از آنجا که در فضازمان $Kerr$، مخروط های نوری به جهت چرخش سیاهچاله متمایل اند، بهتر است که $e_{\hat{0}}$ را برابر چاربردار سرعت ناظرهایی تعریف کنیم که در راستای ϕ هم حرکت دارند. قرار دهید: $u = A(\partial_t + \tilde{\Omega}\partial_\phi)$، و از شرط زمان گونه بودن u بدست آورید: $\tilde{\Omega}_- \le \tilde{\Omega} \le \tilde{\Omega}_+$. $\tilde{\Omega}_\pm$ را بر حسب ضرایب متریک تعیین کنید.

ه) "ناظرهای غیرچرخان" را آنهایی تعریف میکنیم که $\tilde{\Omega}_{nr} = \frac{\tilde{\Omega}_- + \tilde{\Omega}_+}{2}$. (در ابرسطح $r, \theta = const.$ ، چاربردار سرعت این ناظرها "وسط" مخروط نوری را نشانه می رود). نشان دهید که $\tilde{\Omega}_{nr} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$ و ثابت کنید تکانه زاویه ای این ناظرها صفر است.

و) اکنون تعریف تتراد یکامتعامد زیر طبیعی است:

$$e_{\hat{0}} = A(r,\theta)(\partial_t + \tilde{\Omega}_{nr}\partial_\phi),\ \ e_{\hat{1}} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r,\ \ e_{\hat{2}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\partial_\theta,\ \ e_{\hat{3}} = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}\partial_\phi$$

اگر قرار دهیم $\mathfrak{a} = \nabla_{e_{\hat{0}}} e_{\hat{0}}$ (شتاب ناظرهای غیرچرخان) نشان دهید:

$$\mathfrak{a}^\mu = \Gamma_{\hat{i}\ \hat{0}\hat{0}} e_{\hat{i}}^{\ \mu}$$

که نماد کریستوفل فوق، تصویر نماد کریستوفل معمولی روی تتراد است: $\Gamma_{\hat{a}\ \hat{b}\hat{c}} = e_{\hat{a}\,\nu} e_{\hat{b}}^{\ \mu} e_{\hat{c}}^{\ \sigma} \Gamma^\nu_{\mu\sigma}$.

ز) اگر $\boldsymbol{\omega}$ چاربردار دوران این تتراد باشد، استدلال کنید که بنابر (*)، هر ژیروسکوپ با $r, \theta = const.$ که توسط یک ناظر غیرچرخان حمل می شود ، بردار دورانش $-\boldsymbol{\omega}$ می باشد. پس کافی است این امگا را برای تترادی که تعریف کردیم بدست آوریم. باز از روی (*) نشان دهید:

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma_{\hat{3}\ \hat{0}\hat{2}} e_{\hat{1}} + \Gamma_{\hat{1}\ \hat{0}\hat{3}} e_{\hat{2}} + \Gamma_{\hat{2}\ \hat{0}\hat{1}} e_{\hat{3}}$$

نشان دهید: $\Gamma_{\hat{2}\ \hat{0}\hat{1}} = 0$ ، پس: $\boldsymbol{\omega} = \Gamma_{\hat{3}\ \hat{0}\hat{2}} e_{\hat{1}} + \Gamma_{\hat{1}\ \hat{0}\hat{3}} e_{\hat{2}}$ (**).

ح) برای بدست آوردن شهودی از رابطه (**)، به حد $r \to \infty$ می رویم. نشان دهید در این حد متریک به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 + \frac{2M}{r})dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{2J}{r}\sin^2\theta(dtd\phi + d\phi dt)$$

سپس با تتراد زیر (که حد $r \to \infty$ تتراد قبلی است)

$$e_{\hat{0}} = \partial_t,\ \ e_{\hat{1}} = \partial_r,\ \ e_{\hat{2}} = \frac{1}{r}\partial_\theta,\ \ e_{\hat{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

رابطه ی (**) را محاسبه کرده و بردار دوران تقدیمی ژیروسکوپ ها را بدست آورید:

$$\boldsymbol{\omega}_{pre} = \frac{J}{r^3}(2\cos(\theta)\hat{r} + \sin(\theta)\hat{\theta})$$

این شبیه چه رابطه ای در الکترومغناطیس است؟ استنباط کنید که با اندازه گیری هایی در فاصله ی دور، میتوانیم پارامترهای سیاهچاله را اندازه بگیریم. بعلاوه استنباط کنید که اگر جسم گسترده ای را از سمت استوا به درون سیاهچاله رها کنیم، با اسپین منفی وارد آن می شود و از تکانه زاویه ای آن می کاهد.