نسبیت عام   نیمسال ۲-۹۹

۱. تخمین عددی انتقال به سرخ گرانشی

یک ستاره ی نوترونی نوعی با جرم $M_\odot$ و شعاع ۱۰ کیلومتر، در فاصله ی بسیار دور از زمین در نظر بگیرید. فرض کنید یک اتم هیدورژن، فوتونی متناظر با سری لیمان، $n = 5 \to n' = 1$، تابش کند. با چشم پوشی از سرعت نسبی زمین و ستاره نوترونی، اگر فوتون مورد نظر در زمین به یک اتم هیدروژن در حالت پایه برخورد کند، الکترون آن را حداکثر تا چه ترازی (n) میتواند بالا ببرد؟

۲. $Global\ Positioning\ System$

سیستم GPS از ۲۴ ماهواره تشکیل شده است که در ارتفاع ۲۰۰۰۰ کیلومتری سطح زمین، با سرعت مداری $20000 km/h$ حرکت میکنند. هر ماهواره یک ساعت اتمی بسیار دقیق دارد. بعلاوه هر ماهواره بطور پیوسته سیگنال هایی حاوی موقعیت مکانی و زمان ساعت ماهواره ارسال میکند. یک ردیاب جی پی اس در روی زمین، این سیگنال را دریافت میکند و با دانستن لحظه ی ارسال پیام (کد شده درون خود پیام) و لحظه ی رسیدن پیام (توسط ساعت خود گیرنده)، و ضرب کردن این اختلاف زمانی در سرعت نور، مسافت طی شده ی سیگنال را اندازه میگیرد. در نتیجه با در اختیار داشتن مکان ارسال پیام، موقعیت مکانی گیرنده محدود میشود، و با در دیدرس بودن ۴ تا از این ماهواره ها، گیرنده میتواند موقعیت خود را با دقت ۱۰ متر تعیین کند. برای چنین دقتی، گیرنده باید اختلاف زمانی مذکور را با دقت بهتر از ۳۰ نانوثانیه در روز در اختیار داشته باشد.

آیا لازم است که گیرنده، اثر اتساع زمان ناشی از سرعت ماهواره، یا اتساع زمان گرانشی را در نظر بگیرد؟ به عبارتی، این دو اثر را حساب کنید و ببینید بدون در نظر گرفتن هر کدام، گیرنده چقدر در محاسبه اختلاف زمانی ارسال و دریافت پیام خطا دارد. با فرض اینکه این خطا بطور خطی به خطا در تعیین موقعیت مکانی گیرنده تبدیل میشود، گیرنده چند متر در تعیین مختصات خود اشتباه خواهد کرد اگر نسبیت عام را نادیده بگیرد؟ $M_\oplus = 6 \times 10^{24} kg,\ \ R_\oplus = 6400 km$

۳. هموردا بودن مشتق خارجی فرم های دیفرانسیل

در مورد k-فرم دیفرانسیل $\alpha = \sum_{\mu_1 < \ldots < \mu_k} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_k} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$ روی یک منیفلد d-بعدی $(d > k)$ دیدیم که میتوان یک مشتق خارجی تعریف کرد که آنرا به یک $k+1$-فرم تبدیل کند:

$$d\alpha = \sum_{\mu_1 < \ldots < \mu_k} \alpha_{\mu_1 \ldots \mu_k, \nu}\, dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}$$

سوال این است که ارتباط این مشتق d با مشتق هموردا که برای تانسورها تعریف میشود چیست؟ آیا لازم است که برای فرم های دیفرانسیل بطور جداگانه مشتق هموردا تعریف شود؟ برای این منظور:

الف) فرض کنید $k=1$؛ پس $\alpha=\alpha_\mu dx^\mu$. تانسور بودن این فرم، به این معناست که با یک تبدیل مختصات $x\to x'$ ، مولفه های α به شکل $\alpha'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\alpha_\nu$ تبدیل میشوند. با این شرایط، نشان دهید $d\alpha$ هم یک تانسور است.
(راهنمایی: $d\alpha$ را به جای پایه ی $dx^\mu\wedge dx^\nu$ ، در پایه ی $dx^\mu\otimes dx^\nu$ بسط دهید.)
ب) **امتیازی**: همین حکم را برای k دلخواه ثابت کنید.
پس $d\alpha$ هم موجودی هندسی و مستقل از مختصات است. در نتیجه انتظار داریم مشتق همورد یک فرم دیفرانسیل، همان مشتق خارجی آن باشد. ثابت کنید که چنین است؛ یعنی:
ج) نشان دهید اگر α یک ۱-فرم باشد، آنگاه:

$$\alpha_{\nu,\mu}-\alpha_{\mu,\nu}=\alpha_{\nu;\mu}-\alpha_{\mu;\nu}$$

به همین علت است که اگر A چاربردار پتانسیل باشد، رابطه ی $F=dA$ در فضازمان خمیده هم همچنان معتبر است.

۴. خواص فرمال مشتق همورد

فرض کنید V و U میدان برداری روی فضازمان باشند و f نیز تابعی دلخواه باشد. نشان دهید:
الف) $\nabla_\mu(U+V)=\nabla_\mu U+\nabla_\mu V$
ب) $\nabla_\mu(fV)=\partial_\mu(f)V+f\nabla_\mu V$
ج) $\partial_\mu\langle U,V\rangle=\langle\nabla_\mu U,V\rangle+\langle U,\nabla_\mu V\rangle$
که منظور از $\langle U,V\rangle$ ضرب داخلی دو بردار به کمک متریک می باشد.

۵. شتاب

در فضازمان خمیده هم انتظار داریم که زمان ویژه ی یک ناظر، طول فضازمانی مسیر او در فضازمان باشد؛ یعنی $d\tau^2=-ds^2$.
الف) به کمک رابطه فوق نشان دهید $u^2=-1$.
ب) شتاب را به صورت $a=\nabla_u u$ تعریف میکنیم (دقت کنید که $\nabla_u=u^\mu\nabla_\mu=D/d\tau$). به کمک رابطه ج سوال قبل، نشان دهید: $\langle u,a\rangle=0$.

۶. لاگرانژی ذره آزاد در فضازمان خمیده

نشان دهید که کنش ذره ی آزاد در فضازمان خمیده، تعمیم سرراستی از کنش آن در حالت مینکوفسکی است؛ یعنی ثابت کنید که وردش گیری از کنش زیر، معادله ژئودزیک را می دهد:

$$S=-m\int d\tau=-m\int d\lambda\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

که λ پارامتری دلخواه برای پرمایش جهانخط ذره است (و در حالت خاص میتواند همان τ اختیار شود).

برای علاقه مندان

یکی از پکیج های متمتیکا برای هندسه و نسبیت عام (مثلا $ccgrg$، $GREATER2$، یا $diffgeo$) را دانلود کنید. با وارد کردن متریک کروی در فضای تخت سه بعدی، یا اصولا هر متریکی که صرفا از یک تعویض مختصات در فضای تخت بدست آمده باشد، تمام مولفه های تانسور ریمان را با متمتیکا بدست آورید. قضیه زیر را که توسط ریمان ثابت شد چک کنید:
متریک g را میتوان با یک تعویض مختصات به متریک تخت δ یا η تبدیل کرد، اگروتنهااگر تانسور ریمان محاسبه شده از روی g همه جا صفر باشد.
توجه: در ادامه ی درس، مطمئن شوید که پیش از آنکه محاسبات طولانی کانکشن و انحنا را فقط با کد زدن جلو ببرید، حتما چندباری این کار را برای متریک های غیر بدیهی بطور دستی انجام داده باشید.