نسبیت عام نیمسال ۲-۹۹

۱.

تمرین شماره ۲ فصل اول کتاب $Carroll$

۲. فرم کانونی بردارها

نشان دهید اگر چاربردار v زمان گونه باشد، یعنی $(v^2 = v^\mu v_\mu < 0)$ ،تبدیل لورنتسی وجود دارد که آن را به $(\sqrt{-v^2}, 0, 0, 0)$ تبدیل کند؛ اگر فضاگونه باشد میتوان آنرا به $(0, \sqrt{v^2}, 0, 0)$ تبدیل کرد و اگر نورگونه باشد بصورت $(v_0, v_0, 0, 0)$ قابل نوشتن است.

۳. لاگرانژی ذره آزاد نسبیتی

فرض کنید ذره ای روی مسیر Γ در فضازمان مینکوفسکی حرکت کند. تنها کمیت ناوردای لورنتسی که به این مسیر میتوانیم نسبت دهیم، مدت زمانی است که ساعت همراه ناظر نشان میدهد؛ یعنی طول فضازمانی خم گاما. پس عبارت زیر حدس معقولی برای کنش این ذره است:

$$S = \alpha \int_\Gamma d\tau$$

که τ زمان ویژه ی ذره مورد نظر است. الف) نشان دهید برای اینکه در حد غیرنسبیتی، به لاگرانژی $\frac{1}{2}mv^2$ برسیم، باید $\alpha = -mc^2$. ب) با وردش گیری بر حسب $x^\mu(\tau)$ ، به معادله حرکت $du^\mu/d\tau = 0$ برسید که همان چیزی است که انتظار داشتیم.

۴. کلاین گوردون

معادله کلاین گوردون ابتدائاً تلاشی بود برای نوشتن معادله شرودینگر بصورت نسبیتی. با معادله تحول شروع میکنیم؛ یعنی این ایده که همیلتونی، مولد انتقال در زمان تابع موج ϕ است: $i\partial_t\phi = H\phi$. دوست داریم که رابطه انرژی نسبیتی بطور عملگری برقرار باشد، یعنی $H^2 = \vec{P}^2 + m^2$. با به توان ۲ رساندن دو طرف معادله تحول و جایگذاری همیلتونی، به اضافه این ایده که اثر عملگر تکانه روی تابع موج، به شکل $-i\nabla$ است به معادله کلاین گوردون میرسیم:

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi = 0$$

الف) با اضافه کردن $\hbar$ و c معادله فوق را از نظر ابعادی تصحیح کنید.

ب) در دو بعد، تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

کلی ترین لاندا را طوری بیابید که معادله کلاین گوردون تحت این تبدیل ناوردا بماند. اگر $m = 0$، کلی ترین حالت تبدیل چیست؟ این تفاوت چه معنایی دارد؟

۵. معادلات ماکسول

میدانیم که $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ مثل یک تانسور مرتبه ۲ تحت تبدیلات لورنتس رفتار میکند. بر همین اساس، تبدیلات میدان الکتریکی و مغناطیسی را تحت دورانی حول محور z بدست آورید. (میبینید که چرا E و B را در الکترومغناطیس به چشم "بردار"هایی در فضای سه بعدی نگاه میکردیم). تبدیلات E و B را تحت بوست در راستای x بدست آورده و صریحا نشان دهید که معادلات ماکسول (بدون سورس) تحت این تبدیل ناوردا هستند. به اینکه برای اثبات هر کدام از معادلات، مثل $\nabla'.E' = 0$ در دستگاه S'، به کدام معادلات از دستگاه S نیاز پیدا میکنید توجه کنید.

۶. کنش الکترومغناطیس

بر خلاف ذره که کنش آن انتگرالی روی جهانخط آن است، کنش الکترومغناطیس انتگرالی روی کل فضازمان است، زیرا میدان ها در تمام فضازمان حضور دارند.

$$S = \int \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) d^4x$$

الف)برای اینکه از صحت رابطه فوق مطمئن شویم، لازم است بتوانیم معادلات ماکسول را از آن استخراج کنیم. برای این منظور، از کنش فوق نسبت به $A_\mu(x)$ وردش بگیرید و معادلات ماکسول را به صورت $\partial^\mu F_{\mu\nu} = -J_\nu$ بدست آورید.

ب) در کنش فوق، J چاربردار چگالی جریان است که میتواند در فضازمان گسترده باشد. در صورتی که سورس بار، نقطه ای باشد، انتظار داریم که در جهانخط ذره، چاربردار چگالی جریان qu^μ بوده، بقیه جاها صفر باشد. پس انتظار داریم در این حالت جمله ی دوم کنش برابر باشد با:

$$+q \int d\tau A_\mu u^\mu$$

طبق قسمت الف، چنین جمله ای، به ما سورس معادلات ماکسول را میدهد. حال نشان دهید دقیقا همین جمله میتواند در عین حال اثر میدان بر ذره، یعنی نیروی لورنتس را بدهد. پس از کنش $\int d\tau(-m + qA_\mu u^\mu)$ نسبت به $x^\mu(\tau)$ وردش بگیرید، و چک کنید که همان نیروی لورنتس را در اختیار دارید.