1 Multipole Expansion:

$r \gg r'$

q_1, q_2, $\vdots$, q_n (d)

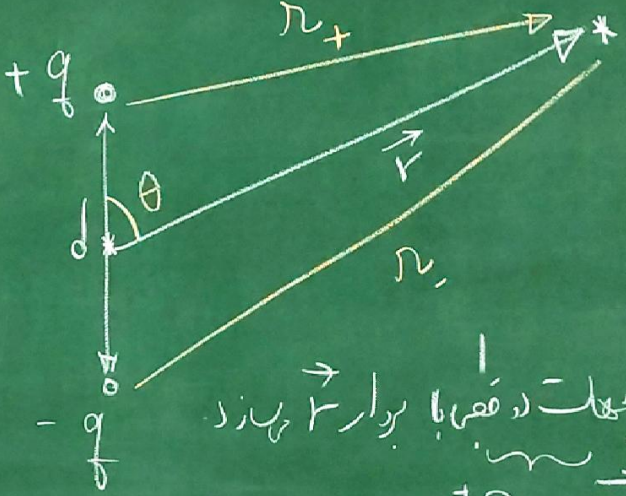
مشاهده‌گر: پتانسیل را حسب پتانسیل

تک بار نقطه + دوقطبی + چهارقطبی + ...

(مجموعه بار (توزیع

پیچیدگی توزیع بار

دوقطبی کلاسیک!



θ: زاویه است جهت دوقطبی با بردار $\vec r$ می‌سازد

$$\vec p \equiv q\vec d$$

dipole moment

2/ $$\varphi_{tot} = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\}$$

$$r_\pm = \left(r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp 2\left(\frac{d}{2}\right) r \cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

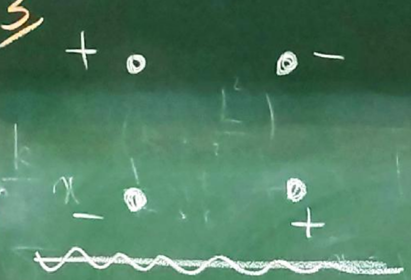
$$r_+^{-1} - r_-^{-1} = r^{-1}\left[\left\{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - \frac{d}{r}\cos\theta\right\}^{-\frac{1}{2}} - \left\{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \frac{d}{r}\cos\theta\right\}^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \simeq \frac{d\cos\theta}{r^2}$$

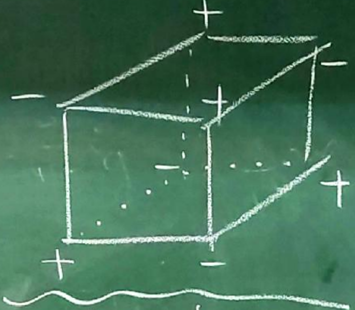
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,d\cos\theta}{r^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

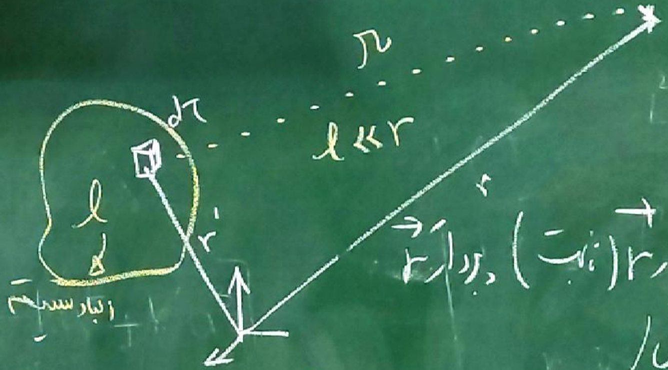
3



$$\varphi \propto \frac{1}{r^3}$$



$$\varphi \propto \frac{1}{r^4}$$



زاویه بین بردار $\vec{r}$ (ثابت) و بردار $\vec{r}'$ — متغیر در داخل انتگرال

توزیع بار پیوسته:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r')\,d\tau}{\mathscr{r}}$$

$$\mathscr{r}^2 \equiv r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$$

$$\mathscr{r} \equiv r\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\epsilon \ll 1$$

4) $\epsilon = \left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta\right)$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \cdots\right]$$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(\frac{r'}{r} - 2\cos\theta\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[1\left(\frac{r'}{r}\right)^0 + \left(\frac{r'}{r}\right)^1(\cos\theta) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \cdots\right.$$

5 Multipole Expansion:

$$\frac{1}{\mathscr{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

↓ generating function of Legendre Poly.

$r \gg r'$

q_1 ⟷ ▷

d ↕ q_2

⋮

q_n

مشاهده‌گر: پتانسیل را برحسب پتانسیل

تک بار نقطه + دوقطبی + چهارقطبی + ...

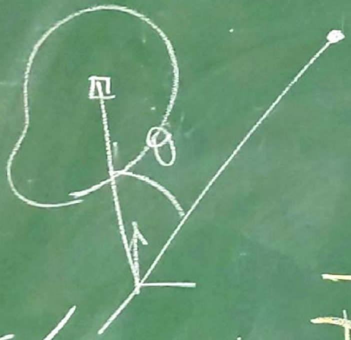
↑ پیچیدگی توزیع بار

(مجموعه بار (توزیع

$$\frac{1}{\mathscr{r}} \begin{cases} n=0 & \frac{1}{r} & \text{monopole.} \\ n=1 & \frac{1}{r^2} & \text{dipole} \\ n=2 & \frac{1}{r^3} & \text{Quadrapole} \\ \vdots & & \end{cases}$$

6) $$\varphi_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\int \underbrace{r'\cos\theta}_{\hat{r}\cdot\vec{r}'}\,\rho(r')\,d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\int \vec{r}'\rho(r')\,d\tau'$$



$p = qd$

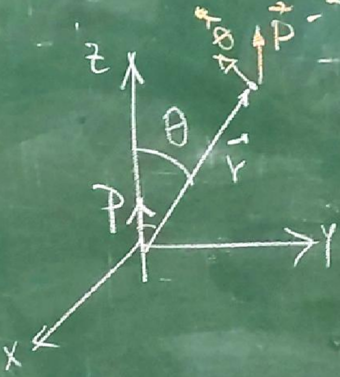
$$\vec{P} \equiv \int \vec{r}'\rho(r')\,d\tau'$$

سهم برتر (دوقطبی) از ممان تولید —

$\vec{p} = q\vec{d}$

$$\varphi_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

سؤال: میدان الکتریکی دوقطبی چیست؟



$$E_\phi = 0$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

7/

$$\vec{E} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\right] \quad *$$

$$\vec{p} = (\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} + (\vec{p}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta}$$

$$= p\cos\theta\,\hat{r} - p\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p} \equiv 3p\cos\theta\,\hat{r} - p\cos\theta\,\hat{r} + p\sin\theta\,\hat{\theta}$$

° میدان الکتریکی دوقطبی متناسب با $1/r^3$!

° مورد مسئله‌ای که چند ۲ قطبی وجود دارد

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

جمع برداری

نتیجه در رابطه * قرار دهید