الکترومغناطیس۱، پاییز ۱۴۰۱

دکتر شانت باغرام

تمرین سری اول

سوال۱ : درستی(یا نادرستی!) روابط زیر را اثبات کنید . سعی کنید با بررسی مثال خاص برای خودتان روابط را تبیین کنید.

1) $\int \nabla T \, d\tau = \oint T \, \overrightarrow{da}$
2) $\int \nabla \times \overrightarrow{F} \, d\tau = -\oint \vec{F} \times \overrightarrow{da}$
3) $\int (\varphi \nabla^2 \vartheta - \vartheta \nabla^2 \varphi) d\tau = \oint (\varphi \nabla \vartheta - \vartheta \nabla \varphi) . \overrightarrow{da}$
4) $\int \nabla \varphi \times \overrightarrow{da} = -\oint \varphi \overrightarrow{dl}$
5) $\nabla(\vec{A}.\vec{B}) = A \times \nabla \times B + B \times \nabla \times A + (A.\nabla)B + (B.\nabla)A$
6) $\nabla.(A \times B) = B.\nabla \times A - A.\nabla \times B$
7) $A \times (B \times C) = B(A.C) - C(A.B)$

سوال۲ :

الف) با استفاده از قضیه ی دیورژانس و استوکس ، نمایش عملگر دیورژانس و کرل را در دستگاه مختصات کروی و استوانه ای بدست آورید.(راهنمایی! : در یکی از پیوست های گریفیث اثبات وجود دارد . می توانید آن را هم بخوانید و به زبان خودتان اثبات را باز نویسی کنید!)

ب) در دستگاه دکارتی نشان دهید کرل گرادیان یک میدان اسکالر دلخواه صفر است.

ج)در دستگاه دکارتی نشان دهید دیورژانس کرل یک میدان برداری دلخواه صفر است.

د) کمی توضیح دهید که چرا وقتی درستی یک رابطه ی برداری را در دستگاه مختصاتی خاص بررسی میکنیم آن رابطه در تمام دستگاه های دیگر نیز درست است.(راه هوشمندانه و شهودی تری برای دو قسمت بالا با استفاده از قضایای استوکس و دیورژانس وجود دارد ، میتوانید رویش فکر کنید و در کلاس حل تمرین صحبت خواهیم کرد)

راهنمایی: پیشنهاد می کنم برای قسمت های ب ، ج به جای نوشتن صریح همه ی مولفه ها کمی اندیس بازی کنید ! (:

سوال۳ :

الف) نشان دهید:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^3(r)$$

ب) حالا فرض کنید به مبدا علاقه مند نیستیم و نمیخواهیم اثر اپراتور های برداریمان را روی میدان در آن نواحی مطالعه کنیم . در این صورت پاسخی برای معادله ی لاپلاس در بخش الف در آوردید.

حال میخواهیم دسته ای از پاسخ های دیگر را از بخش الف بسازیم. نشان دهید :

$$\nabla^2\left(\,(\vec{a}.\nabla)\frac{1}{r}\right) = 0$$

aبرداری ثابت است.

ج) نشان دهید

$$\nabla^2\left(\,(a.\nabla)^n\frac{1}{r}\right) = 0$$

nعدد طبیعی دلخواهی است.

چشم انداز: در واقع این پاسخ هایی که برای معادله ی لاپلاس در این سوال بدست آورده اید متناسب هستند با پتانسیل چند جمله ای های مختلف الکتریکی ! بعدها به چند قطبی ها خواهیم پرداخت.

سوال ۴ : نمک یک بعدی !

فرض کنید ۲ نوع ذره با تعداد بسیار زیاد داریم. جرم این دو نوع ذره یکسان است و بار الکتریکی اشان اندازه ی یکسان اما علامت مخالف دارند. ذرات را با فاصله ی یکسان روی یک خط به صورت یکی در میان می چینیم. در حد تعداد ذرات به سمت بی نهایت :

الف) انرژی پتانسیل الکتریکی بر واحد ذره را حساب کنید.

ب) حال کمی چاشنی مکانیک کوانتومی اضافه می کنیم. بنابراصل عدم قطعیت هایزنبرگ نمیتوان هم مکان و هم تکانه ی ذرات را با دقت بی نهایت مشخص کرد. بنابر این فیزیکی نیست که ما ذرات را همواره ساکن در شبکه ای که چیده ایم در نظر بگیریم . بنابراین بیایید برای هر ذره تکانه ای از مرتبه ی ثابت پلانک تقسیم بر فاصله ی ذرات مجاور در نظر بگیریم. حال انرژی کل (جنبشی و پتانسیل الکتریکی) بر واحد ذره را بدست آورید و ببینید به ازای چه مقداری از فاصله ی ذرات انرژی کمینه می شود.

سوال ۵ : نگاهی عمیق تر به قانون ارشمیدس !

الف) فرض کنید جسمی با شکل دلخواه درون محیطی با فشار ثابت داریم. نشان دهید هیچ نیروی خالصی بواسطه فشار محیط به جسم وارد نمی‌شود. (چرا قبل از محاسبه هم چنین انتظاری داشتیم؟)

ب) فرض کنید شاره‌ای در ناحیه $z < 0$ وجود دارد که فشار آن از رابطه $p = -\rho g z$ بدست می‌آید. فرض کنید جسمی با شکل دلخواه را به طور کامل درون این شاره غوطه‌ور کرده‌ایم. ثابت کنید نیروی وارده از طرف سیال به این جسم برابر $\rho g v\, \boldsymbol{k}$ می‌باشد که v حجم جسم است.

ج)(امتیازی) آیا میتوانید تعمیمی از رابطه قسمت قبل برای حالتی که میدان گرانشی یکنواخت نیست بیابید؟

راهنمایی: سعی کنید رابطه‌ای بین گرادیان فشار و شتاب گرانشی بیابید.