بنام خدا

فصل ششم - اصطکاک و کاربردهای آن

سرفصل مطالب : - انواع اصطکاک

- کاربرد اصطکاک خشک در ماشین‌ها : گوه ها

پیچ های انتقال قدرت

یاتاقان ها

تسمه های انعطاف پذیر

- نیروی وارد شده بین دو سطح در تماس در راستای مماسی (= مخالف در جهت تمایل حرکت نسبی دو سطح) به علت وجود ناهمواری های دو سطح را نیروی اصطکاک (Friction Force) گویند.

برخلاف تصور عامه، نیروی اصطکاک همواره نیروی مزاحمی نیست و در مواردی به دنبال حداکثر کردن آن نیز می باشیم (ترمز و کلاچ در خودرو، گوه ها و ...)

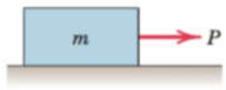
- یک دسته بندی می‌تواند شامل تفکیک نیروهای اصطکاک به دسته های اصطکاک خشک (Dry Friction)، اصطکاک سیال (Fluid Friction) و اصطکاک داخلی (Internal Friction) باشد.

- اصطکاک خشک بین دو سطح در حال تماس (غیر روغن کاری شده) که تمایل به لغزش یا در حال لغزش بر روی یکدیگر هستند رخ می دهد. به این نوع اصطکاک، اصطکاک کولمب (Coulomb Friction) نیز گفته می‌شود.

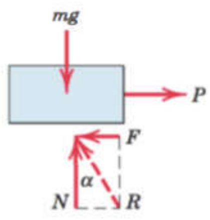
در این فصل فقط اصطکاک خشک و کاربرد آن در ماشین ها را مطالعه می کنیم

- مکانیزم اصطکاک خشک :

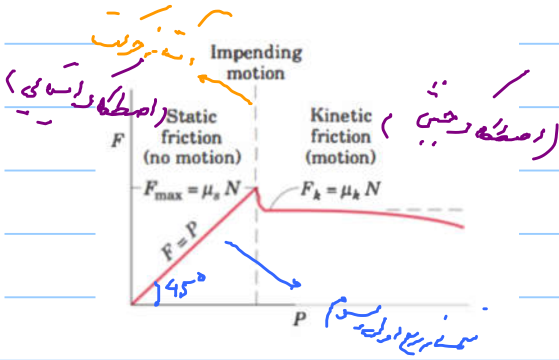
- مطابق شکل، اگر بر جسمی افقی که بر روی سطحی ناهموار قرار دارد، نیروی P را از مقدار صفر افزایش داده، جسم در یک مقدار مشخص P، شروع به حرکت می‌کند؛ دیاگرام آزاد و منحنی نیروی اصطکاک (F) بر حسب P در شکل های زیر نمایش داده شده است



(a)



(b)



- فرض می‌شود که نیروی اصطکاک ایستایی ماکزیمم ($F_{s_{max}}$) و اصطکاک جنبشی (F_k) به جنس سطوح تماس و نیروی عمودی دو سطح بستگی داشته و مستقل از مساحت وجه در حال تماس است.

- اصطکاک ایستایی می‌تواند هر مقداری بین صفر تا $F_{s_{max}} = \mu_s N$ را داشته باشد؛ بنابراین فقط در آستانه حرکت

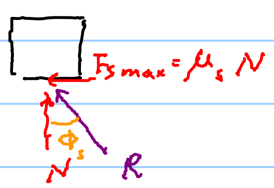
ضریب اصطکاک ایستایی

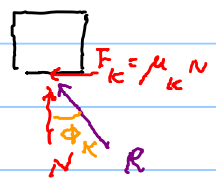
$0 \le F_s \le F_{s_{max}} = \mu_s N$ می‌توان از این رابطه حداکثر استفاده کرد

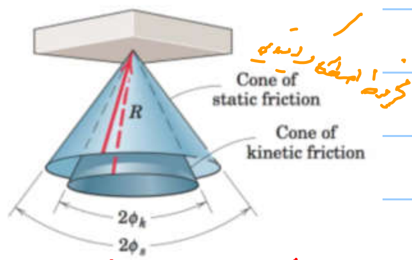
- عموماً ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) کمتر از ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) است : $\mu_k < \mu_s$ (ضرایب اصطکاک بدون دیمانسیون هستند)

- توجه : ضرایب اصطکاک بین دو سطح تعریف می‌شود و صحبت از ضریب اصطکاک یک سطح بی‌معنی است.

- زوایای اصطکاک :







$\phi_s = tg^{-1}\mu_s$ $\phi_k = tg^{-1}\mu_k$

نیروی برآیند اصطکاک ایستایی خط اثرش باید در داخل محدوده (≡ مخروط) قرار گیرد؛ بنابراین در آستانه حرکت، زاویه نیروی اصطکاک ایستایی با بردار عمود بر سطح، زاویه $\phi_s = tg^{-1}\mu_s$ را می‌سازد.

- در مسائل اصطکاک اگر در مورد ساکن یا متحرک بودن جسم ذکری نشده بود، نیروی اصطکاک ایستایی را $\mu_s N$ برابر $F_{s_{max}}$

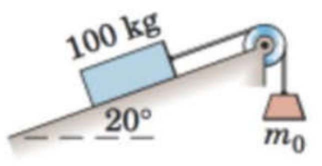
در نظر نگیرید؛ در غیر این صورت F_s را باید به گونه‌ای که مسئله خواسته به دست آورد؛ اگر $F_s \le F_{s_{max}}$ بود، F_s که به دست آمده صحیح

بوده و فرض در تعادل بودن جسم نیز درست می‌باشد. اگر $F > F_{s_{max}}$ به دست آمد، دیگر جسم در تعادل ایستایی نبوده و حرکت

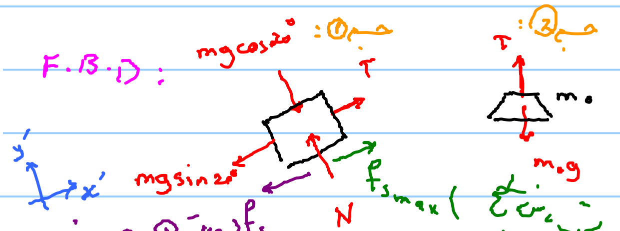
رخ داده است که در این حالت، اصطکاک از نوع جنبشی ($F_k = \mu_k N$) می‌باشد.

- مثال: در شکل زیر، اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیبدار $\mu_s = 0.3$ باشد، محدوده جرم m_0 را بیابید به

گونه‌ای که سیستم در تعادل ایستایی بماند. (⇐ جسم نه به سمت پایین سطح شیبدار بلغزد و نه به بالا حرکت کند)



F.B.D :



$f_{s_{max}}$ (حالت ①: جسم بخواهد به بالا سطح شیبدار حرکت کند)

$f_{s_{max}}$ (حالت ②: اگر جسم بخواهد به سمت پایین سطح شیبدار حرکت کند)

تعادل جسم 2 : $m_0 g - T = 0 \Rightarrow T = m_0 g = 9.81 m_0$

تعادل جسم 1 : $\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow N - \overset{981}{mg} \cos 20° = 0 \Rightarrow \underline{N = 922\ N}$

حالت ① : جسم بخواهد به بالا حرکت کند → $f_{s_{max}} = \mu_s N$ (نیروی اصطکاک به سمت پایین (آستانه حرکت))

$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow T - mg\sin 20 - \underbrace{\mu_s N}_{f_{s_{max}}} = 0 \Rightarrow 9.81 m_0 - 981 \sin 20° - \underbrace{0.3 \times 922}_{f_{s_{max}} = 277 N} = 0$

$\Rightarrow \underline{m_0 = 62.4\ kg}$ → حداکثر مقدار m_0 برای اینکه جسم ... به بالا نرود / به پایین سطح نلغزد.

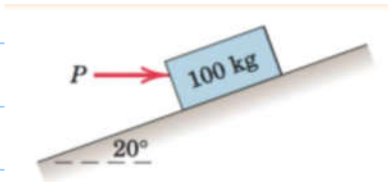
حالت ② : جسم بخواهد به پایین سطح بلغزد → $f_{s_{max}} = \mu_s N$ (نیروی اصطکاک به سمت بالا (آستانه حرکت))

$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow mg\sin 20° - T - \mu_s N = 0 \Rightarrow \{ \underline{m_0 = 6.01\ kg}$ → حداقل m_0 برای اینکه جسم به پایین نلغزد

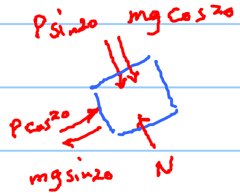
→ محدوده m_0 برای تعادل سیستم : $6.01 \le m_0 \le 62.4$ kg

سؤال : اگر $m_0 = 40$ kg باشد، مقدار اصطکاک چقدر و در چه جهتی است؟

- در شکل زیر، اگر ضرایب اصطکاک استاتیکی و جنبشی جسم و سطح شیبدار به ترتیب 0.2 و 0.17 باشد، مقدار نیروی اصطکاک را در حالت های الف) $P = 500N$ و ب) $P = 100\,N$ بیابید.



F.B.D :



الف) $P = 500\,N$: $\begin{cases} P\cos 20^\circ = 469.8\ N \\ mg\sin 20 = 335.5 \end{cases}$ → اصطکاک به سمت پایین سطح است

اگر اصطکاک استاتیکی باشد : $P\cos 20^\circ - mg\sin 20^\circ - f_s = 0 \rightarrow$? $f_s = 134.3\ N$ * ← حال باید چک کنیم که آیا سطح قابلیت وارد کردن این مقدار نیروی اصطکاک را دارد یا خیر

$N - (P\sin 20^\circ + mg\cos 20^\circ) = 0 \Rightarrow N = 1093\,N$

$\rightarrow F_{s_{max}} = \mu N = 0.2 \times 1093 \Rightarrow F_{s_{max}} = 219\ N$ **

*, ** → $f_s < F_{s_{max}}$ (محاسبه شده) چون → اصطکاک از نوع استاتیک است ، $f_s = 134.3\ N$ (به سمت پایین سطح شیبدار)

ب) $P = 100\,N$: $\begin{cases} P\cos 20^\circ = 94.0\,N \\ mg\sin 20^\circ = 335.5\ N \end{cases}$ → اصطکاک به سمت بالای سطح شیبدار است

اگر اصطکاک استاتیکی باشد : $mg\sin 20^\circ - P\cos 20^\circ - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 242\ N$ $\Big\{ f_s > F_{s_{max}}$ ✗

$N - (P\sin 20^\circ + mg\cos 20^\circ) = 0 \Rightarrow N = 956\ N \Rightarrow F_{s_{max}} = 191.2$

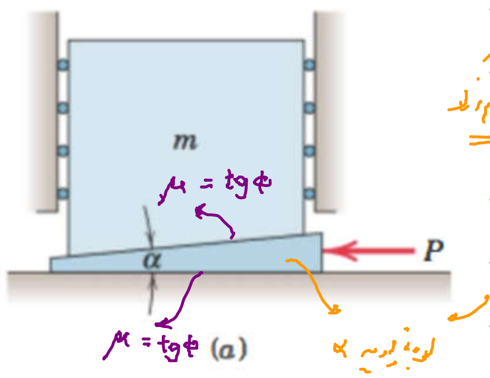
⇒ بنابراین اصطکاک از نوع جنبشی است، و جسم در حال سقوط است : $f_k = \mu_k N = 0.17 \times 956 \rightarrow \boxed{f_k = 162.5\,N}$ به سمت بالای سطح

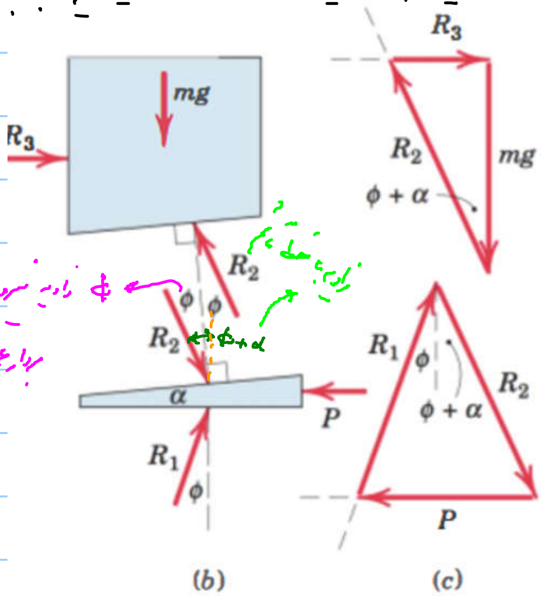
۳- کاربرد اصطکاک در ماشین‌ها:

الف) گوه‌ها (Wedges)

- گوه‌ها ماشین‌های ساده‌ای هستند که برای وارد کردن نیروهای بزرگ به اجسام به واسطه نیروی کوچک و یا تنظیم موقعیت یک جسم سنگین مورد استفاده قرار می‌گیرند. ← اساس کار گوه‌ها، نیروهای اصطکاک است.

- در شکل زیر، به کمک نیروی افقی P، قادر هستیم تا به جرم m نیروی زیادی وارد کنیم و یا موقعیت آن را به صورت جزئی تنظیم کنیم. اگر مجموعه در تعادل باشد:



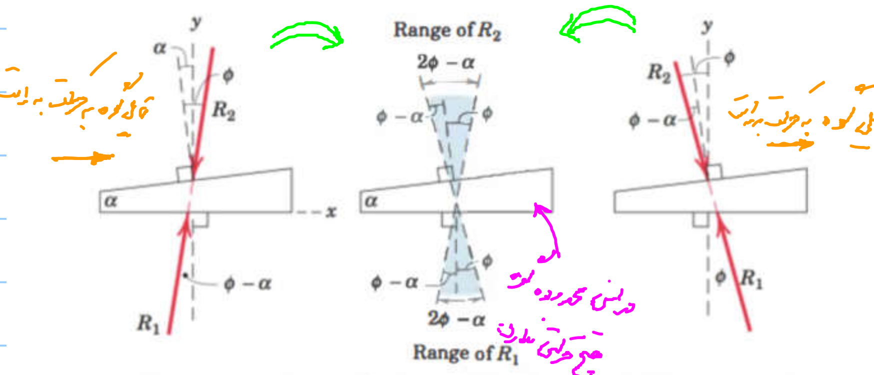


$$\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{P} = \vec{0} & \text{: تعادل گوه} \\ \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{W} = \vec{0} & \text{: تعادل جرم m} \end{cases}$$

- حال فرض کنید نیروی P را حذف کنیم. برای گوه چه اتفاقی می‌افتد؟ دو حالت قابل وقوع است: یا گوه متمایل است به حرکت خود برگشته و از زیر بار خارج شود (تمایل به حرکت به سمت راست / بیرون) و یا اینکه به واسطه نیروهای اصطکاک گیر کند (!)

سیستم‌های خودنگهدارنده (حالت خودقفلی یا self-locking)

(لغزش در حالت a و c)



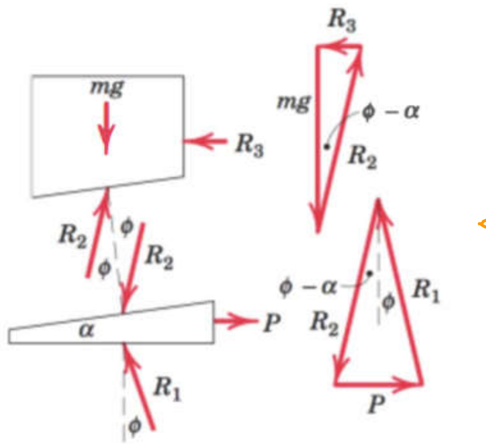
(a) Slipping impending at upper surface (b) Range of $R_1 = R_2$ for no slip (c) Slipping impending at lower surface

لغزش در سطح بالایی: اصطکاک در سطح بالا به حداکثر مقدار خود رسید

بسیاری از ماشین‌ها به این پدیده متکی‌اند.

- اگر $\alpha < 2\phi$، پدیده لغزش در دو سطح بالا و پایین نمی‌تواند به صورت همزمان رخ دهد و ما با خودقفلی مواجهیم.

لغزش در سطح زمین



Forces to lower load

- اگر گوه‌های خودقفل باشند، برای خارج شدن گوه از زیر بار (حرکت به سمت راست در شکل)

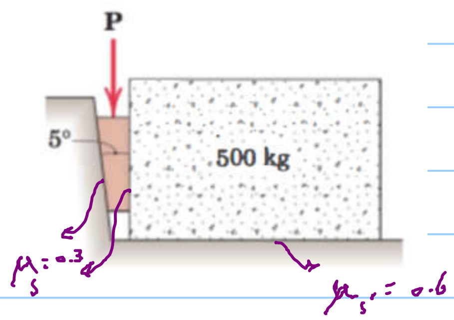
باید نیروی P را به سمت چپ به گوه وارد نمود. در این حالت می‌توان از روابط

تعادل سه نیرو و چندضلعی مربوطه را یافت. (به عنوان مثال حداقل P جهت

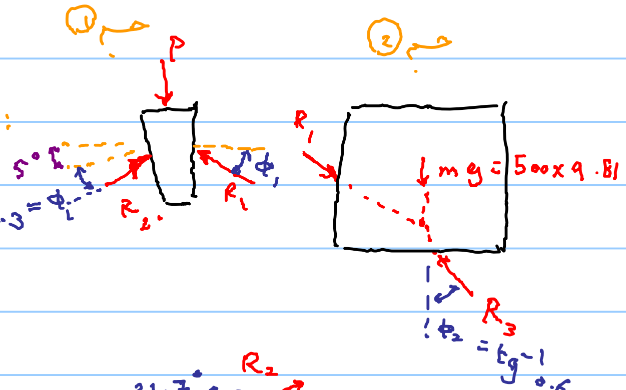
بیرون کشیدن گوه به طوری که بار را پایین بیاورد را پیدا کرد)

- مثال: موقعیت افقی بلوک 500 کیلوگرمی بتونی شکل زیر با گوه‌ی 5° تحت نیروی P تنظیم شده است. اگر ضریب اصطکاک گوه با سطوح

0.3 و ضریب اصطکاک بتون با زمین 0.6 باشد، حداقل نیروی P جهت حرکت بلوک را محاسبه نمایید.

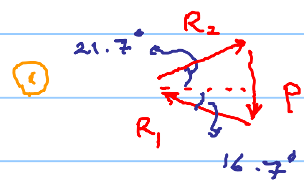


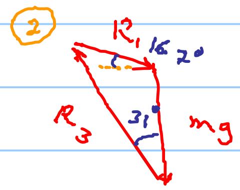
F.B.D :



$\phi_1 = tg^{-1} 0.3 \Rightarrow \phi_1 = 16.7^\circ$

$\phi_2 = tg^{-1} 0.6 \Rightarrow \phi_2 = 31^\circ$





تعادل جسم ②

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_3 - mg\,\hat{j} = \vec{0}$$

$$500 \times 9.81 \sin 31^\circ - R_1 \cos(16.7^\circ + 31^\circ) = 0$$

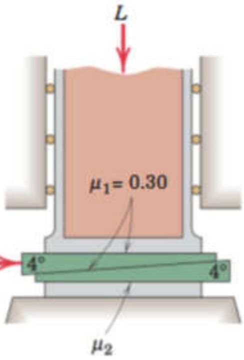
$$\Rightarrow R_1 = 3750 \text{ N}$$

تعادل جسم ① :

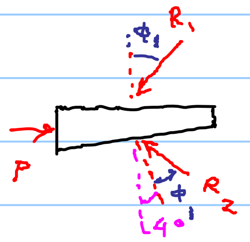
$$3750 \cos(90 - (2\phi_1 + 5^\circ)) - P \cos(\phi_1 + 5^\circ) = 0$$

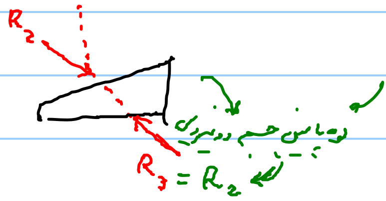
$$\Rightarrow \{ P = 2500 \text{ N}$$

سؤال: مطابق شکل، از دو گوه ۴° جهت تنظیم موقعیت عمودی بار L استفاده می‌شود. حداقل ضریب اصطکاک μ_2 بین زمین و گوه پایینی چقدر باشد تا در اثر اعمال نیروی افقی P بر گوه بالایی، بار به سمت بالا حرکت کند؟



⟹ F.B.D :





$$\phi_2 = \phi_1 + 4 \rightarrow \phi_2 = 20.7^\circ$$

$$\rightarrow \mu_2 = tg\ 20.7^\circ \rightarrow \underline{\mu_{2\,min} = 0.378}$$

ب) پیچ‌ها (Screws)

- از پیچ‌ها جهت بستن / سفت کردن و یا انتقال قدرت / جابجایی بار استفاده می‌شود.

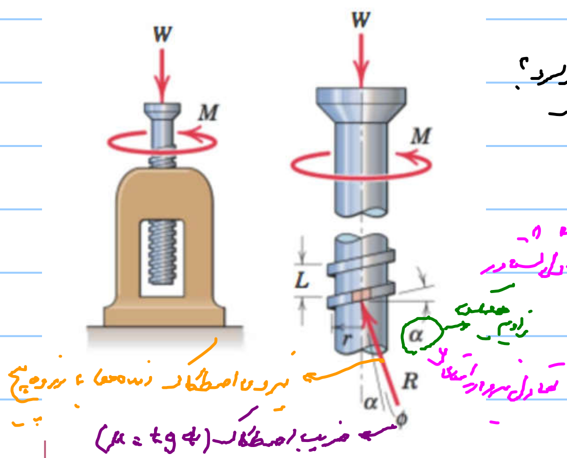
- پیچ‌های دنده مربعی (square thread) یکی از کاربردی‌ترین انواع پیچ جهت انتقال قدرت و جابجایی بار می‌باشند.

- گام پیچ (Lead): میزان پیشروی پیچ به ازای یک دور (=2π رادیان) چرخش پیچ

- زاویه حلزونی پیچ (helix angle):

$$\alpha = tg^{-1} \frac{\overset{\text{گام پیچ}}{L}}{\underset{\text{شعاع متوسط پیچ}}{2\pi r}}$$

- حال حجم میزان گشتاور لازم است تا بار W بالا برود / در آستانه حرکت به بالا قرار گیرد؟



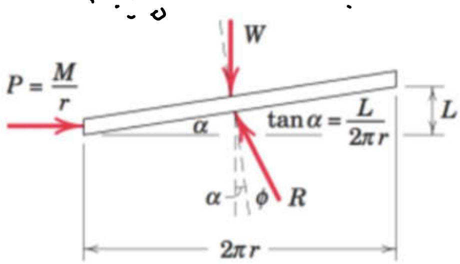
(= حرکت بار در خلاف جهت نیروی بار)

تعادل گشتاور: $M = (r \sin(\phi+\alpha))(\Sigma R)$

$$\Rightarrow \boxed{M = W.r.tg(\phi+\alpha)}$$

: $W = (\cos(\phi+\alpha))(\Sigma R)$

- شکل زیر، معادل شکل صفحه قبل است بدین صورت که به اندازه نیم گام، نصفه‌ها باز شده‌اند و همچنین به جای گشتاور M،



(a) To raise load

نیروی معادل $P=\frac{M}{r}$ در محل نشان داده شده، قرار داده شده است.

نیاز است طبق رابطه صفحه قبل: $M = Wr\,tg(\phi+\alpha)$

- حال اگر گشتاور M برداشته شود، رابط پیچ چه اتفاقی می‌افتد؟ یا سرجای خود باقی می‌ماند (اگر $\alpha<\phi$) که به

این حالت خود قفل (self-locking) گویند و یا در جهت بار (در اینجا به سمت پایین) جابجا می‌شود که در این حالت پیچ خود به خود باز می‌شود!

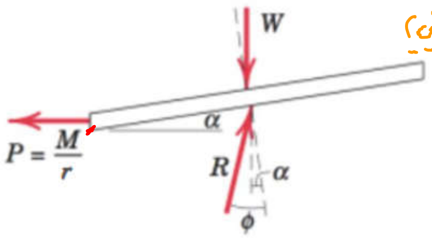
که پیچ خود به خود باز شود، باید R به این سمت باشد که الف ... مسئله

جسم رو به پایین است،

$\alpha>\phi$ ✗ ⇒ نیروی R نمی‌تواند به صورت شکل باشد.

چرا در $\alpha>\phi$ خود قفل نمی‌ماند؟

- فرض کنید پیچ خود قفل است. حداقل گشتاور M' برای اینکه پیچ را در جهت بار (به سمت پایین) به حرکت درآوریم، چقدر است؟

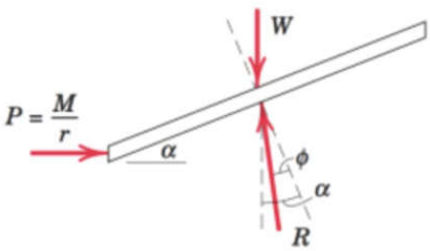


(b) To lower load $(\alpha<\phi)$

$$\sum F_y=0 \Rightarrow W = R\cos(\phi-\alpha)$$

$$\sum M=0 \Rightarrow M' = R\sin(\phi-\alpha)\cdot r$$

$$\Rightarrow M' = Wr\cdot tg(\phi-\alpha)$$



(c) To lower load $(\alpha>\phi)$

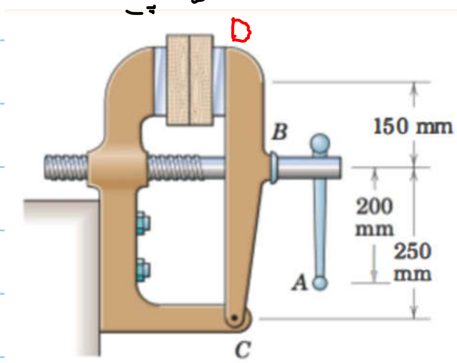
- فرض کنید که پیچ خود قفل نباشد ($\alpha>\phi$ یعنی) یا نیروی پیچ متمایل است تا به پایین برود. حداقل گشتاور M'' جهت جلوگیری از پایین رفتن پیچ چقدر است؟

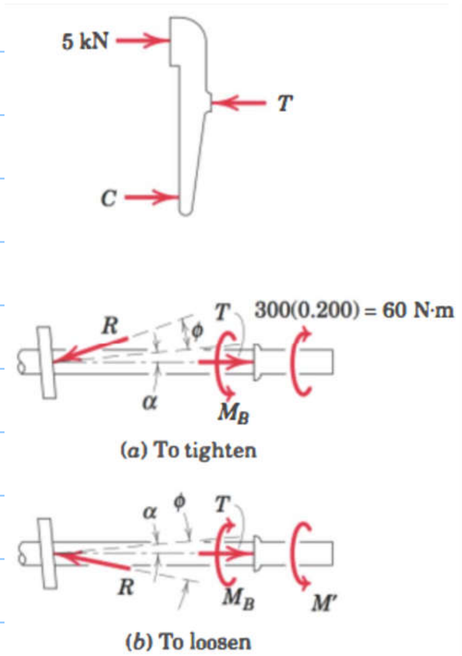
$$\sum F_y=0 \Rightarrow W = R\cos(\alpha-\phi)$$

$$\sum M=0 \Rightarrow M'' = (R\sin(\alpha-\phi))\,r$$

$$\Rightarrow M'' = W\cdot r\, tg(\alpha-\phi)$$

- در یک گیره نشان داده شده قطر متوسط پیچ تک رزوه مربعی 25mm و طول گام 5mm است. ضریب اصطکاک بین پیچ و رزوه‌ها 0.2 است. نیروی 300N در نقطه A به دسته وارد می‌شود، به طوری که نیروی فشاری 5kN در نقطه D (بین دو فک) ایجاد کند. الف) گشتاور اصطکاکی M_B که در B به وجود می‌آید را محاسبه نمایید. ب) جهت باز کردن گیره، حداقل نیروی Q که باید به دسته وارد شود را محاسبه کنید (فرض کنید که گشتاور اصطکاکی M_B ثابت است.)





$\sum M_C = 0 \Rightarrow 5 \times 400 = T \times 250 \Rightarrow T = 8\,kN$

$\alpha = tg^{-1} \frac{L}{2\pi r} = tg^{-1} \frac{5}{2\pi(12.5)} \Rightarrow \alpha = 3.64°$

$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1} 0.2 \Rightarrow \phi = 11.31°$

گشتاور پیچ

الف) $300 \times 0.2 - M_B = T \cdot r\, tg(\phi + \alpha)$

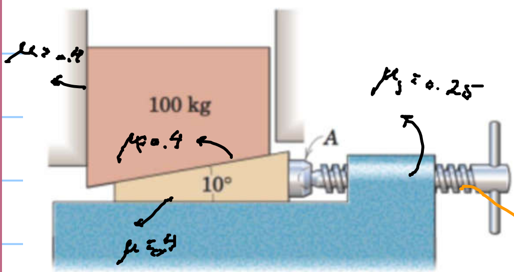
$\Rightarrow M_B = 33.3\,N.m$

ب) $M' - \underbrace{33.3}_{M_B} = T \cdot r\, tg(\phi - \alpha)$

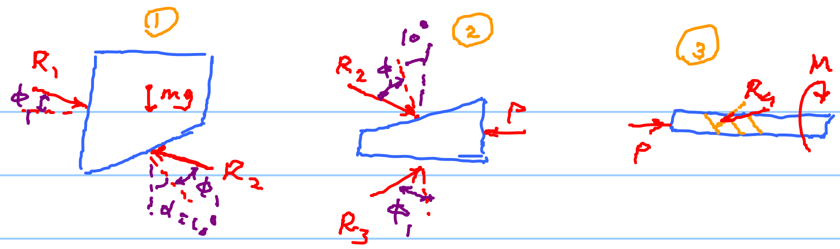
$\Rightarrow M' = 46.8\,N.m \Rightarrow Q = \frac{M'}{d} = \frac{46.8}{0.2}$

$\Rightarrow Q = 234\,N$

- موقعیت عمودی بلوک ۱۰۰ کیلوگرمی توسط گوه‌ای که با مکانیزم پیچ انتقال نیرو هدایت می‌شود، قابل تنظیم است. مطلوب است محاسبه حداقل گشتاور مورد نیاز به دسته پیچ جهت بالا بردن بار.



F.B.D :



$$\phi_1 = tg^{-1} 0.4 \Rightarrow \phi_1 = 21.8°$$

① جسم : $\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 \times 9.81 \cos 21.8° = R_2 \cos 53.6° \Rightarrow R_2 = 1535 N$

② جسم : $\sum F_x = 0 \Rightarrow R_2 \cos 36.4° = P \cos 21.8° \Rightarrow P = 1331 N$

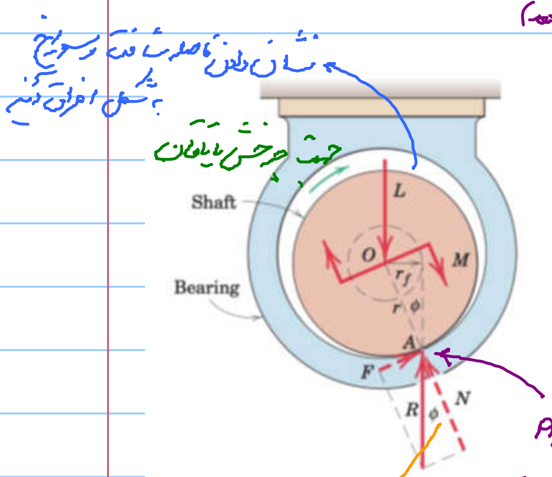
③ جسم : $M = P . r . tg(\phi_2 + \alpha) \Rightarrow \boxed{M = 7.3 \; N.m}$

$$\phi_2 = tg^{-1} 0.25 \Rightarrow \phi_2 = 14.04°$$

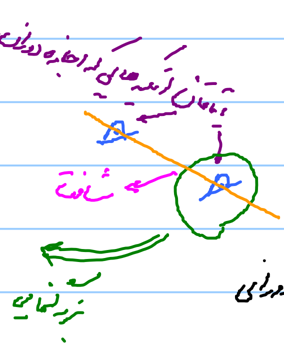
$$\alpha = tg^{-1} \frac{10}{2\pi \times 15} \Rightarrow \alpha = 6.06°$$

سه) یاتاقان ژورنال (Journal Bearing) : تکیه گاهی است که وظیفه اصلی اش وارد کردن نیروهای شعاعی در جابجایی جهت نگهداری شفت های دوار است.

- در یاتاقان های روغن کاری نشده و یا تا حدودی روغن کاری شده، فرض اصطکاک خشک در محاسبات ریاضی معقول است.



$\mu = tg\phi$



وجود اصطکاک در نقطه A

که دقیقا هم خط با L نیست

شرط تعادل در راستای قائم : $L = R$

شرط عدم وجود شتاب دورانی : $\sum M_A = 0$

[illegible]

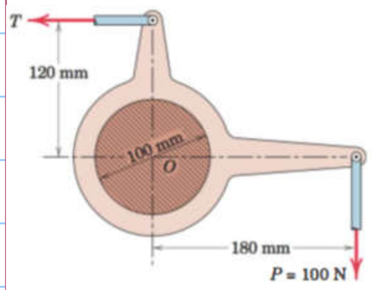
$$\Rightarrow M = R . r_f \Rightarrow \underbrace{M = L r \sin\phi}$$

$$\xrightarrow[tg\phi = \mu]{if \; \phi < 6° \Rightarrow \sin\phi = \phi = tg\phi} M = L r \mu$$

لذا محل نقطه A را در سوالات به ما نمی دهند

که با اعمال شرایط تعادل، آن را می یابیم

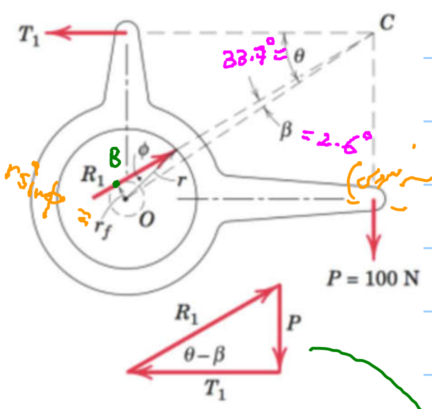
- مثال ؛ دسته محور شکل زیر بر روی شافتی به قطر 100 mm ثابت شده و اجازه دوران ندارد. جهت تعادل این



سیستم تحت نیروی $P = 100\,N$ ، نیروی افقی T به آن وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین شافت و دسته محور $\mu = 0.2$ باشد، حداقل و حداکثر نیروی T برای حفظ حالت سکون سیستم را بیابید.

$$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1}0.2 \Rightarrow \phi = 11.31^\circ$$

- بیشترین و کمترین مقدار T برای در آستانه حرکت بودن سیستم رخ می‌دهد،



(a) Counterclockwise motion impends

اصطکاک در تماس با کل سیستم است و با بردار عمود بر سطح شافت، زاویه ϕ می‌سازد.

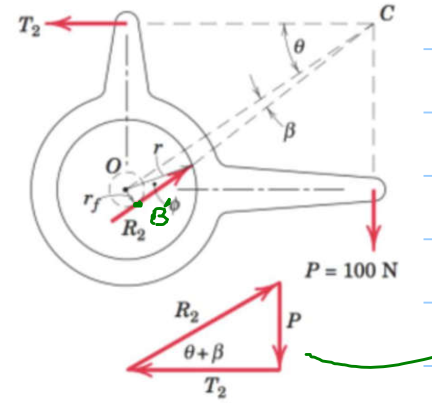
- جهت تعادل سیستم باید سه نیروی P ، T و R در نقطه C متقارب باشند (≡ جسم سه نیرویی)

$$r_f = r\sin\phi = 50\sin 11.31^\circ \Rightarrow r_f = 9.81\,mm$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{120}{180} = 33.7^\circ \quad , \quad \beta = \sin^{-1}\frac{r_f}{OC} = \sin^{-1}\frac{9.81}{\sqrt{120^2+180^2}} = 2.6^\circ$$

OCB′ ، OCB مثلث قائم الزاویه

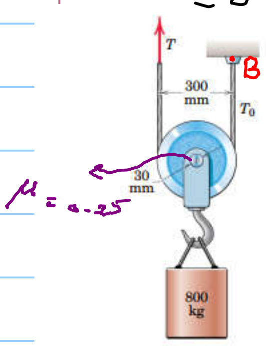
الف) آستانه چرخش پادساعتگرد : $T_{max} = P\cot(\theta-\beta) \Rightarrow T_{max} = 165.8\,N$



ب) آستانه چرخش ساعتگرد : $T_{min} = P\cot(\theta+\beta) \Rightarrow T_{min} = 136.2\,N$

(b) Clockwise motion impends

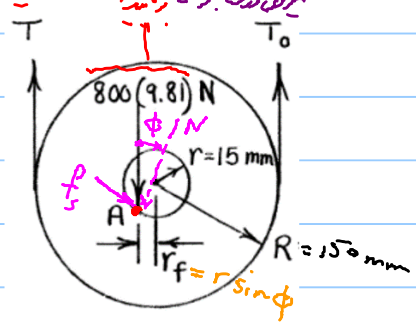
- مثال ؛ مقدار کشش کابل در T را بیابید به گونه‌ای که وزنه 800kg در آستانه حرکت به بالا قرار گیرد. همچنین مقدار کشش



Problem 6/80

کابل در نقطه ثابت B را نیز بیابید. قطر یاتاقان 30mm و ضریب اصطکاک بین محور و یاتاقان $\mu = 0.25$ می‌باشد. از جرم کابل و قرقره صرف نظر کنید. (≡ توجه داشته باشید که به علت اصطکاک بین کابل و قرقره، T و T_0 با هم برابر نمی‌باشند.)

نیروی وزن بار = برآیند اصطکاک و نیروی عمودی ← عکس‌العمل تکیه‌گاه



$$\phi = tg^{-1}\mu = tg^{-1}0.25 \Rightarrow \phi = 14.04^\circ$$

$$r_f = r\sin\phi = 15\sin 14.04^\circ \Rightarrow r_f = 3.64\ mm$$

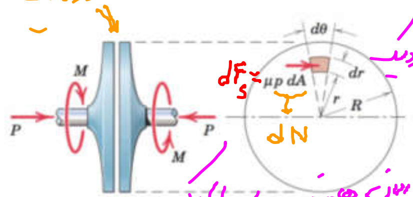
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow T + T_0 - 800\times 9.81 = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow -T(150-3.64) + T_0(150+3.64) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 4020\ N \quad , \quad T_0 = 3830\ N$$

ت) Thrust Bearing، اصطکاک بین دیسک‌ها

- اصطکاک بین صفحات دایره‌ای در سرهای دسته یا صفحات کلاچ به سبب نیروی فشاری با توزیع گسترده اتفاق می‌افتد.

دو دیسک تحت فشار (یعنی رانش) (درگیری مستقیم)



نیروی فشاری دو دیسک: $P = \int p(r,\theta)dA = \int p(r,\theta)(r\,d\theta\,dr)$

گشتاور ناشی از تمام نیروهای اصطکاک: $M = \int r\cdot df_s = \int r\mu\,dN = \int r\mu\, p(r,\theta)dA$

$$\Rightarrow M = \int \mu p r\, dA$$

- بیشترین گشتاوری که چنین کلاچی می‌تواند منتقل کند برابر است با گشتاور اصطکاکی میان دو دیسک به طوری که دیسک رانده را در آستانه لغزش بر دیسک دیگر قرار دهد.

حالت‌های خاص:

۱) فرض کنید فشار p در تمام نقاط بین دو دیسک یکنواخت باشد.

$$\Rightarrow p = \frac{P}{\pi R^2} \ , \ M = \int \mu p r\, dA = \mu p \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\, dr\, d\theta \Rightarrow M = \frac{2}{3}\mu P R$$

$\Rightarrow$ معادل وارد شدن P در فاصله متوسط $\frac{2}{3}R$

۲) اگر فشار ثابت بوده و دیسک ها دارای توخالی با شعاع های داخلی و خارجی R_i و R_o باشند:

$$\Rightarrow p = \frac{P}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} \quad , \quad M = \mu p \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o} r^2\, dr\, d\theta \Rightarrow M = \frac{2}{3}\mu P \frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2}$$

۳) اگر (به جای p)، $rp = \text{ثابت} = K$ باشد:

$$P = \int p\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^R \underbrace{pr}_{K}\, dr\, d\theta \Rightarrow P = 2\pi K R$$

$$M = \int \mu \underbrace{pr}_{K}\, dA \Rightarrow M = \mu K \pi R^2 \Rightarrow \underline{M = \frac{1}{2}\mu P R}$$ ⇐ معادل وارد شدن P در فاصله‌ی $\frac{1}{2}R$

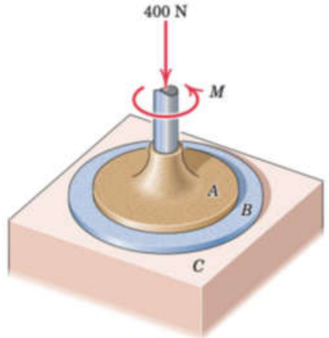
۴) اگر $rp = K = \text{ثابت}$ و دیسک ها دارای توخالی با شعاع های داخلی و خارجی R_i و R_o باشند:

$$P = \int p\, dA = 2\pi K (R_o - R_i)$$

$$M = \int \mu p r\, dA = \frac{1}{2}\mu P (R_o + R_i)$$

* بسته به تغییرات مقدار p نسبت به شعاع (در جهت شعاعی)، روابط بیان حداکثر گشتاور قابل انتقال دیسک‌ها قابل محاسبه است.

مثال: مطابق شکل، دیسک دایره‌ای A بر روی دیسک B تحت نیروی فشاری 400 N قرار دارد. شعاع دیسک‌های A و B به ترتیب 225 و 300 میلیمتر می‌باشند. اگر ضریب اصطکاک بین A و B، $\mu = 0.4$ باشد، با فرض توزیع فشار یکنواخت بین A و B، گشتاور M را بیابید به طوری که A در آستانه لغزش بر B قرار گیرد. همچنین ضریب اصطکاک بین سطوح B و C جهت عدم لغزش سطح B بر C را بیابید.



دیسک A و B : $M = \frac{2}{3}\mu P R \Rightarrow M = \frac{2}{3} \times 0.4 \times 400 \times \frac{0.225}{2} \rightarrow M = 12\ N.m$

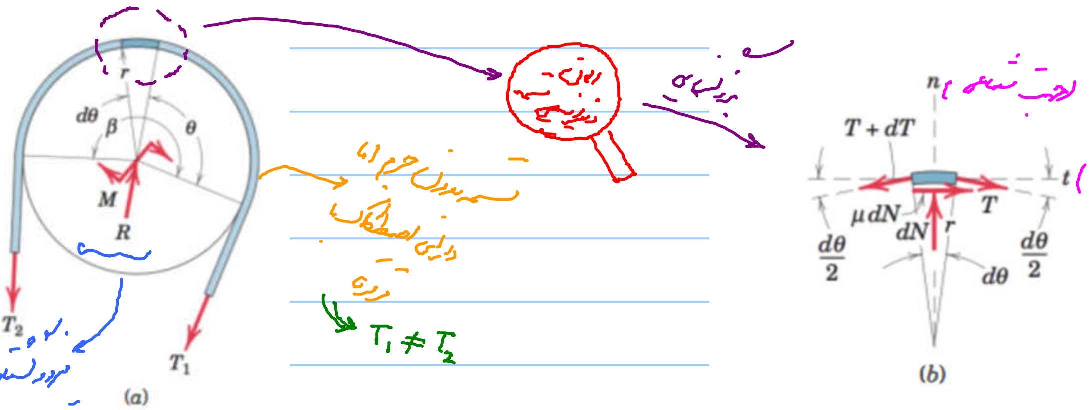
شعاع مشترک A و B

دیسک های B و C : $M = \frac{2}{3}\mu' P R' \Rightarrow 12 = \frac{2}{3}\mu' \cdot 400 \times \frac{0.300}{2} \Rightarrow \mu' = 0.300$

شعاع مشترک B و C

ب) تسمه‌های انعطاف‌پذیر (Flexible Belts)

- توجه به آستانه لغزش در طراحی کلاچ‌های انعطاف‌پذیر، تسمه‌ها و ضامن‌های نگهدارنده مسئله بسیار مهمی است.



$$\Sigma F_t = 0 \Rightarrow T\cos\frac{d\theta}{2} + \mu\, dN = (T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} \xrightarrow{\cos\frac{\theta}{2} \simeq 1} \mu\, dN = dT \quad *$$

$$\Sigma F_n = 0 \Rightarrow dN = (T+dT)\sin\frac{\theta}{2} + T\sin\frac{\theta}{2} \xrightarrow{\sin\frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2}} dN = T\, d\theta \quad **$$

$$* , ** \longrightarrow \left\{ \frac{dT}{T} = \mu\, d\theta \xrightarrow{\text{انتگرال گیری}} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int \mu\, d\theta \Rightarrow \ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\beta \right.$$

$$\rightarrow \boxed{T_2 = T_1 e^{\mu\beta}}$$

نکته جالب: عبارت مستقل از شعاع درام شد!

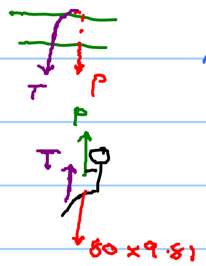
T_2 (کشش بالا)

برای کشش تسمه در جهت حرکت دوران

در اینجا فرض می‌شود درام از بالا، کشش تسمه به طرف چپ تمایل دارد.

* توجه: β می‌تواند مقادیر بیشتر از 2π را نیز به خود اختصاص دهد.

مثال – در شکل زیر، اگر ضریب اصطکاک بین طناب و شاخه درخت 0.6 باشد، شخص 80 کیلوگرمی باید چه نیرویی را به طناب وارد کند تا در آستانه حرکت به پایین قرار گیرد؟ (≡ به آرامی رو به پایین حرکت کند.)



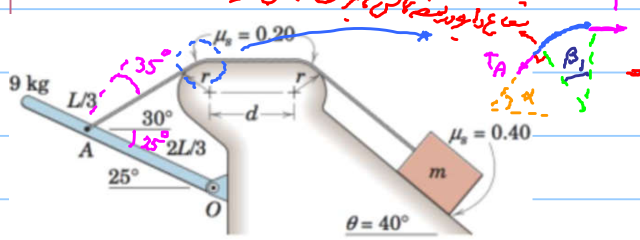
$\beta = \pi \ (rad)$ $T > P$: $T = P e^{\mu \beta}$

$T + P = mg \Rightarrow P e^{\mu\beta} + P = mg$

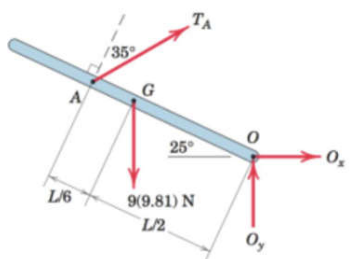
$\Rightarrow P(1 + e^{0.6\pi}) = 80 \times 9.81 \Rightarrow P = 103.5 \ N$

مثال – با توجه به شکل زیر، محدوده m را بیابید به گونه‌ای که سیستم در تعادل استاتیکی باشد. ضریب اصطکاک طناب با سطح $\mu_1 = 0.2$ و ضریب اصطکاک جسم m با سطح شیبدار $\mu_2 = 0.4$ می‌باشد. (از اصطکاک در لولای O صرف نظر شود.)

شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.



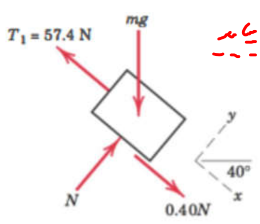
$\Rightarrow \beta_1 = \alpha$



F.B.D :

$\sum M_O = 0 \Rightarrow -T_A \left(\frac{2L}{3}\cos 35°\right) + 9 \times 9.81 \left(\frac{L}{2}\cos 25°\right) = 0$

$\Rightarrow T_A = 73.3 \ N$

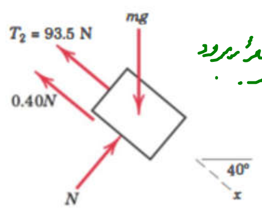


Case I

جسم تمایل دارد به سمت بالای سطح شیبدار برود $\Rightarrow T_A > T_1$: $T_A = T_1 e^{\mu_1 \beta}$; $\beta = (30° + 40°)\frac{\pi}{180}$

$\Rightarrow 73.3 = T_1 \cdot e^{0.2(30+40) \cdot \frac{\pi}{180}} \Rightarrow T_1 = 57.4 \ N$

$\Rightarrow T_1 - \mu N - mg\sin 40° = 0 \Rightarrow m = 6.16 \ kg$; $N = mg\cos 40°$



Case II

جسم تمایل دارد به سمت پایین سطح شیبدار برود : $T_2 > T_A$: $T_2 = T_A e^{\mu_1 \beta}$

$\Rightarrow T_2 = 73.3 \, e^{0.2(30+40)\frac{\pi}{180}} \Rightarrow T_2 = 93.5 \ N$

$$\Rightarrow \quad T_2 + \mu_2 \underbrace{N}_{mg\cos 20} = mg\sin 20 \Rightarrow \underbrace{\{ m = 28.3\ kg}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\{ 6.16\ kg \leq m \leq 28.3\ kg}$$

توجه داشته باشید که به علت صرف نظر کردن از حجم طناب، نقطه تماس طناب منحنی در تماس با سطح، بخش تماس طناب با سطح اثری نمی‌گذارند

طول L_1 و L_2 در حل این مسئله نقشی ندارد. به عبارتی زاویه کل طناب در تماس با سطح $\beta = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$ می‌باشد.

فصل هفتم - کار مجازی (Virtual Work)

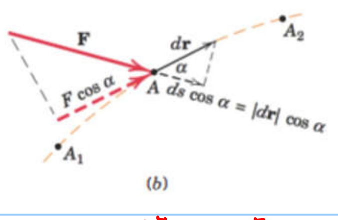
سرفصل مطالب فصل: - تعریف کار

- حل مسائل تعادل با روش کار مجازی

- تاکنون جهت حل مسائل استاتیک و تعیین مجهولات (که عمده از جنس نیرو بودند)، از نوشتن معادلات تعادل نیوتن/اویلر استفاده می‌کردیم. اگرچه این روش مستقیم‌ترین دیدگاه را به کاربر می‌دهد، اما در اکثر مواقع ما مجبوریم ابتدا نیروهای تکیه‌گاهی و یا نیروی درگیر در مفاصل را محاسبه نمائیم. در این فصل با معرفی روش کار مجازی، که درحقیقت تعمیم بود، ما در سیستم‌های ایده‌آل (با فرض عدم وجود نیروی اصطکاک در مفاصل و عدم ذخیره انرژی الاستیک اعضا یک سیستم و مشتمل از دو یا چند جسم صلب متصل به هم)، بدون نیاز به جدا کردن اعضای متصل و همچنین بدون نیاز به محاسبه نیروهای تکیه‌گاهی، رابطه بین نیروهای فعال را مستقیماً محاسبه نمائیم. این روش خصوصاً در تعیین شناسایی موقعیت‌های تعادلی یک سیستم بسیار کارآ است.

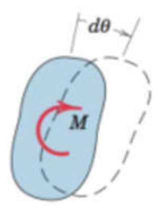
- کار نیرو یا گشتاور:

نیرو:



(b)

گشتاور:



(a)

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (F\cos\alpha)ds = F(ds\cos\alpha)$$

کار انجام شده به واسطه نیروی $\vec{F}$ و جابجایی $d\vec{r}$

ضرب داخلی

(از جنس انرژی - اسکالر)

$$dU = M\,d\theta$$

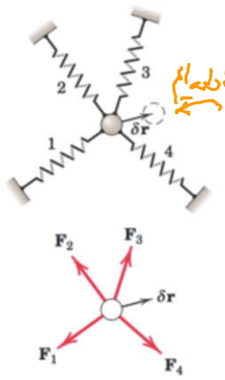
کار انجام شده به واسطه گشتاور M و جابجایی زاویه‌ای $d\theta$

(از جنس انرژی (واحد ژول) ← اسکالر)

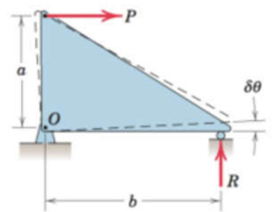
* اگر 1) $F = 0$ یا M یا 2) δr یا $\delta\theta$ صفر باشد و یا 3) بردار نیرو و جابجایی بر هم عمود باشند ← کار انجام شده صفر است.

* جابجایی مجازی (Virtual Displacement) و کار مجازی (Virtual Work)

- فرض کنید جسمی تحت نیروهای وارده بر آن در تعادل قرار دارد. هرگونه جابجایی کوچک دلخواه فرضی سازگار با قیود مسئله (تغییر مکان‌های داده شده) را جابجایی مجازی ($\delta\vec{r}$) گویند و کار نیروها به ازای این جابجایی مجازی را کار مجازی نامند.



جابجایی مجازی $\delta\vec{r}$ داده‌ایم



$\delta\theta$ جابجایی زاویه‌ای مجازی داده‌ایم

کار مجازی انجام شده توسط $\vec{R}$: $\delta U_1 = \vec{R}\cdot\delta\vec{r}_R = (R\hat{j})\cdot(b\,\delta\theta\,\hat{j})$

$= +Rb\,\delta\theta$

به عنوان مثال: کار مجازی انجام شده توسط $\vec{F}_1$: $\delta U_1 = \vec{F}_1\cdot\delta\vec{r}$

کار مجازی انجام شده توسط $\vec{P}$: $\delta U_2 = \vec{P}\cdot\delta\vec{R}_P = (P\hat{i})\cdot(-a\,\delta\theta\,\hat{i})$

$= -Pa\,\delta\theta$

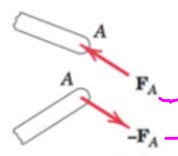
علامت منفی بنابراین است که نیرو و جابجایی در خلاف جهت هم هستند.

- انواع نیروهای وارد بر سیستم‌های ایده‌آل متشکل از یک یا چند جسم صلب:

1) نیروهای فعال: کار انجام می‌دهند و برای آنها باید کار را حساب کرد.

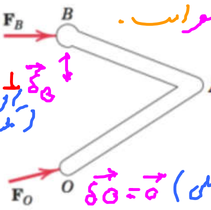
2) نیروهای واکنشی تکیه‌گاهی: با توجه به صفر بودن $\vec{\delta r}$ یا عمود بودن $\vec{\delta r}$ بر این نیروها، کار آن‌ها صفر است.

3) نیروهای داخلی: با توجه به خلاف جهت بودن نیروهای داخلی، جمع کارهای انجام شده صفر است.



$\delta U_1 = -\delta U_2$

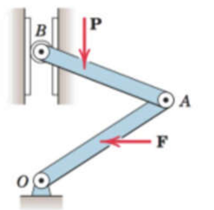
(c) Internal forces



$\vec{F}_B \perp \vec{\delta B}$ (تکیه‌گاه غلتکی)

$\vec{\delta O} = \vec{0}$ (تکیه‌گاه مفصلی)

(b) Reactive forces



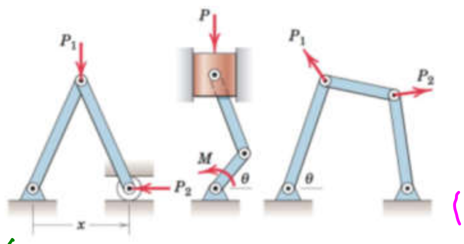
(a) Active forces

- اصل کار مجازی (Principle of Virtual Work): مجموع کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارجی فعال وارد بر یک سیستم مکانیکی ایده‌آل در حال تعادل، به ازای هر جابجایی مجازی سازگار با قیود مسئله، صفر است:

$$\boxed{\delta U = 0}$$

مجموع کار مجازی نیروهای فعال صفر است

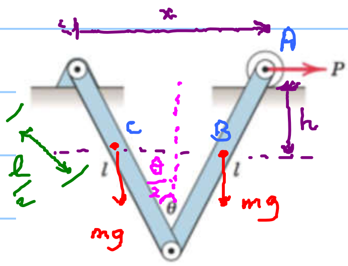
- در حل مسائل استاتیک از روش کار مجازی، به جای رسم دیاگرام آزاد (شامل همه نیروها)، فقط نیروهای فعال را رسم می‌کنیم (= دیاگرام نیروهای فعال). سپس بایستی به ازای تک تک نیروهای فعال، جابجایی مجازی نقطه اثر اعمال آن نیرو را برحسب جابجایی مجازی متغیر (های) مستقل سینماتیکی مسئله نوشته و در رابطه کار هر نیرو را محاسبه کنیم.



دیاگرام نیروهای فعال سه سیستم تک درجه آزادی

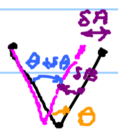
ما در این فصل، فقط سیستم‌های تک درجه آزادی (تک متغیر مستقل سینماتیکی) را بررسی می‌کنیم.

* ما همه اوقات نمی‌توانیم با نگاه هندسی به مسئله، بتوان جابجایی مجازی یک نقطه را برحسب متغیر مستقل سینماتیکی مسئله بدست آورد؛ در این حالت می‌بایست بردار موقعیت نقطه مورد نظر را نوشته و از آن variation بگیریم (= مشتق مرتبه اول)، جابجایی مجازی آن نقطه را محاسبه نمود.



- مثال: اگر جرم میله‌ها m بوده و سیستم در تعادل باشد، زاویه تعادلی θ را بیابید. ($\theta_{eq.}$)

* سیستم تک درجه آزادی است؛ پس به ازای θ جابجایی مجازی δθ می‌دهیم. باید دید که نقاط



A، B و C چه جابجایی مجازی برحسب δθ خواهند داشت. ← با توجه به اینکه به صورت هندسی دشوار است،

جابجایی‌های مجازی نقاط موردنظر را محاسبه کرده، از نوشتن بردار مکان بهره می‌بریم.

$$\vec r_A = x\hat i = \left(l\sin\frac{\theta}{2} + l\sin\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \vec r_A = 2l\sin\frac{\theta}{2}\,\hat i \Rightarrow \delta\vec r_A = l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat i$$

$$\vec r_B = \left(l+\frac{l}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}\,\hat i - \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\hat j \Rightarrow \delta\vec r_B = \frac{3l}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat i + \frac{1}{4}l\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat j$$

$$\vec r_C = \frac{l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,\hat i - \frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\hat j \Rightarrow \delta\vec r_C = \frac{l}{4}\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat i + \frac{l}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta\,\hat j$$

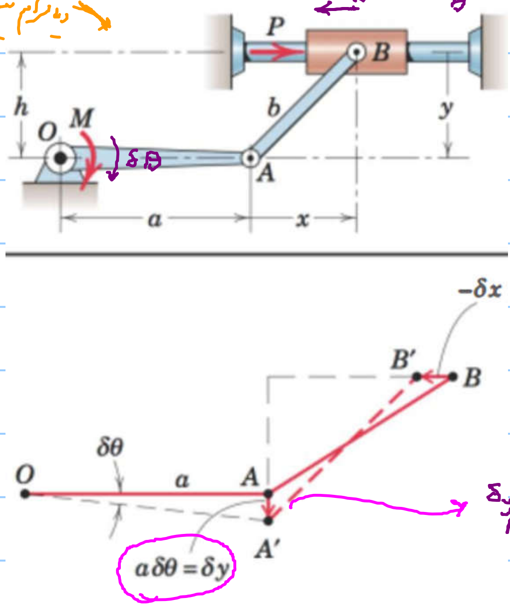
با توجه به جهت در نظر گرفته شده فقط مولفه $\hat{j}$ آن ها مهم است

اصل کار مجازی : $\delta U = 0 \Rightarrow (P\,\hat{i})\cdot\vec{\delta r}_A + (-mg\,\hat{j})\cdot\vec{\delta r}_B + (-mg\,\hat{j})\cdot\vec{\delta r}_C = 0$

$$\Rightarrow P\,l\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\,\frac{l}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg} \Rightarrow \left\{\theta_{eq.} = 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{2P}{mg}\right.$$

در راستای نیروهای فعال

$\delta_B : f(\delta_\theta) = ?$



- مثال : اگر در لحظه نشان داده شده، مکانیزم در حال تعادل باشد، نیروی P را برحسب M محاسبه نمایید.

* به سبب چرخش OA، جابجایی زاویه ای مجازی $\delta\theta$ در جهت ساعتگرد می دهیم

حال باید جابجایی مجازی نقطه B را برحسب $\delta\theta$ بیابیم :

$\delta y_A = \delta y = a\,\delta\theta \downarrow$

قید هندسی : $b^2 = x^2 + y^2 \xrightarrow{\text{مشتق مجازی}} 0 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y$

مقدار ثابت ؛ متغیر نسبت به مکان B,A

$$\Rightarrow \delta x = -\frac{y}{x}\,\delta y$$

$$\Rightarrow \delta x = \frac{-y}{x}\,a\,\delta\theta$$

$$\delta U = 0 \Rightarrow M\,\delta\theta + P\,\delta x = 0 \Rightarrow M\,\delta\theta + P\left(\frac{-y}{x}\,a\,\delta\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{Mx}{ya} \quad \text{در نظر :} \left\{\begin{array}{l} y = h \\ x = \sqrt{b^2 - h^2} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{P = \frac{M\sqrt{b^2 - h^2}}{ha}}$$