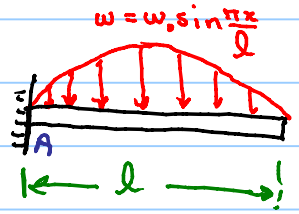
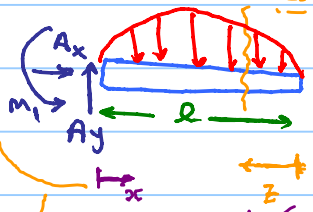
مثال - در سری مباحث مربوط به تیرها، دیاگرام‌های برشی و ممان خمشی را رسم نمایید.



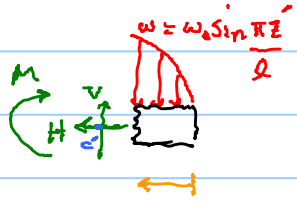
F.B.D:



بیشترین بارگذاری

جهت‌ها را حدس بزنید

بازه $0 < x < l$



$$\sum F_x = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V - \int_0^z w(z')dz' = 0 \rightarrow V = \int_0^z w_0 \sin\frac{\pi z'}{l} dz'$$

$$\rightarrow V = -\frac{w_0 l}{\pi}\cos\frac{\pi z'}{l}\Big|_0^z \Rightarrow \boxed{V = \frac{w_0 l}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{l}\right)}$$

$$\sum M_{c'} = 0 \rightarrow -M - \int_0^z (z - z')\, w(z')dz' = 0 \rightarrow$$

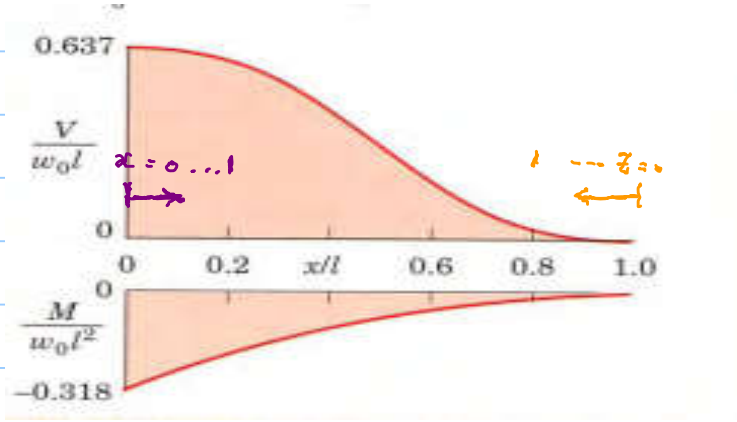
$$M = -\int_0^z (z - z') w_0 \sin\frac{\pi z'}{l} dz' = -w_0\left(z\int_0^z \sin\frac{\pi z'}{l}dz' - \int_0^z z'\sin\frac{\pi z'}{l}dz'\right)$$

محاسبه انتگرال جزء جزء

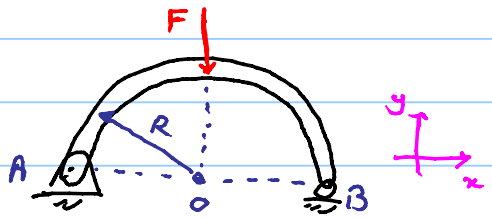
$$\rightarrow M = -w_0\left(-\frac{l}{\pi}z\cos\frac{\pi z'}{l}\Big|_0^z - \left(-\frac{l}{\pi}z'\cos\frac{\pi z'}{l}\Big|_0^z + \int_0^z \frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi z'}{l}dz'\right)\right)$$

$$\rightarrow M = -w_0\left(\frac{l}{\pi}z - \frac{l}{\pi}z\cos\frac{\pi z}{l} + \frac{l}{\pi}z\cos\frac{\pi z}{l} - 0 - \frac{l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi z'}{l}\Big|_0^z\right)$$

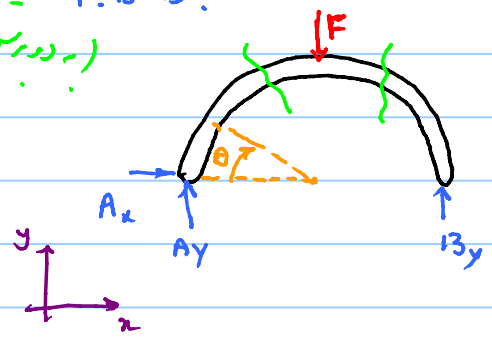
$$\rightarrow \boxed{M = -w_0\left(\frac{l}{\pi}z - \frac{l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi z}{l}\right)}$$



مثال - در حلقه‌ی زیر، دایره‌ای سری نوری، سری رسی و مکان حسی را رسم نمایید.



F.B.D:

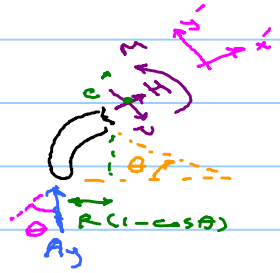


$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y \cdot 2R - F \cdot R = 0 \Rightarrow B_y = \frac{F}{2}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = F \Rightarrow A_y = \frac{F}{2}$

برش اول $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

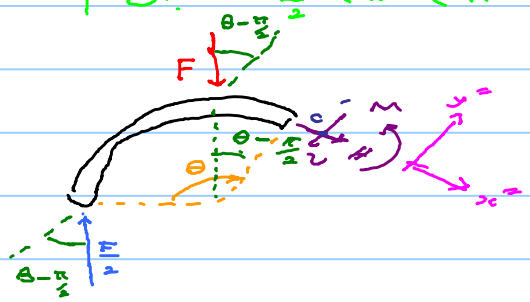


$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow H = -\frac{F}{2}\cos\theta$

$\sum F_{y'} = 0 \Rightarrow V = \frac{F}{2}\sin\theta$

$\sum M_{c'} = 0 \Rightarrow M = \frac{F}{2}R(1-\cos\theta)$

برش بین $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

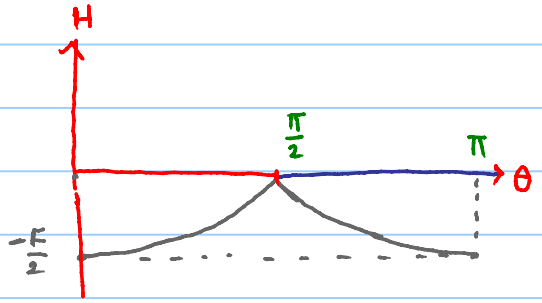


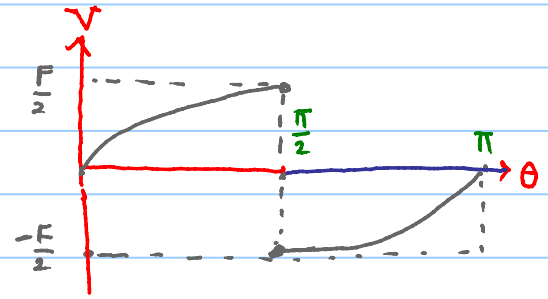
$$\sum F_{x_c} = 0 \rightarrow H = \frac{F}{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{2}) - F\sin(\theta-\frac{\pi}{2})$$

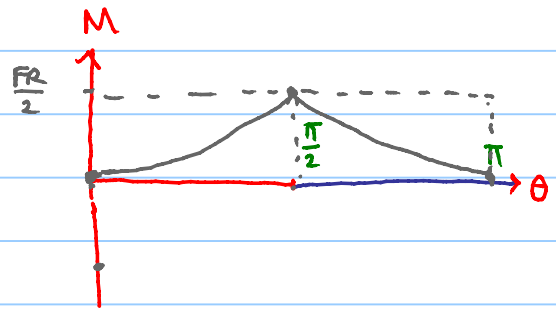
$$\rightarrow \boxed{H = \frac{F}{2}\cos\theta}$$

$$\sum F_{y_c} = 0 \rightarrow V = \frac{F}{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) - F\cos(\theta-\frac{\pi}{2}) \rightarrow \boxed{V = -\frac{F}{2}\sin\theta}$$

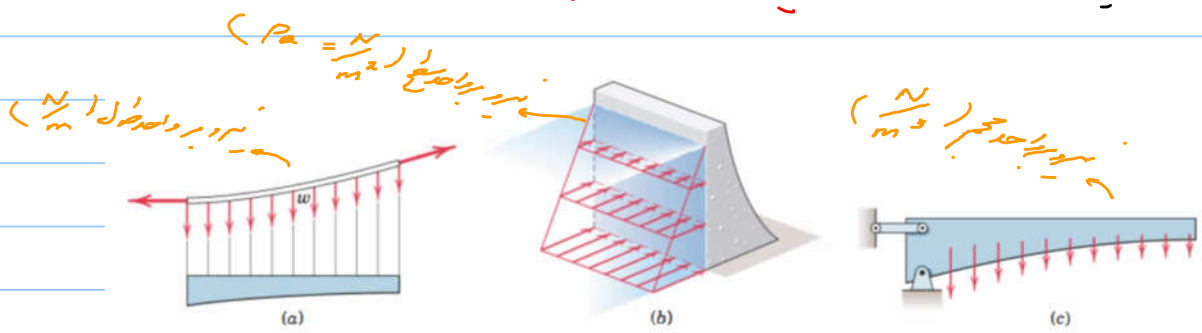
$$\sum M_C = 0 \rightarrow M = \frac{F}{2}R(1+\sin(\theta-\frac{\pi}{2})) - FR\sin(\theta-\frac{\pi}{2}) \rightarrow \boxed{M = \frac{FR}{2}(1+\cos\theta)}$$



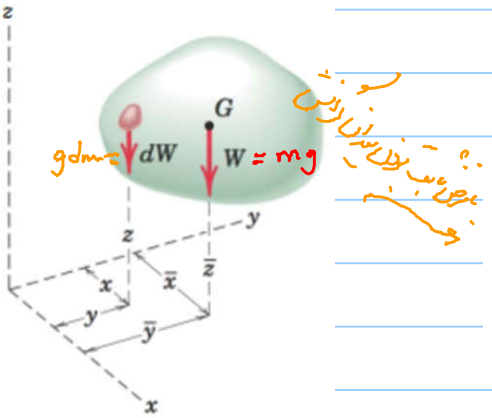




- توزیع نیروها می‌تواند به صورت توزیع خطی، سطحی و حجمی باشد.



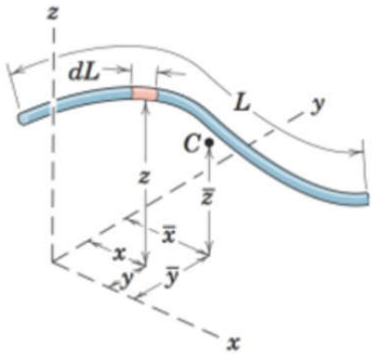
- محاسبه مرکز جرم یک جسم:



$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{m} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{m}$$

- محاسبه مرکز خط، سطح یا حجم (Centroids of Lines, Areas, and Volumes)

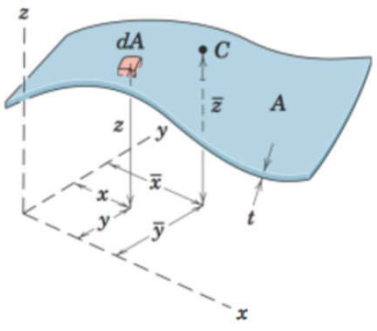
(با اقتباس از فرمولاسیون محاسبه مرکز جرم)



$dm = \rho A\,dL$ (با فرض ثابت بودن چگالی)

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dL}{L}$$

(به شکل سیم یا کابل با طول L و سطح مقطع ثابت A و چگالی ρ)



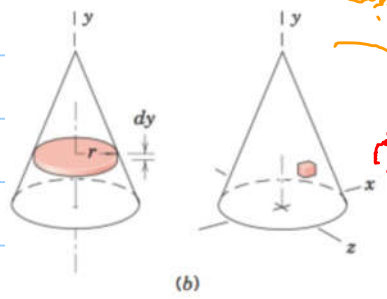
$dm = \rho t\,dA$ (با فرض ثابت بودن چگالی و ضخامت)

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dA}{A}$$

(سطح با چگالی و ضخامت ثابت t)

$dm = \rho\, dV$

(با فرض چگالی یکنواخت)



موقعیت مرکز جرم:

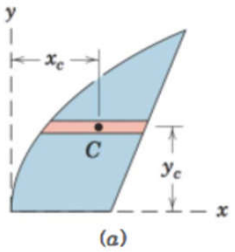
$$\bar{x} = \frac{\int x\, dV}{V} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dV}{V} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dV}{V}$$

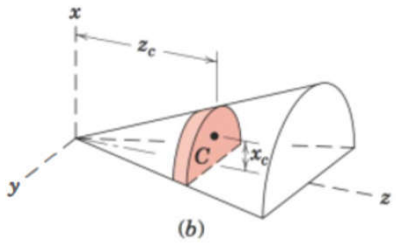
$\int dV$

- مرکز خط، سطح یا حجم لزوماً روی جسم قرار نمی‌گیرد.

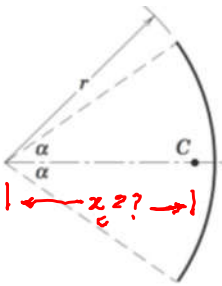
- با آشنایی به هوشمندانه محورهای متقارن (متقارن کارتزین و استوانه‌ای یا کروی برای اجسام با مرزهای دایره‌ای شکل و ...)، در بیشترین محورهای متقارن تقارن در هندسه و در بیشترین انتگرال‌های ساده در انتگرال گیری، می‌توان محاسبه

- مرکز جرم/حجم/سطح/خط را ساده نمود و لعطا انتگرال‌های پیچیده را به یک انتگرال تبدیل کرد



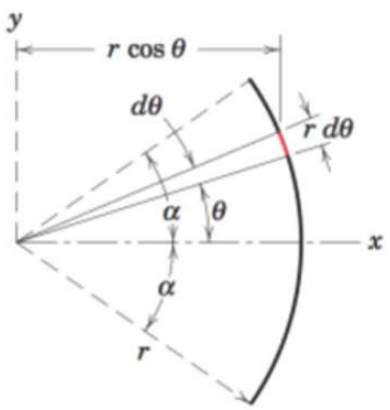


- مثال: در شکل زیر، موقعیت مرکز خط (centroid) سیم باریک زیر را محاسبه نمایید.



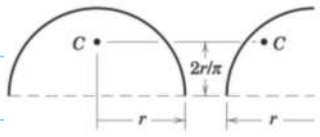
y ↑ ، x → محدوده تغییر شکل ⇒ $y_c = 0$ (با توجه به تقارن نسبت به محور x ها)

$L = 2\alpha r$



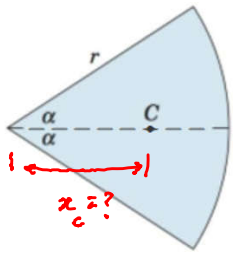
$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (r\cos\theta)(r\,d\theta)}{L} = \frac{r^2 \sin\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{2\alpha r}$$

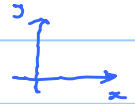
$$\Rightarrow \boxed{x_c = \frac{r\sin\alpha}{\alpha}}$$ ← فرمت آکسیون



حالات خاص: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

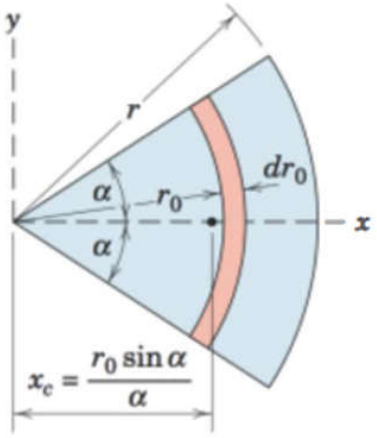
- مثال: سه قطاع دایره‌ای زیر، موقعیت مرکز سطح را محاسبه نمایید.





← با انتخاب این محورهای مختصات، مجدداً به

دلیل تقارن داریم: $y_c = 0$



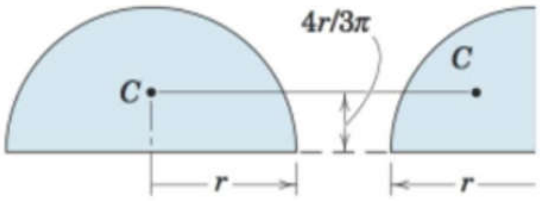
$A_{\text{قطاع}} = \left(\frac{2\alpha}{2\pi}\right)\pi r^2 = \alpha r^2$ (مساحت قطاع)

$x_c = \dfrac{\int_0^r \left(\frac{r_0 \sin\alpha}{\alpha}\right)(2r_0\alpha\, dr_0)}{A}$ ← (مساحت نوار به ضخامت dr_0)

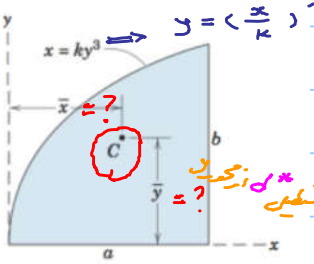
موقعیت x مرکز سطح (انتگرال)

$\Rightarrow x_c = \dfrac{2\sin\alpha \cdot \frac{r^3}{3}}{\alpha r^2} \Rightarrow \boxed{x_c = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}}$

حالات خاص برای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و $\alpha = \frac{\pi}{2}$:

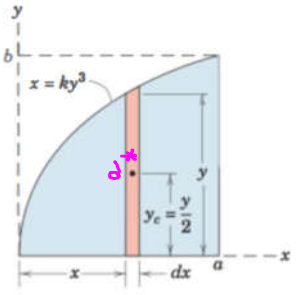


- مثال زیر، موقعیت مرکز سطح را محاسبه نمایید.



مساحت سطح $A = \int_0^a y\,dx$ یا $\int_0^b x\,dy = \dfrac{3ab}{4}$

$\bar{x} = \dfrac{\int_0^a x\,y\,dx}{A}$ (dA = مساحت نوار مستطیلی) $\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{\frac{3a^2b}{7}}{\frac{3ab}{4}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{4}{7}a}$

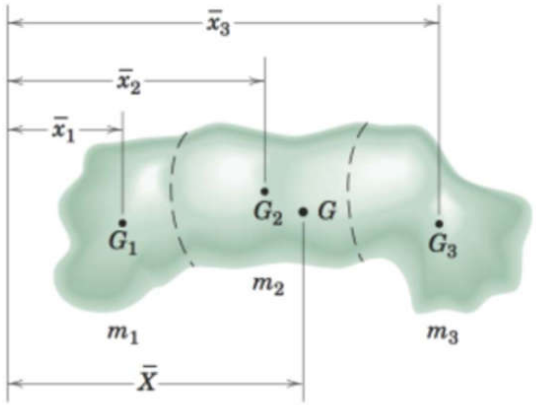


$\bar{y} = \dfrac{\int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y\,dx}{A}$ ($dA = y\,dx$) $\Rightarrow \bar{y} = \dfrac{\frac{3ab^2}{10}}{\frac{3ab}{4}} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{2}{5}b}$

← فاصله مرکز سطح مستطیل (d^*) از محور افقی

- مشکل نیست مشابه با المان‌های افقی ($dy\,x$) مجدداً حل نمایید.

- محاسبه مرکز جرم / سطح و ... اجسام مرکب : اگر جسم، مجموعه‌ای از اجسامی باشد که مرکز جرم / سطح و ... آن‌ها به راحتی برای ما قابل محاسبه است ($= n$ شکل، جرم‌های m_i و موقعیت مرکز $\bar{x}_i$)، می‌توان از رابطه‌ی زیر جهت محاسبه موقعیت مرکز جسم مرکب بهره برد:

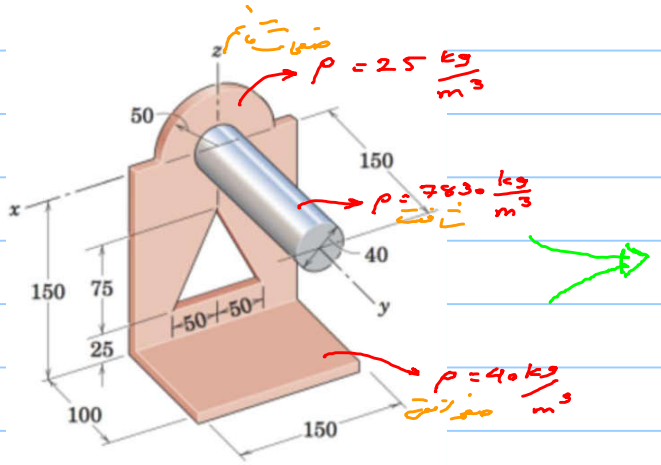


$$\bar{X} = \frac{\Sigma m\bar{x}}{\Sigma m} \qquad \bar{Y} = \frac{\Sigma m\bar{y}}{\Sigma m} \qquad \bar{Z} = \frac{\Sigma m\bar{z}}{\Sigma m}$$

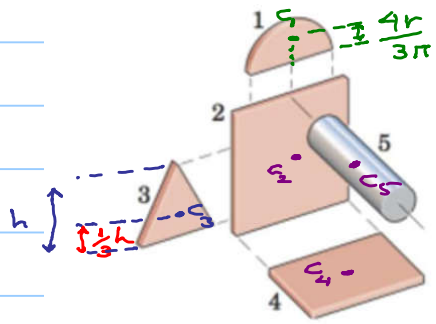
نقطه‌ی مرکز centroid موردنظر، می‌تواند L یا A یا V باشد.

- در صورتی که جسم / سطح / حجمی موجود نباشد، می‌توان به شکل جرم، سطح، حجم با مقدار منفی برخورد نمود.

- مثال : موقعیت مرکز جرم شکل همگن زیر را محاسبه نمایید.



Dimensions in millimeters



PART	m kg	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	$m\bar{y}$ kg·m	$m\bar{z}$ kg·mm
1	0.098	0	21.2	0	2.08
2	0.562	0	−75.0	0	−42.19
3	−0.094	0	−100.0	0	9.38
4	0.600	50.0	−150.0	30.0	−90.00
5	1.476	75.0	0	110.7	0
TOTALS	2.642			140.7	−120.73

- صفحه yz ، صفحه تقارن جسم است ؛ بنابراین $\bar{X}=0$ می‌باشد.

$$\bar{Y} = \frac{\sum m\bar{y}}{\sum m} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{140.7}{2.642} \Rightarrow \{\bar{Y} = 53.3\ mm$$

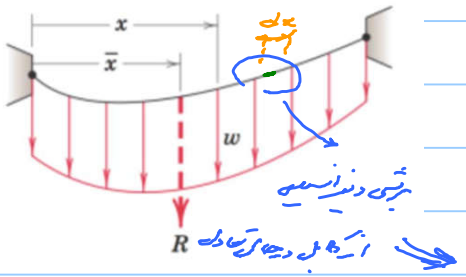
$$\bar{Z} = \frac{\sum m\bar{z}}{\sum m} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{-120.73}{2.642} \Rightarrow \{\bar{Z} = -45.7\ mm$$

* کابل‌های انعطاف‌پذیر :

- از کابل‌ها (یا انعطاف‌پذیرها) در پل‌های معلق، کابلی، خطوط انتقال برق و ... استفاده می‌شود.

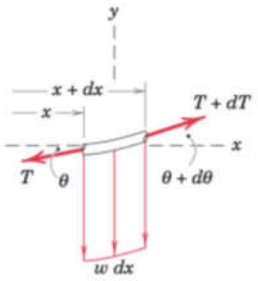
- این کابل‌ها در طول خود تحت نیروهای متمرکز و یا گسترده طولی قرار می‌گیرند. (مثل کابل با جرم غیرقابل چشم‌پوشی)

- مقادیر نیروی کشش و زاویه انحراف در طول این کابل‌ها می‌تواند تغییر کند.



برش دیفرانسیلی

کابل در حال تعادل



$d\theta$ خیلی کوچک $\Rightarrow \begin{cases} \sin d\theta \simeq d\theta \\ \cos d\theta \simeq 1 \end{cases}$

معادلات تعادل برای المان دیفرانسیلی :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow (T + dT)\cos(\theta + d\theta) = T\cos\theta \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow (T + dT)\sin(\theta + d\theta) = T\sin\theta + w\,dx \end{cases}$$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$$\begin{cases} -T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta = 0 \Rightarrow d(T\cos\theta) = 0 \quad (*) \\ T\cos\theta\, d\theta + dT\sin\theta = w\,dx \Rightarrow d(T\sin\theta) = w\,dx \quad (**) \end{cases}$$

$\Rightarrow (*)\quad T\cos\theta = cte = T_0$ مولفه افقی نیروی کشش کابل برابر با مقدار ثابتی است

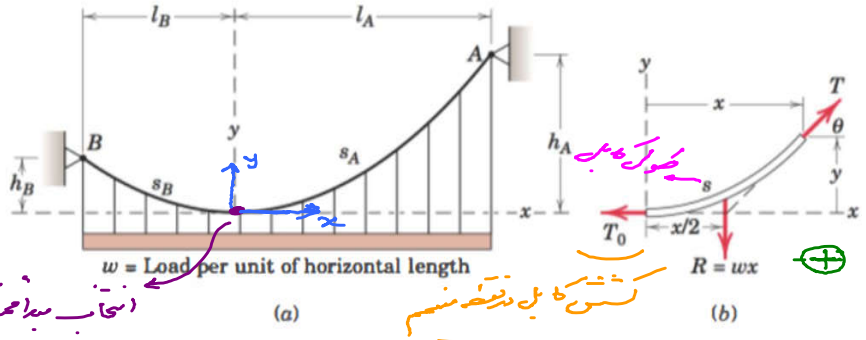
$\Rightarrow (**)\quad d(T\sin\theta) = w\,dx \Rightarrow d\left(\frac{T_0}{\cos\theta}\sin\theta\right) = w\,dx \Rightarrow d(T_0 \underbrace{\tan\theta}_{\frac{dy}{dx}}) = w\,dx$

$$\Rightarrow T_0\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = w\,dx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0}}$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر کابل تحت بارگذاری w

حل معادله (که تابعی از x است) $\Rightarrow y = f(x)$ به دست آمده و معادله تابعی سهمی‌وار است و کابل در حالت تعادل قرار دارد.

حالت خاص) سئوال: کابلی با وزن یکنواخت و با تقریب خوبی بار توزیع یکنواخت در راستای x



$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} = cte$ → به شکل سهمی (منحنی درجه 2 نسبت به x)

انتخاب مبدا مختصات در نقطه تماس کابل

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0}x + C_1$ (at $x=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$) $\Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{wx^2}{2T_0} + C_2$ (at $x=0 \Rightarrow y=0$) $\Rightarrow C_2 = 0$

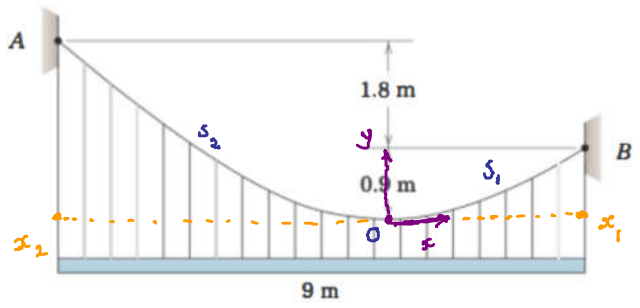
در شکل ⊕: $\vec{T} = \vec{T_0} + \vec{R} \Rightarrow T = \sqrt{T_0^2 + (wx)^2}$ ($x = x_{max} \Rightarrow T = T_{max}$)

T_0: کشش کابل در نقطه مینیمم — R: کشش کابل در نقطه دلخواه x

طول کابل: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$

$\Rightarrow$ طول $s = \int_0^{s_a} ds = \int_0^{l_a} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx = \int_0^{l_a} \sqrt{1 + (\frac{wx}{T_0})^2}\, dx \overset{\frac{h_a}{l_a} < \frac{1}{2}}{\simeq} l_a\left(1 + \frac{2}{3}(\frac{h_a}{l_a})^2 - \frac{2}{5}(\frac{h_a}{l_a})^4\right)$

- مثال: در شکل زیر، اگر ماکزیمم نیروی کشش در کابل نامتحد نقاط A و B، 5KN باشد، حداقل سطح مقطع کابل (ρ)، مینیمم کشش کابل (T_0) و طول کابل (L) را بیابید.



$w = \rho g = cte$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} = cte \Rightarrow y = \frac{w}{2T_0}x^2$

$y(x_1) = 0.9 \Rightarrow \frac{w}{2T_0}x_1^2 = 0.9$

$y(x_2) = 2.7 \Rightarrow \frac{w}{2T_0}x_2^2 = 2.7$

$\Rightarrow (\frac{x_1}{x_2})^2 = \frac{1}{3} \overset{x_1 - x_2 = 9}{\Rightarrow} \frac{x_1}{x_1 - 9} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-9}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_1=-12.3 \ (\text{غیرقابل قبول} \leftarrow x_1>0) \\ x_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow \{x_1=3.29\,m \ (\text{قابل قبول}) \Rightarrow \{x_2=-5.71\,m \end{cases}$$

$$T_{max}^2 = T_0^2 + (\omega x)_{max}^2 \Rightarrow 25 = T_0^2 + (5.71\,\omega)^2 \Rightarrow 32.6\,\omega^2 + T_0^2 = 25$$

$$y=\frac{\omega}{2T_0}x^2 \Rightarrow 0.9=\frac{\omega}{2T_0}(3.29)^2 \Rightarrow \omega = 0.17\,T_0$$

$$\Rightarrow T_0 = 3.6\,kN,\ \omega = 0.6\,\frac{kN}{m}$$

$$w=\rho g \Rightarrow \{\rho = 62\,\frac{kg}{m}$$

طول کابل AB = طول کابل OA + طول کابل OB $= s_1 + s_2 \simeq \left(3.29 \times \left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{0.9}{3.29}\right)^2+\dots\right)\right)+\left(5.71\times\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{2.7}{5.71}\right)^2+\dots\right)\right)$

$$= 3.45 + 6.56 \Rightarrow \{\text{طول کابل} \simeq 10.0\,m$$