به نام خدا

جلسه دهم و یازدهم

* وضعیت در نظر گرفته شده در حل مسائل خرپا:

1- همگی نیروهای وارد بر خرپا، باستی در مفاصل اعمال شوند.

2- در حالت های از قبل اعضا صرف نظر می کنیم. (اگر نیاز به اعمال شد و وزن نیز منظور باشد، نیروی $\frac{W}{2}$ را به هریک از مفاصل آن عضو وارد می کنیم.)

3- اعضای خرپا معمولاً مستقیم و باریک هستند (≡ از عرض آن ها صرف نظر می کنیم.)

4- صرف نظر از نوع اتصال اعضا (پیچ، جوش، پرچ)، ما معمولاً آن ها را مفصلی در نظر می گیریم.

(≡ لقمه های مفصلی ما هیچ گشتاور را منتقل نمی کنند)

5- تمام محاسبات مربوط به خرپا و اعضای آن در یک صفحه، یا بعبارتی دو بعدی حل می شود.

تحلیل خرپاها:

① روش مفاصل

- در این روش، ما لازم است تا نیروهای وارد بر هر مفصل را رسم کرده و معادله تعادل را برای آن ها بنویسیم.

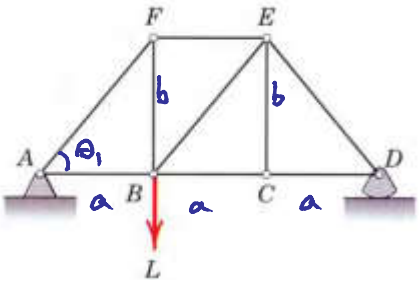
* یک مفصل شروع کند که حداکثر 2 نیروی مجهول داشته باشد.

- حتی وقت ها لازم است که ابتدا نیروهای تکیه گاهی را محاسبه کنیم.

- اگر سوال سمت دنبال نیروها را در کل سازه خواست، از همان جهت های فرضی صفحه،

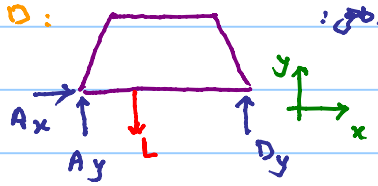
به دلخواه یک جهت را برای آن در نظر گرفته (پیشنهاد: جهت کششی) و پس از محاسبه، در صورت منفی بودن، جهت نیرو را عکس کنید.

مثال: نیروی هریک از اعضای خرپای شکل زیر را محاسبه کنید.



حل: محاسبه نیروی تکیه‌گاهی:

F.B.D:

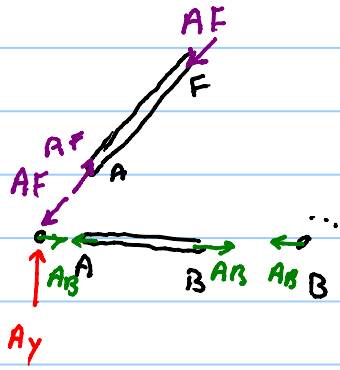


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + D_y = L$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow La - 3aD_y = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = \frac{L}{3},\ A_y = \frac{2}{3}L}$$

گره A:



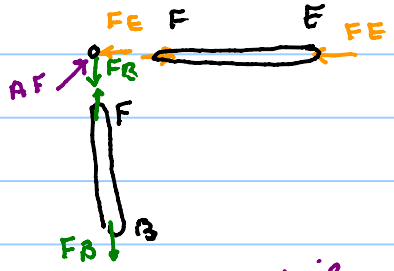
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow AB - AF\cos\theta_1 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - AF\sin\theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow AF, AB \checkmark$$

$$\boxed{AF = \frac{A_y}{\sin\theta_1}},\ \boxed{AB = AF\cos\theta_1}$$

گره F:

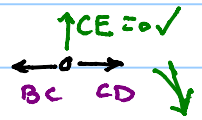


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow AF\cos\theta_1 - FE = 0 \Rightarrow \boxed{FE = AF\cos\theta_1}$$

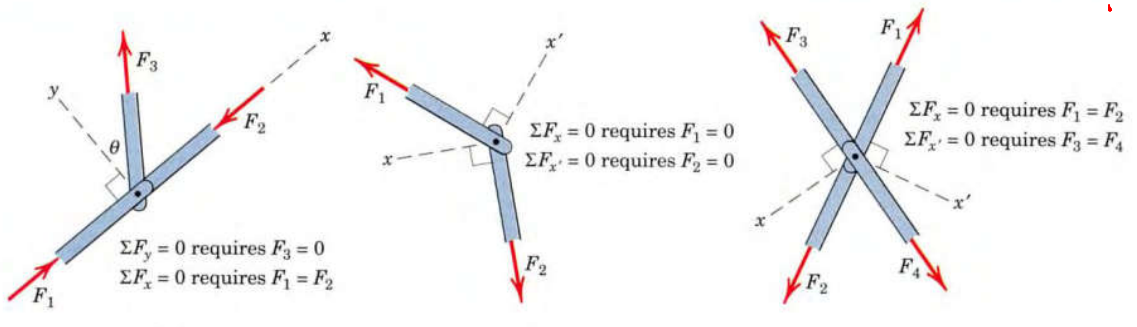
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow AF\sin\theta_1 - FB = 0 \Rightarrow \boxed{FB = AF\sin\theta_1}$$

* با ادامه این روند، نیروی سایر اعضا پیدا می‌شود!

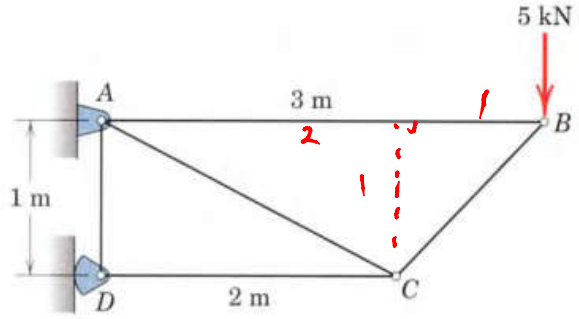
گره C:



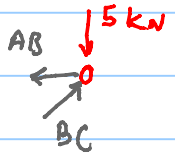
- حالت خاص:



مثال: نیرو در هریک از اعضای خرپای زیر را محاسبه نمایید.



گره B:



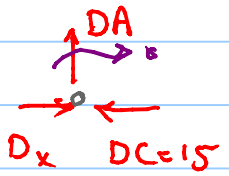
$\sum F_y = 0 \Rightarrow BC \sin 45^\circ = 5 \Rightarrow BC = 5\sqrt{2}, C$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow BC \cos 45^\circ = AB \Rightarrow AB = 5, T$

به همین طریق ادامه می‌دهیم:

$AC = 5\sqrt{5}\ kN, T \quad , \quad DC = 15\ kN, C$

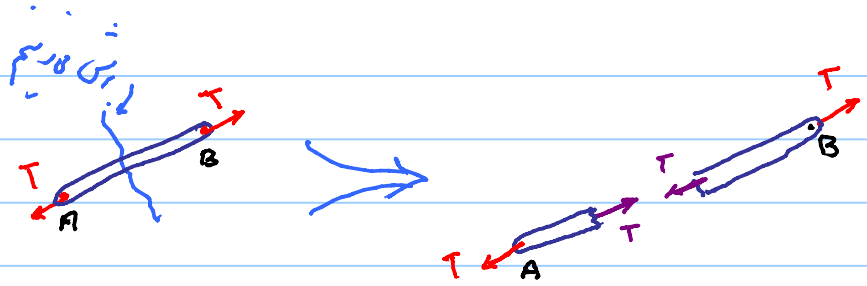
گره D:



$DA = 0, \quad D_x = 15\ kN$

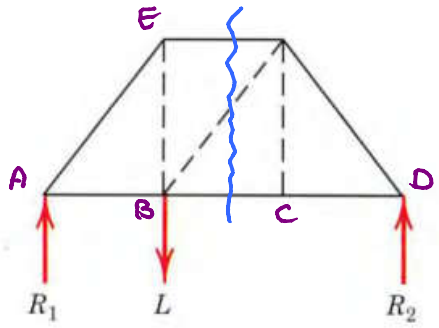
* می‌توانستیم از ابتدا به روش گره‌ها را نیز محاسبه کرده و مسئله را حل کنیم.

② روش برش (روش مقطع)



* این روش برای محاسبه‌ی نیرو در یک یا چند عضو محدود در خرپاها به کار می‌رود.

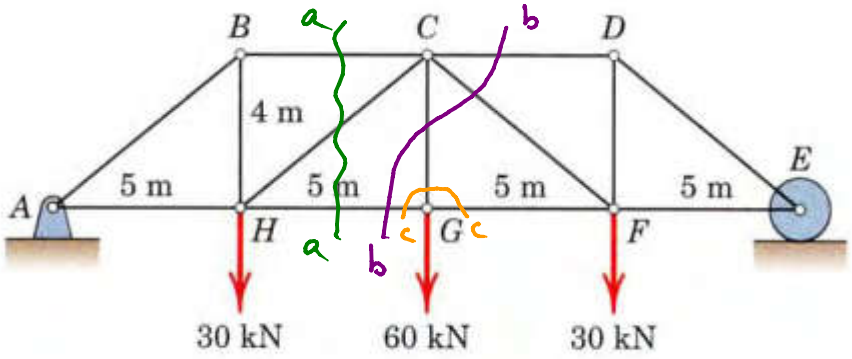
- برای استفاده از این روش، خط برشی در سازه ایجاد می‌کنیم تا از بعضی از اعضای (۳) خرپا عبور کند و در نهایت خرپا را به دو بخش جدا از هم تقسیم کند.



! برش از مقطع می‌گذرد!

- از خط برش مقطع رونده می‌توان نیروی EF، BF و BC را محاسبه نمود.

- مثال: نیرو در اعضای CH و CG را محاسبه کنید.

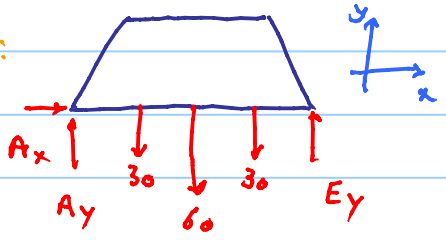


* از برش a-a، نیرو در عضوهای BC، CH و GH قابل محاسبه‌اند.

* با توجه به اینکه نیرو در عضو GH از برش a-a مشخص شده است، می‌توان سه مجهول CD، CF و CG را از برش‌های b-b و c-c محاسبه نمود.

حل: ابتدا نیروهای تکیه‌گاهی خرپا را محاسبه می‌کنیم.

F.B.D:

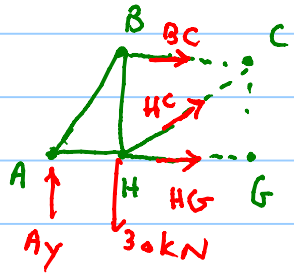


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + E_y = 120\ kN$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 30\times 5 + 60\times 10 + 30\times 15 - 20A_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 60\,kN,\ E_y = 60\,kN}$$

برش a-a:



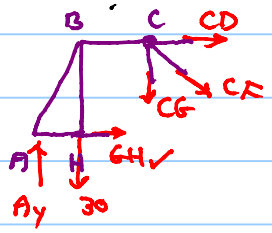
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow HC\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} + A_y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow HC = -48.0\ kN \Rightarrow \boxed{HC = 48\,kN, C}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow GH\times 4 + 30\times 5 - 60\times 10 = 0 \Rightarrow \boxed{GH = 112.5\ kN, T}$$

- برای بدست آوردن CG، با استفاده از روش مقطع برای G داریم: $CG = 60\,kN, T$ (یا برش c-c)

برش b-b:

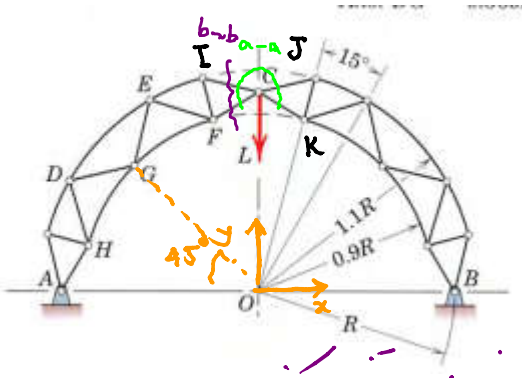


$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow CD + CF\cdot\frac{5}{\sqrt{41}} + 112.5 = 0 & (I) \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow 60 - 30 - CG - CF\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} = 0 & \\ \sum M_G = 0 \Rightarrow 30\times 5 - 60\times 10 - CD\times 4 - CF\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}\times 4 = 0 & (II) \end{cases}$$

(توجه کنید که معادله III مستقل نیست!) $\Rightarrow \boxed{CD = 75\,kN, C} \quad \boxed{CF = 48\ kN, C}$

- برای خرپاهای هندسی و بارگذاری (به صورت فوق) توجه کنید که نیروها در اعضای مساوی خرپا دقیقاً با هم محاسبه شده است و این امر کاملاً صحیح است!

مثال - در خرپای نشان داده شده، نیروی عضو DG را محاسبه کنید.

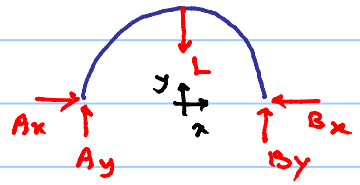


مفاصل، روی یک دایره به شعاع R قرار دارند. اندازه زاویه بین هر دو عضو ۱۵° است.

$OA = OB = OC = R$ (همه شعاع‌اند)

- روش حل: از روش هندسه و بارگذاری به صورت جبرانی استفاده می‌کنیم.

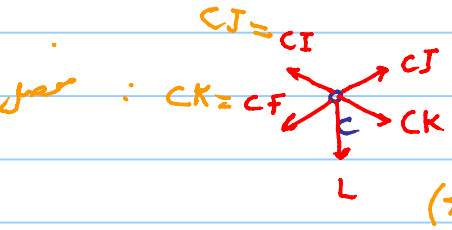
ابتدا F.B.D کل سازه:



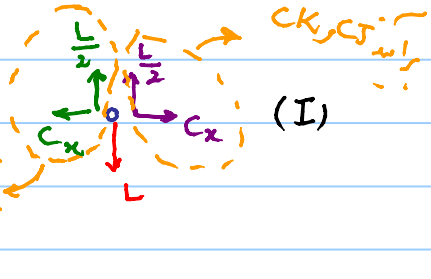
$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y = \frac{L}{2}$

$\sum F_y = 0 \ (\text{یا } \sum M_B = 0) \Rightarrow A_y = \frac{L}{2}$

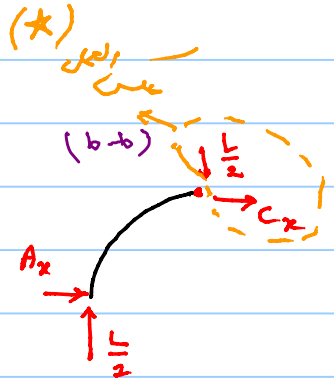
مفصل C (a-a): $CK = CF$ ، $CJ = CI$



$\equiv$

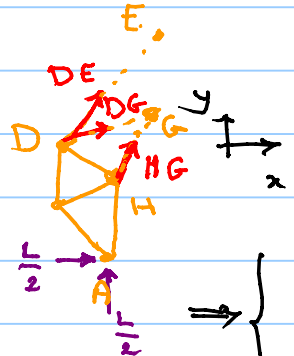


با توجه به (I)، دیاگرام آزاد بخش جدا شده مفصل C را رسم می‌کنیم:



$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{L}{2}R + C_x \cdot R = 0 \Rightarrow \boxed{C_x = -\frac{L}{2}}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = \frac{L}{2}}$



$D = 1.1R(-\cos 30^\circ i + \sin 30^\circ j)$

$E = 1.1R(-\cos 60^\circ i + \sin 60^\circ j)$

$G = 0.9R(-\cos 45^\circ i + \sin 45^\circ j)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{DE} = F_{DE}\hat{e}_{DE} = F_{DE}(0.707i + 0.707j) \\ \vec{F}_{DG} = F_{DG}\hat{e}_{DG} = F_{DG}(0.965i + 0.264j) \\ \vec{F}_{HG} = F_{HG}\hat{e}_{HG} = F_{HG}(0.5i + 0.866j) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} + 0.5F_{HG} + 0.965F_{DG} + 0.707F_{DE} = 0 & \text{(I)} \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} + 0.866F_{HG} + 0.264F_{DG} + 0.707F_{DE} = 0 & \text{(II)} \\ \sum M_O = 0 \Rightarrow \vec{r}_{OD} \times \vec{F}_{DG} + \vec{r}_{OH} \times \vec{F}_{OH} + \vec{r}_{OD} \times \vec{F}_{DE} + \vec{r}_A \times \vec{F}_A = \vec{0} & \text{(III)} \end{cases}$$

(III), (II), (I) $\Longrightarrow$

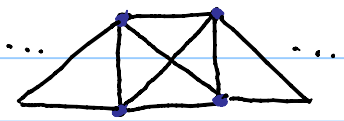
$$\begin{cases} F_{DE} = 0.839L, T \\ F_{GH} = -1.090L \equiv 1.090L, C \\ F_{DG} = -0.569L \equiv 0.569L, C \end{cases}$$

- معنی داخلی و خارجی در خرپاها:

- اگر بر روی خرپا دقیقا به تعداد مورد نیاز بر خط تعادلش، فقط (سه تا) خارجی وجود داشته باشد،

خرپا را معین خارجی گوید.

- اگر بیش از حداقل لازم خرپا از سه تای خارجی، تعداد اعضای داخلی نیز از آنچه برای فروریختن لازم است، داشته باشد، خرپا را نامعین داخلی گوید.

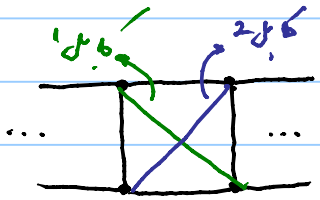


* در خرپاهای اگر:

$2J > m+3$ → خرپا نامعین است و در اثر اعمال بار فرو می‌ریزد (کمبود اعضای داخلی دارد)

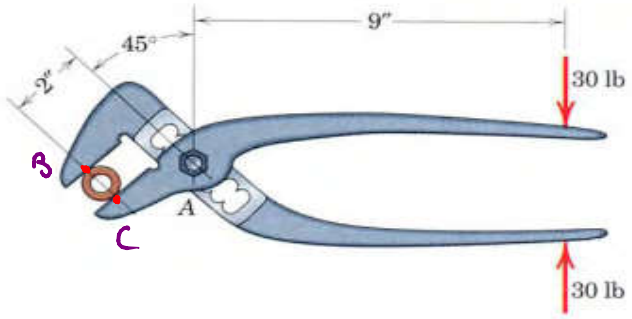
$2J < m+3$ → خرپا نامعین داخلی است (عضو زائد داخلی دارد)

- بسیار متداول است که تا سطح مقطع شکل در خرپاها را با سطوح هریدری (!) مهار کنند. این سطوح می‌توانند هم برون‌سی و هم برون‌ساری را کنترل کنند، خرپا از نظر داخلی، نامعین است؛ این سطوح هریدری، اغلب از نوع طاقبندی مثل کابل باشند و فقط برون‌سی را کنترل می‌کنند، اما در عضو هریدری، برون‌محور در عضو تحت فشار برون‌سی عمل می‌کند (برای کابل تحت فشار برون‌سی مقطع نمی‌گیریم و مثل اینکه آن کابل در ساده وجود ندارد! تمام موانع کابل حل شده است.)



* ماشین ها

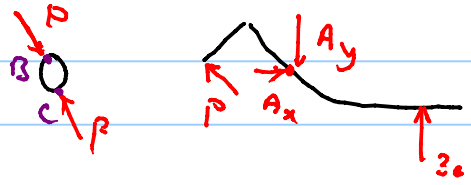
- مثال: مطلوب نیروی وارد شده به قطعه و همچنین نیروی مفصل A.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \times 2 - 30 \times 9 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 135\ lb}$$

قطعه F.B.D:



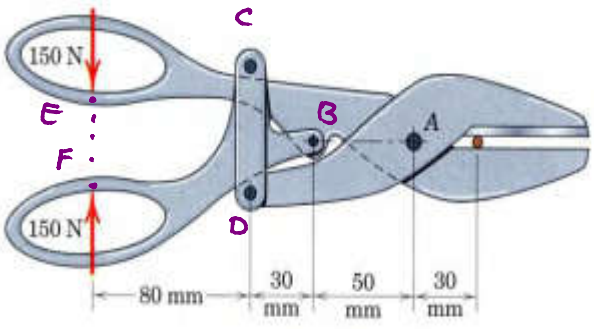
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P\cos 45^\circ + A_x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_x = 95.5\ lb}$$

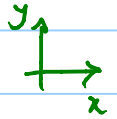
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -A_y + 30 + P\sin 45^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 125.5\ lb}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 157.6\ lb}$$

- مثال: گیره های 150N استفاده شده به دسته ی قیچی مطابق شکل، چه نیروی به قطعه وارد می شود.

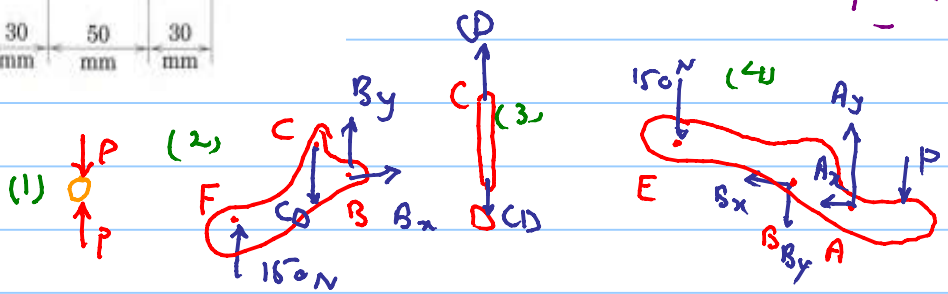


- دیاگرام آزاد بدنه ی تک تک قیچی



را رسم می کنیم:

F.B.D:

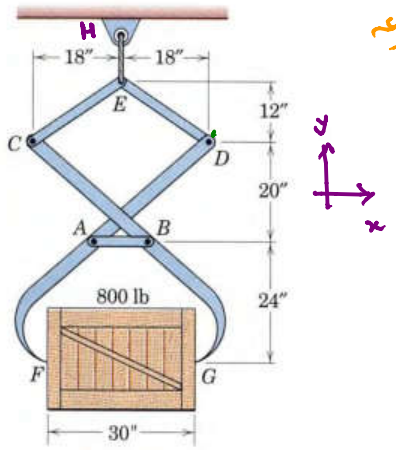


(5) CD, A, A_y, A_x, D, P

$$(2)\ \sum M_B = 0 \Rightarrow 150 \times 110 = CD \times 30 \Rightarrow \boxed{CD = 550\ N}$$

$$(5)\ \sum M_A = 0 \Rightarrow CD \times 80 = P \times 30 \Rightarrow \boxed{P = 146.7\ N}$$

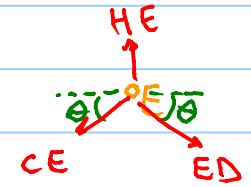
مثال: مطلوب است نیرو در عضو AB از مجموعه در تعادل باشد. (جسم در نقاط F و G با لبه اصطکاک جم دارد!)



حل مجموعه F.B.D:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow |EH = 800lb|$

عضو E:



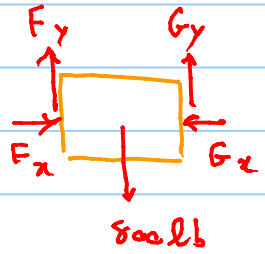
$\sum F_x = 0 \Rightarrow ED\sin\theta = CE\sin\theta$

$\Rightarrow |ED = CE|$

به دلیل تقارن مثل انتظار بود

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 800 - 2ED\sin\theta = 0 \Rightarrow |ED = 721.1lb|$

جسم F.B.D:

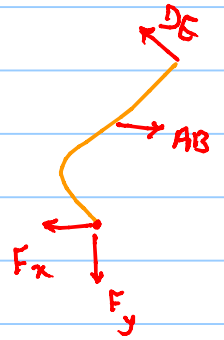


* از تقارن هم میشد راحت فهمید که $F_y = G_y = 400\ lb$

الان با حل نیروی DAF و GBC نیروی سیم ها را خواهیم یافت.

چرا؟!

عضو DAF:

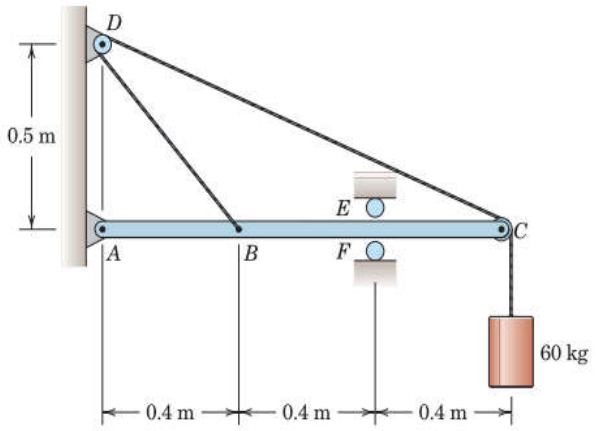


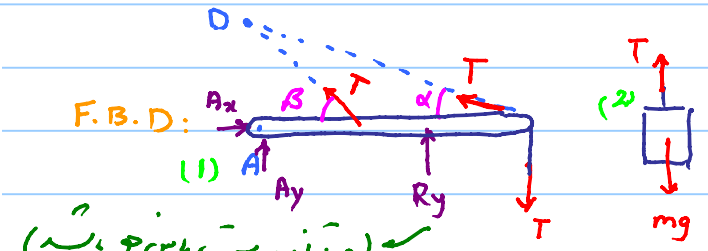
$\sum M_F = 0 \Rightarrow ED\sin\theta \times 33 + ED\cos\theta \times 44 - AB \times 24 = 0$

$\Rightarrow |AB = +1650\ lb|$

الان می‌توان با توجه معادلات تعادل نیروی $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ برای عضو DAF، نیروهای مجهول F_x و F_y را نیز محاسبه کرد.

مثال - در سازه زیر، نیروهای تکیه‌گاهی A و عکس‌العمل نیرو در تکیه‌گاه‌های مختلف را بیابید.





(می‌تواند به سمت پایین هم باشد)

(2) $\sum F_y = 0 \Rightarrow T - 60\times 9.81 = 0 \Rightarrow T = 588.6\ N$

$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{0.5}{1.2}\right) = 22.6^\circ$, $\beta = tg^{-1}\left(\frac{0.5}{0.4}\right) = 51.3^\circ$

(1) $\sum M_A = 0 \Rightarrow (T\sin\beta)\times 0.4 + (T\sin\alpha)\times 1.2 + R_y \times 0.8 - T\times 1.2 = 0 \Rightarrow R_y = +313.9\ N$

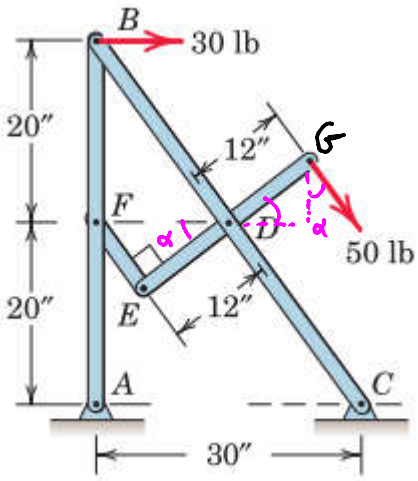
(جهت فرض شده صحیح بوده است (= نیرو به سمت بالا))

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - T\cos\beta - T\cos\alpha = 0 \Rightarrow A_x = 911.4\ N$

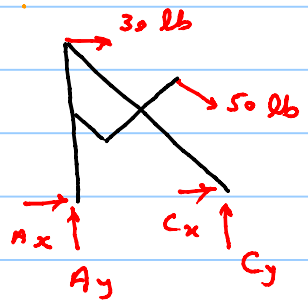
$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + R_y + T\sin\beta + T\sin\alpha - T = 0 \Rightarrow A_y = -410.9\ N$

$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 999.7\ N$

مثال - در قاب تحت بارگذاری زیر، نیروی وارد بر اعضاء از طرف مفاصل را محاسبه نمایید.



F.B.D :



$\triangle ABC$ تشابه: $\frac{BF}{AB} = \frac{FD}{AC}$

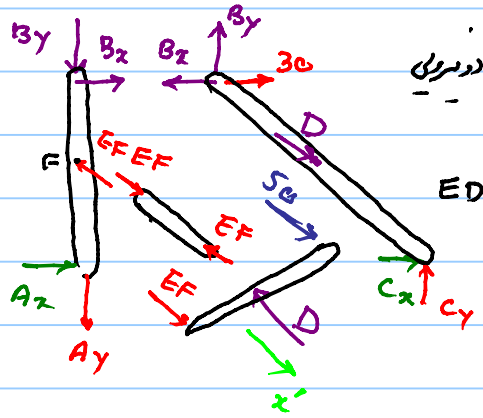
$\Rightarrow FD = 15'' \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_y \times 30 + 30 \times 40 + 50 \times 12 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -60\ lb}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -60 + C_y - 50 \times \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{C_y = +100\ lb}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + C_x + 50 \times \frac{3}{5} + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x + C_x = -60\ lb}$ (I)

* چون داده به ما جواب خاصی است، فقط برای A_x و C_x را به تنهایی محاسبه کرد. ← قطعات را جدا کنیم:



EDG: سه نیرو (سه نیروی موازی) و EF: عضو دو نیرو

عضو EDG: $\sum M_D = 0 \Rightarrow EF \times 12 = 50 \times 12 \Rightarrow \boxed{EF = 50\ lb}$

$\sum F_{x'} = 0 \Rightarrow EF + 50 - D = 0 \Rightarrow \boxed{D = 100\ lb}$

عضو BDC: $\sum M_B = 0 \Rightarrow C_x \times 40 + C_y \cdot 30 = 0 \Rightarrow \boxed{C_x = -75\ lb}$

(C_x، B_y، B_x : مجهولات)

(I) $\Rightarrow A_x - 75 = -60 \Rightarrow \boxed{A_x = +15\ lb}$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -75 + 30 - B_x + D \times \sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 15\ lb}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 + B_y - D\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -20\ lb}$